テイラーの公式の一般化とその応用

2005年度示野ゼミ*

テイラーの公式の一般化であるダルブーの公式を与え，いくつかの例を取り扱う．

1　テイラーの公式

テイラーの公式とその証明を復習する．

定理 1.1 (テイラーの公式) f を a, b を含む区間で n 回連続微分可能な関数とするとき，

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \\ R_n &= \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt. \end{aligned}$$

証明：

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

とおくと，部分積分により

$$\begin{aligned} R_n &= \left[f^{(n-1)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(n-1)}(t)\frac{(b-t)^{n-2}}{(n-2)!}dt \\ &= -f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_{n-1}. \end{aligned}$$

したがって，

$$R_n - R_{n-1} = -f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

また

$$R_1 = \int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

したがって，

$$\begin{aligned} R_n &= (R_n - R_{n-1}) + (R_{n-1} - R_{n-2}) + \cdots + (R_2 - R_1) + R_1 \\ &= -f^{(n-1)}(a)\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} - f^{(n-2)}(a)\frac{(b-a)^{n-2}}{(n-2)!} - \cdots - f'(a)\frac{(b-a)}{1!} - f(a) + f(b), \end{aligned}$$

これを $f(b)$ について解くとテイラーの公式が得られる．　□

*岡山理科大学理学部応用数学科

2　ダルブーの公式

テイラーの公式の証明と同様に部分積分を繰り返すことにより，ダルブーの公式を証明する．

定理 2.1 (ダルブーの公式) f を a, b を含む区間で n 回連続微分可能な関数，$\phi(t)$ を n 次の多項式とする．

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)) = &(b-a)\{\phi^{(n-1)}(1)f'(b)-\phi^{(n-1)}(0)f'(a)\}\\ &-(b-a)^2\{\phi^{(n-2)}(1)f^{(2)}(b)-\phi^{(n-2)}(0)f^{(2)}(a)\}\\ &+\cdots+(-1)^{n-1}(b-a)^n\{\phi(1)f^{(n)}(b)-\phi(0)f^{(n)}(a)\}+R_{n+1}\\ R_{n+1} = &(-1)^n(b-a)^{n+1}\int_0^1 \phi(t)f^{(n+1)}(a+t(b-a))dt.\end{aligned}$$

証明：

剰余項 R_{n+1} を部分積分すると以下の式が得られる．

$$\begin{aligned}R_{n+1} &= (-1)^n(b-a)^{n+1}\left\{\left[\phi(t)\frac{f^{(n)}(a+t(b-a))}{b-a}\right]_0^1 - \int_0^1 \phi'(t)\frac{f^{(n)}(a+t(b-a))}{b-a}dt\right\}\\ &= (-1)^n(b-a)^n(\phi(1)f^{(n)}(b)-\phi(0)f^{(n)}(a))+S_n.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}S_n &= (-1)^{n-1}(b-a)^n\int_0^1 \phi'(t)\frac{f^{(n)}(a+t(b-a))}{b-a}dt\\ &= (-1)^{n-1}(b-a)^{n-1}\left[\phi'(t)f^{(n-1)}(a+t(b-a))\right]_0^1\\ &\qquad + (-1)^{n-2}(b-a)^{n-1}\int_0^1 \phi''(t)f^{(n-1)}(a+t(b-a))dt\\ &= (-1)^{n-1}(b-a)^{n-1}(\phi'(1)f^{(n-1)}(b)-\phi'(0)f^{(n-1)}(a))+S_{n-1}.\end{aligned}$$

同様に S_{n-1}，S_{n-2}，$\cdots$，S_1 と考えていく．一般に，

$$S_k = (-1)^{k-1}(b-a)^{k-1}(\phi^{(n+1-k)}(1)f^{(k-1)}(b)-\phi^{(n+1-k)}(0)f^{(k-1)}(a))+S_{k-1}\qquad (k=1,2,\cdots,n+1).$$

