

有限位相空間の圏と有限単体的複体の圏の対応について

板垣早紀（高知大 M1） 逸見豊（高知大）

T_0 分離公理を満たす有限空間と有限単体的複体の間に以下の関係があることが、Stong と McCord により 1966 年に独立に示された．それによって有限空間上の代数 topology が有限単体的複体上の代数 topology に翻訳され，またその逆も成り立つことがわかる．

1. 任意の有限空間 X に対し，有限単体的複体 $\mathcal{K}(X)$ および自然な弱 homotopy 同値写像 $\varphi_X: |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ が存在する．
2. 任意の有限単体的複体 K に対し，有限空間 $\mathcal{X}(K)$ および自然な弱 homotopy 同値写像 $\psi_K: |K| \rightarrow \mathcal{X}(K)$ が存在する．

ここで，任意の有限単体的複体 K に対し， $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ は K と同型にはならないが， K の重心細分になっている．

上の $\mathcal{K}, \mathcal{X}$ は，有限空間と連続写像の圏 $\mathcal{F}top$ と有限単体的複体と単体写像の圏 $\mathcal{F}sc$ の間の関手的な構成となっている．しかし， $\mathcal{K}$ は忠実だが充満ではない．そこで我々は， $\mathcal{K}$ が忠実かつ充満であるように圏 $\mathcal{F}top$ を修正することを考えた．

定義 X と Y を有限空間とする． X から Y への写像 f が弱い連続写像であるとは，任意の $x \in X$ に対して $f(\mathcal{C}_x) \subset \mathcal{C}_{f(x)}$ となることをいう．ここで， $\mathcal{C}_x$ は， x の最小近傍 $\mathcal{U}_x$ と x の閉胞 $\mathcal{F}_x$ の和集合とする．

上のように定義することで，次のような定理が得られる．

定理 有限空間と弱い連続写像による拡張された圏 $ex\mathcal{F}top$ が定義され，このとき $ex\mathcal{F}top$ から $\mathcal{F}sc$ への関手 $\mathcal{K}$ は忠実かつ充満である．

有限単体的複体の間には strong homotopy と呼ばれる概念がある．有限空間 X と Y が同じ homotopy 型をもつならば， $\mathcal{K}(X)$ と $\mathcal{K}(Y)$ は strong homotopic であることが知られている．しかし，この逆は成り立たない．そこで我々は， $ex\mathcal{F}top$ において， $\mathcal{F}top$ の homotopy の概念を拡張した homotopy を構成することで， X と Y が同じ拡張した homotopy 型をもつことの必要十分条件が $\mathcal{K}(X)$ と $\mathcal{K}(Y)$ が strong homotopic であることが得られた．