

Stable homotopy groups of the classifying space of integers modulo a power of two

加藤 諒 (名古屋大学大学院多元数理科学研究科 D3)

11/02/2013

球面スペクトラム S の代数的 K 群 $K_*(S)$ は、整数論、幾何的トポロジー、ホモトピー論をつなぐ対象の 1 つとして大変興味深いものであるが、計算するための有力な手法はあまり知られていない。一般に代数的 K 群の計算は困難であるが、trace method の理論を用いると、その位相的巡回ホモロジーや位相的 Hochschild ホモロジーから部分的情報が得られることが期待できる。これらの間は TR 理論により近似され、位相的 Hochschild ホモロジーはレベル 1 の TR 理論となり、レベルを上げるほど位相的巡回ホモロジーの構造に近くなる。よって、 $K_*(S)$ をこの視点から眺めるならば、 S の TR 理論をどう計算するかが重要となる。

S の位相的 Hochschild ホモロジー (= S のレベル 1 の TR 理論) は、その S^1 -スペクトラムとしての構造を忘れれば S と同型となる。よって、そのホモトピー群は球面の安定ホモトピー群と同型であり、この構造は多くの研究により低次元の部分はよく分かっている。よって、この情報を手がかりとしてレベル n の TR 理論を帰納的に計算できることが期待できる。以上の事実に対し、素数 2 での S の TR 理論は、Hesselholt の仕事により任意のレベルにおいて 5 次元まで完全に決定されていたが、それより上の次元については知られていなかった。

p を素数とする。上の議論に、さらに同変安定ホモトピー論における Greenlees-May の仕事を組み合わせることで、「巡回群 $\mathbb{Z}/p^k$ の分類空間 $B\mathbb{Z}/p^k$ の安定ホモトピー群の構造が $1 \leq k < n$ について分かる」ことと「素数 p におけるレベル n の S の TR 群の構造が分かる」ことは、球面の安定ホモトピー群の構造が分かっている次元においては同値と言えることが分かる。よって、上記した Hesselholt の仕事は、一般の n に対する 5 次元までの $B\mathbb{Z}/2^n$ の安定ホモトピー群の構造決定と考えられる。今回講演者は、この解釈により Hesselholt の仕事の拡張を試み、 $B\mathbb{Z}/2^n$ の安定ホモトピー群を 9 次元まで決定することに成功し、この応用として素数 2 での S のレベル n の TR 理論を 9 次元まで計算した。本講演では、その詳細を紹介する。