ここで S_1 を考えると，

$$S_1 = (b-a)\int_0^1 \phi^{(n)}(t)f'(a+t(b-a))dt.$$

ϕ は n 次の多項式より，$\phi^{(n)}$ は定数になる．$(\phi^{(n)}(0)=\phi^{(n)}(1))$ よって，

$$S_1 = \phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)).$$

したがって，

$$\begin{aligned}R_{n+1} =&(R_{n+1}-S_n)+(S_n-S_{n-1})+\cdots+(S_2-S_1)+S_1\\ =&(-1)^n(b-a)^n(\phi(1)f^{(n)}(b)-\phi(0)f^{(n)}(a))\\ &+(-1)^{n-1}(b-a)^{n-1}(\phi'(1)f^{(n-1)}(b)-\phi'(0)f^{(n-1)}(a))\\ &\qquad\qquad+\cdots+\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)),\end{aligned}$$

これを変形すると，ダルブーの公式が得られる．　□

3　テイラーの公式との関係

ダルブーの公式の特別の場合としてテイラーの公式が得られることを示す．ダルブーの公式の剰余項は,

$$R_{n+1} = (-1)^n (b-a)^n \int_0^1 \phi\left(\frac{u-a}{b-a}\right) f^{(n+1)}(u)du \tag{3.1}$$

と表すことができる．実際，$u = a + t(b-a)$ として置換積分すると，$du = (b-a)dt$，u が a から b まで動くとき，t は 0 から 1 まで動くから (3.1) の右辺は,

$$\begin{aligned}(-1)^n(b-a)^n &\int_0^1 \phi\left(\frac{a+t(b-a)-a}{b-a}\right) f^{(n+1)}(a+t(b-a))(b-a)dt \\ &= (-1)^n(b-a)^{n+1}\int_0^1 \phi(t) f^{(n+1)}(a+t(b-a))dt = R_{n+1}.\end{aligned}$$

ダルブーの公式で $\phi(t) = (t-1)^n$ とすると，テイラーの公式が得られる．実際,

$$\phi^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!}(t-1)^{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

だから，定理 2.1 より,

$$\begin{aligned} n!(f(b)-f(a)) = (b-a)&\left\{0 \times f'(b) - \left(-\frac{n!}{1!}\right) f'(a)\right\} - (b-a)^2\left\{0 \times f''(b) - \frac{n!}{2!}f''(a)\right\} \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1}(b-a)^n\{0 \times f^{(n)}(b) - (-1)^n f^{(n)}(a) + R_{n+1}\}\end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)\frac{f'(a)}{1!} &+ (b-a)^2\frac{f''(a)}{2!} \\ &+ \cdots + (b-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{R_{n+1}}{n!}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.1) を使うと,

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= (-1)^n(b-a)^n \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-a} - 1\right)^n f^{(n+1)}(t)dt \\ &= \int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)dt. \end{aligned}$$

右辺を剰余項の形に整理するために，両辺を $n!$ で割って,

$$\frac{R_{n+1}}{n!} = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt,$$

ここで求めた剰余項を (3.2) に代入するとテイラーの公式が得られる．

4　剰余項の微分表示

ダルブーの公式の剰余項を微分を用いて表す.

定理 4.1　(積分法の平均値の定理)

$f(x), g(x)$ を閉区間 $[a,\, b]$ $(a < b)$ で連続な関数とする．また $g(x) > 0$ (有限個の点で，$g(x) = 0$ でもよい）とすると，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

となる，$a < c < b$ が存在する.
また $g(x) = 1$ とすると，

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

証明：$f(x)$ の $[a,b]$ での最大値，最小値をそれぞれ M, m とすると，

$$m \leq f(x) \leq M$$

各辺に $g(x)$ をかけると，

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

さらに，各辺を区間 $[a,\, b]$ で積分すると，

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

ここで，$g(x) > 0$ より $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$ である．上式の各辺を $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ で割ると，

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} \leq M. \tag{4.1}$$

中間値の定理より，

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)dx} = f(c).$$

となる c $(a < c < b)$ が存在する．したがって分母を払えば，

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

□

テイラーの公式，ダルブーの公式の剰余項を定理 4.1 を用いて表すと以下のようになる.

