平成27年度 微分積分学演習 I 中間試験 (両面印刷の表)

学生番号 ________ 名前 ________ 得点 ________

1 次の極限を求めよ. (各5点, 計30点)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+\frac{1}{n}}{3+2n-6n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4+1/n^3}{3/n^2+2/n-6} = -\frac{2}{3}$ //

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n}\right)}{n+3-n}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+3/\sqrt{n}}+1\right)$

$\displaystyle= \frac{2}{3}$ //

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/\sqrt{n}}+1}$

$\displaystyle= \frac{1}{2}$ //

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{|2x|} = \lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{-2x} = -\frac{1}{2}$ //

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+2x)}{x} = \lim_{x\to0}\log(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0}\log\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$

$= \log e^2$

$= 2$ //

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{\log x}\right)^{\log x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{\log x}\right)^{\frac{\log x}{2}}\right\}^2$

$= e^2$ //

2 関数 $f(x)=\dfrac{3x^3-9x^2}{x^2-3x}$ 及び

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\neq 0,3) \\ 0 & (x=0) \\ -9 & (x=3)\end{cases}$$

について, 次の問いに答えよ. (各4点, 計20点)

(1) 関数 $f(x)$ の定義域を書け.

分母 $= x^2-3x = x(x-3)$ より

$\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 0, 3\}$ // $\left((-\infty,0)\cup(0,3)\cup(3,\infty)\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0} f(x)$ を求めよ.

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3x^3-9x^2}{x^2-3x} = \lim_{x\to0}\frac{3x^2(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x\to0}3x = 0$ //

(3) $\displaystyle\lim_{x\to3} f(x)$ を求めよ.

$\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{3x^3-9x^2}{x^2-3x} = \lim_{x\to3}3x = 9$ //

(4) 関数 $g(x)$ は点 $x=0$ で連続であるか否か理由を明確にして答えよ.

$\displaystyle\lim_{x\to0}g(x) = \lim_{x\to0}f(x) = 0 = g(0)$

より, $g(x)$ は $x=0$ で連続 //

(5) 関数 $g(x)$ は点 $x=3$ で連続であるか否か理由を明確にして答えよ.

$\displaystyle\lim_{x\to3}g(x) = \lim_{x\to3}f(x) = 9 \neq -9 = f(3)$

より, $g(x)$ は $x=3$ で不連続 //

〜 裏へ続く 〜

平成27年度 微分積分学演習 I 中間試験 (両面印刷の裏)

3 次の関数の導関数を求めよ．ただし，$f(x)$ は微分可能な関数とする．(各5点，計30点)

(1) $y = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}} + \log x = x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \log x = x^{\frac{1}{3}} + \log x$

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x} \quad //$$

(2) $y = x^3 \cos x$

$$y' = 3x^2\cos x - x^3\sin x$$
$$= x^2(3\cos x - x\sin x) \quad //$$

(3) $y = \frac{e^x}{\log x}$

$$y' = \frac{e^x \log x - e^x \frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$
$$= \frac{x\log x - 1}{x(\log x)^2}\, e^x \quad // \quad \left(= \left\{ \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x(\log x)^2} \right\} e^x \right)$$

(4) $y = \sin(x^4 + x^2 + 1)$

$$y' = \cos(x^4 + x^2 + 1)(4x^3 + 2x)$$
$$= 2x(2x^2 + 1)\cos(x^4 + x^2 + 1) \quad //$$

(5) $y = x^{x^2+1}$

$$\log y = (x^2+1)\log x$$
$$\frac{y'}{y} = (\log y)' = 2x\log x + (x^2+1)\frac{1}{x}$$
$$y' = x^{x^2+1}\left(2x\log x + x + \frac{1}{x}\right) \quad //$$

(6) $y = e^{\sin f(x)}$

$$y' = e^{\sin f(x)} (\sin f(x))'$$
$$= e^{\sin f(x)} \cos f(x) \cdot f'(x) \quad //$$

4 次の関数の ( ) 内の点における接線の方程式を求めよ．(各5点，計10点)

(1) $y = x\log x \quad (x = e)$

$$y' = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = \log x + 1$$
$$y - e\underbrace{\log e}_{1} = (\underbrace{\log e}_{1} + 1)(x - e)$$
$$y = 2(x - e) + e$$
$$= 2x - e \quad //$$

(2) $y = e^{\frac{1}{x}} \quad \left(x = \frac{1}{2}\right)$

$$y' = e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$
$$y - e^2 = -\frac{e^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) = -4e^2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$y = -4e^2x + 2e^2 + e^2$$
$$= -4e^2x + 3e^2 \quad //$$

5 関数 $f(x) = \log(\sin x + 2) - 1$ について次の問いに答えよ．(各5点，計10点)

(1) 方程式 $f(x) = 0$ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に実数解をもつことを示せ．

$$f(x) = \log(\sin x + 2) - \log e = \log\frac{\sin x + 2}{e}$$
$$f(0) = \log\frac{\sin 0 + 2}{e} = \log\frac{2}{e} < 0 \quad (\because 2 < e)$$
$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \log\frac{\sin\frac{\pi}{2} + 2}{e} = \log\frac{3}{e} > 0 \quad (\because e < 3)$$

$f(x)$ の連続性より，中間値の定理を使用すれば $\exists\, c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ s.t. $f(c) = 0$. よって，0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に実数解をもつ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は 0 と $\frac{5\pi}{2}$ の間に少なくとも3つの実数解をもつことを示せ．

(1)より，$f(x) = 0$ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間に少なくとも1つの実数解をもつ．次に $\left(\frac{\pi}{2}, \underbrace{\frac{4\pi}{2}}_{2\pi}\right)$ の間に少なくとも1つの実数解をもつことを示す．

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ ((1)より)，$f(2\pi) = \log\frac{2}{e} < 0$

かつ $f(x)$ の連続性より，中間値の定理を用いれば，$\exists\, c_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ s.t. $f(c_2) = 0$.

また，$\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ の間に少なくとも1つの実数解をもつことを示す．

$f(2\pi) < 0$，$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \log\frac{3}{e} > 0$ かつ $f(x)$ の連続性より，中間値の定理を用いれば

$\exists\, c_3 \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ s.t. $f(c_3) = 0$.

以上より，$f(x) = 0$ は $\left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$ 上で少なくとも3つの実数解をもつ． //