テイラーの公式の剰余項

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$
$$= \frac{(b-c)^{n-1}(b-a)}{(n-1)!}f^n(c) \qquad (a<c<b).$$

ダルブーの公式の剰余項

$$R_{n+1} = (-1)^n(b-a)^{n+1}\int_0^1 \phi(t)f^{(n+1)}(a+t(b-a))dt$$
$$= (-1)^n(b-a)^{n+1}\phi(c)f^{(n+1)}(a+c(b-a)) \qquad (0<c<1).$$

5 例

$\phi(t) = t^m(t-1)^m$ $(n=2m)$ としたときのダルブーの公式と剰余項を求める.

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(0)(f(b)-f(a)) &= (b-a)\{\phi^{(n-1)}(1)f'(b)-\phi^{(n-1)}(0)f'(a)\} \\ &- (b-a)^2\{\phi^{(n-2)}(1)f^{(2)}(b)-\phi^{(n-2)}(0)f^{(2)}(a)\} \\ &+ \cdots + (-1)^{n-k-1}(b-a)^{n-k}\{\phi^{(k)}(1)f^{(n-k)}(b)-\phi^{(k)}(0)f^{(n-k)}(a)\} \\ &+ \cdots + (-1)^{n-1}(b-a)^n\{\phi(1)f^{(n)}(b)-\phi(0)f^{(n)}(a)\} + R_{n+1}.\end{aligned}$$

上式から $\phi^{(k)}(0)$，$\phi^{(k)}(1)$ の値が必要になる．そこで，ライプニッツの公式

$$(fg)^{(k)} = f^{(k)}g + kf^{(k-1)}g' + \cdots + \binom{k}{j}f^{(k-j)}g^{(j)} + \cdots + fg^{(k)}$$

より，

$$\begin{cases} f(t) = t^m \\ g(t) = (t-1)^m \end{cases} \qquad \text{とおくと,}$$

$$f^{(k)}(t) = \begin{cases} m! & (k=m) \\ 0 & (k\neq m) \end{cases}, \quad g^{(k)}(t) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(t-1)^{(m-k)}$$

(1) $m \le k \le 2m$ のとき，$t=0$ を代入すると，

$$\phi^{(k)}(0) = (fg)^{(k)}(0) = \binom{k}{m}f^{(m)}(0)g^{(k-m)}(0)$$
$$= (-1)^{2m-k}\binom{k}{m}\frac{(m!)^2}{(2m-k)!}.$$

$t=1$ を代入すると，

$$\phi^{(k)}(1) = (fg)^{(k)}(1) = \binom{k}{m}\frac{(m!)^2}{(2m-k)!}.$$

(2) $m \leq k \leq 2m$ でないとき，

$$(fg)^{(k)}(0) = (fg)^{(k)}(1) = 0$$

以上のことから，ダルブーの公式の左辺は，

$$\phi^{(2m)}(0)(f(b) - f(a)) = (2m)!(f(b) - f(a))$$

したがって，

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1}(b-a)^k \left(\frac{\phi^{2m-k}(1)}{\phi^{2m}(0)} f^{(k)}(b) - \frac{\phi^{2m-k}(0)}{\phi^{2m}(0)} f^{(k)}(0) \right) + \frac{R_{2m+1}}{(2m)!},$$

$m \leq k \leq 2m$ のとき，$\phi^{(2m-k)}(0) = \phi^{(2m-k)} = 0$ だから，

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(2m-k)!}{(2m)!} \binom{k}{m} (f^{(k)}(a) - (-1)^k f^{(k)}(b))(b-a)^k + \frac{R_{2m+1}}{(2m)!}.$$

$$\frac{R_{2m+1}}{(2m)!} = \frac{(-1)^{2m}}{(2m)!}(b-a)^{2m+1} \int_0^1 t^m (t-1)^m f^{(2m+1)}(a + t(b-a)) dt$$

$$\begin{cases} g(t) = t^m (t-1)^m \\ F(t) = f^{(2m+1)}(a + t(b-a)) \end{cases} \qquad \text{とおくと，}$$

$$\begin{cases} m \text{ が偶数のとき} \cdots g(t) \geq 0 \\ m \text{ が奇数のとき} \cdots g(t) \leq 0 \end{cases}$$

上式に定理 4.1 を用いると，

$$\frac{R_{2m+1}}{(2m)!} = \frac{1}{(2m)!}(b-a)^{2m+1} f^{(2m+1)}(a + c(b-a)) \int_0^1 t^m (t-1)^m dt.$$

ここで，$\displaystyle\int_0^1 t^m (t-1)^m dt$ について m 回部分積分を繰り返すと，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^m (t-1)^m dt &= \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}(t-1)^m \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{m}{m+1} t^{m+1} (t-1)^{m-1} dt \\
&= -\frac{m}{m+1} \int_0^1 t^{m+1} (t-1)^{m-1} dt \\
&= \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} \int_0^1 t^{m+2} (t-1)^{m-2} dt \\
&\vdots \\
&= (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)(m-2)\cdots 3 \cdot 2}{(m+1)(m+2)\cdots(2m-1)2m} \int_0^1 t^{2m} dt \\
&= (-1)^m \frac{m(m-1)(m-2)\cdots 3 \cdot 2}{(m+1)(m+2)\cdots(2m)(2m+1)}.
\end{aligned}$$

右辺の分母分子に $m!$ を掛けると,

$$= (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

これより,

$$\frac{R_{2m+1}}{(2m)!} = \frac{(-1)^m (b-a)^{2m+1}}{(2m)!(2m+1)!} f^{(2m+1)}(a+c(b-a)) \qquad (0<c<1).$$

定理 5.1 f を a, b を含む区間で n 回連続微分可能な関数とするとき,

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(2m-k)!}{(2m)!} \binom{k}{m} (f^{(k)}(a) - (-1)^k f^{(k)}(b))(b-a)^k + \frac{R_{2m+1}}{(2m)!},$$

$$R_{2m+1} = \frac{(-1)^m (b-a)^{2m+1}}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(a+c(b-a))dt \qquad (0<c<1).$$

6 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ の近似計算

$\phi(t) = t^m (t-1)^m$ $(n = 2m)$ とし，ダルブーの公式を用いて，平方根の近似計算を行う.

$m = 1$ のとき

$$\phi(t) = t(t-1).$$

定理 5.1 より,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \frac{1}{2}(b-a)(f'(b) + f'(a)) + \frac{R_3}{2} \\ f(b) &= f(a) + \frac{1}{2}(b-a)(f'(b) + f'(a)) + \frac{R_3}{2}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

このときの剰余項 R_3 は,

$$R_3 = (b-a)^3 \int_0^1 (t^2 - t) f^{(3)}(a + t(b-a))dt.$$

(6.1) 式に，$f(a) = a^{p+1}$，$f(b) = b^{p+1}$ $(0 \leq p)$ を代入すると,

$$b^{p+1} = a^{p+1} + \frac{(b-a)(p+1)(b^p + a^p)}{2} + \frac{R_3}{2}$$

$$b^{p+1}\left(1 - \frac{1+p}{2}\right) - \frac{(p+1)ba^p}{2} = \frac{(p+1)ab^p}{2} + a^{p+1}\left(1 - \frac{p+1}{2}\right) + \frac{R_3}{2}.$$

両辺を -2 倍して,

$$b^{p+1}(p-1) + (p+1)ba^p = (p+1)ab^p + (p-1)a^{p+1} - R_3$$

$$b = \frac{(p+1)ab^p + (p-1)a^{p+1}}{(p-1)b^p + (p+1)a^p} + \frac{-R_3}{(p-1)b^p + (p+1)a^p}. \tag{6.2}$$

(1) $\sqrt{2}$ の近似計算をする．
$b=\sqrt{2}, p=2$ とおき，(6.2) の式に代入すると，

$$\sqrt{2}=\frac{6a+a^3}{2+3a^2}+\frac{-R_3}{2+3a^2}.$$

R_3 は非常に小さな値をとるため考えないことにする．漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{6a_n+{a_n}^3}{2+3{a_n}^2} \\ a_1=1 \end{cases}$$

により定義される数列 $\{a_n\}$ は，$\sqrt{2}$ の近似値を与える．実際，

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{6(1)+(1)^3}{2+3(1)^2}=\frac{7}{5}=1.400000000 \\ a_3&=\frac{6(7/5)+(7/5)^3}{2+3(7/5)^2}=1.414213198\cdots \\ a_4&=1.414213563\cdots \end{aligned}$$

また，$\sqrt{2}=1.414213562\cdots$ である．第 4 項目で小数点以下 8 桁目まで正しい．

(2) $\sqrt{3}$ の近似計算をする．
(1) と同様に $b=\sqrt{3}, p=2$ とおき，(6.2) の式に代入すると，

$$\sqrt{3}=\frac{9a+a^3}{3+3a^2}+\frac{-R_3}{3+3a^2}.$$

R_3 は非常に小さな値をとるため考えないことにする．漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{9a_n+{a_n}^3}{3+3{a_n}^2} \\ a_1=1 \end{cases}$$

により定義される数列 $\{a_n\}$ は，$\sqrt{3}$ の近似値を与える．実際，

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{9(1)+(1)^3}{3+3(1)^2}=\frac{10}{6}=1.666666666\cdots \\ a_3&=\frac{9(10/6)+(10/6)^3}{3+3(10/6)^2}=1.732026143\cdots \\ a_4&=1.732050808\cdots \end{aligned}$$

また，$\sqrt{3}=1.732050808\cdots$ である．第 4 項目で小数点以下 9 桁目まで正しい．

7　e の近似計算

まず，e の定義を復習する．ダルブーの公式を用いて e の近似計算をする．

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (\fallingdotseq 2.71) \quad .$$

証明：$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおいて，二項定理より，$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ を用いて，

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \\ &\qquad\qquad \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1+1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \\ &\qquad \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} \quad . \end{aligned} \tag{7.1}$$

同様に，

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 1+1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \\ \cdots + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

ここで，$\frac{1}{k!}$ の項同士を比べると a_{n+1} の展開項の方が係数値が大きい．さらに a_{n+1} には $\frac{1}{(n+1)!}$ に比例する正の値の項が加わる．これより，$a_n < a_{n+1}$ となるから数列 $\{a_n\}$ は単調増加数列である．

次に，(7.1) において，$\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \cdots, \left(1-\frac{k}{n}\right)$ はすべて 1 より小さいからこれらをすべて 1 として置き換えると，

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

ここで，

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad , \qquad \cdots , \quad \frac{1}{n!} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

よって，

$$a_n < 1+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

これより $a_n < 3$. したがって数列 $\{a_n\}$ は有界数列でもあるから数列 $\{a_n\}$ は収束する.
ゆえに, $a_n < 3$ において $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e < 3.$$

$\phi(t) = t^m(t-1)^m$ $(n=2m)$ とし, ダルブーの公式を用いて, e の近似計算を行う.
(1) $m=2$ のとき

$$\phi(t) = t^2(t-1)^2.$$

定理 5.1 より,

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{24}\{(b-a)(12f'(b)+12f'(a)) - (b-a)^2(2f''(b)-2f''(a))\} + \frac{|R_5|}{24}. \quad (7.2)$$

このときの剰余項 $|R_5|$ は,

$$|R_5| = \left|(b-a)^5\int_0^1 t^2(t-1)^2 f^{(5)}(a+t(b-a))dt\right|.$$

(7.2) で $f(x)=e^x$ とおき, $a=0$ を代入すると,

$$e^b = e^0 + \frac{1}{24}\{b(12e^b+12e^0) - b^2(2e^b-2e^0)\} + \frac{|R_5|}{24},$$

これを e^b について解くと,

$$e^b = \frac{12+6b+b^2}{12-6b+b^2} + \frac{|R_5|}{24-12b+2b^2}.$$

$b=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned} e =& \frac{12+6+1}{12-6+1} + \frac{|R_5|}{24-12+2} \\ =& \frac{19}{7} + \frac{|R_5|}{14} \\ =& 2.714285714\cdots + \frac{|R_5|}{14}. \end{aligned}$$

このとき,

$$|R_5| = \left|\int_0^1 t^2(t-1)^2 e^t dt\right|.$$

ここで $0<t<1$ の範囲で $e^t < e$ であるから,

$$|R_5| < \left|e\int_0^1 t^2(t-1)^2 dt\right| = \frac{e}{30}.$$

また, $e<3$ であるから,

$$|R_5| < \frac{1}{10}.$$

よって,

$$\left|\frac{R_5}{14}\right| < \frac{1}{10\times 14} < 10^{-2}.$$

これは小数点以下第 2 位まで正しいことを意味する.

(2) $m=3$ のとき

$$\phi(t)=t^3(t-1)^3.$$

定理 5.1 より,

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a)+\frac{1}{720}\{(b-a)(360f'(b)+360f'(a))-(b-a)^2(72f''(b)-72f''(a)) \\ &\qquad +(b-a)^3(6f'''(b)+6f'''(a))\}+\frac{|R_7|}{720}. \end{aligned} \tag{7.3}$$

このときの剰余項 $|R_7|$ は,

$$|R_7|=\left|(b-a)^7\int_0^1 t^3(t-1)^3 f^{(7)}(a+t(b-a))dt\right|.$$

(7.3) で $f(x)=e^x$ とおき，$a=0$ を代入すると,

$$e^b=e^0+\frac{1}{720}\{b(360e^b+360e^0)-b^2(72e^b-72e^0)+b^3(6e^b+6e^0)\}+\frac{|R_7|}{720}.$$

e^b について解くと,

$$e^b=\frac{720+360b+72b^2+6b^3}{720-360b+72b^2-6b^3}+\frac{|R_7|}{720-360b+72b^2-6b^3}.$$

$b=1$ を代入する.

$$\begin{aligned} e=&\frac{720+360+72+6}{720-360+72-6}+\frac{|R_7|}{720-360+72-6} \\ =&\frac{1158}{426}+\frac{|R_7|}{426} \\ =&2.718309859\cdots+\frac{|R_7|}{426}. \end{aligned}$$

このとき,

$$|R_7|=\left|\int_0^1 t^3(t-1)^3e^t dt\right|.$$

$0<t<1$ の範囲で $e^t<e$ であるから,

$$|R_7|<\left|e\int_0^1 t^3(t-1)^3dt\right|=\left|-e\frac{1}{140}\right|=\frac{e}{140}.$$

また，$e<3$ であるから,

$$|R_7|<\frac{3}{140}.$$

よって

$$\left|\frac{R_7}{426}\right|<\frac{3}{140\times 426}<10^{-4}.$$

これは小数点以下第 4 位まで正しいことを意味する. □

参考文献

[1] E. W. Cheney and T. H. Southard, *A survey of methods for rational approximation, with particular reference to a new method based on a formula of Darboux*, SIAM Rev. **5** (1963) 219–231.

[2] P. M. Hummel and C. L. Seebeck, *A generalization of Taylor's expansion*, Amer. Math. Monthly **56** (1949) 243–247.

[3] ラング 『解析入門 原著第 3 版』，岩波書店，1978.

[4] H. S. Wall, *A modification of Newton's method*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 90–94.

[5] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*: 4th edition, Cambridge University Press, 1927.