

Higher homotopy associativity of power maps on finite H -spaces

河本 裕介 (防衛大学校)*

本講演では, すべての空間は弧状連結, 基点を持ち CW -複体のホモトピー型を持つとする.

(X, μ) をホモトピー結合的 H -空間とする. 上の仮定から (X, μ) は group-like 空間である. べき写像 $\{\Phi_\lambda: X \rightarrow X\}_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ を次で定める: $\Phi_0(x) = e$, $\lambda > 0$ に対し $\Phi_\lambda(x) = \mu(\Phi_{\lambda-1}(x), x)$, $\lambda < 0$ のとき $\Phi_\lambda(x) = \nu\Phi_{-\lambda}(x)$. ただし $e \in X$ は基点であり $\nu: X \rightarrow X$ はホモトピー逆元を表す. このとき (X, μ) がホモトピー可換 $\iff \Phi_\lambda$ は H -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$) であることが分かる.

p を奇素数, $t \geq 1$ に対し $(S^{2t-1})_p^\wedge$ が p -コンパクト群 $\iff t|(p-1)$ が知られている. まず Arkowitz-Ewing-Schiffman [1] により, 次の結果が示されている:

定理 1 ([1]). p を奇素数, $\lambda \in \mathbb{Z}$ とする. p -コンパクト群 $(S^{2p-3})_p^\wedge$ に対する Φ_λ が H -写像 $\iff \lambda(\lambda-1) \equiv 0 \pmod p$.

注意. $t < p-1$ のとき p -コンパクト群 $(S^{2t-1})_p^\wedge$ はホモトピー可換であるので Φ_λ は H -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$) である.

本講演では X が A_n -空間 ($n \geq 3$) のとき, べき写像 $\{\Phi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{Z}}$ が A_n -写像になるための条件を調べる. ここで A_n -空間とその間の A_n -写像は, それぞれ Stasheff [5] と岩瀬三村 [2] により, 結合多面体 $\{K_i\}_{i \geq 1}$ と乗法多面体 $\{J_i\}_{i \geq 1}$ を構成することで定義されている. μ が A_n -写像であれば Φ_λ も A_n -写像 ($\forall \lambda \geq 0$) であり, μ, ν が共に A_n -写像のとき Φ_λ は A_n -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$) であることが分かる. 特に X が 2 重ループ空間であれば Φ_λ は A_∞ -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$) となる.

定理 2. p を奇素数, $t \geq 1$, $\lambda \neq 0$ とする. $\lambda = p^a b$ (ただし $a \geq 0$, $b \not\equiv 0 \pmod p$) と書くとき p -コンパクト群 $(S^{2t-1})_p^\wedge$ に対する Φ_λ が A_∞ -写像 $\iff t|a$, $b^{\frac{p-1}{t}} - 1 \equiv 0 \pmod p$.

注意. p -コンパクト群 $(S^{2t-1})_p^\wedge$ に対する Φ_0 は明らかに A_∞ -写像である.

定理 1 は, 次のように一般化される:

定理 3. p を奇素数, $t \geq 1$ のとき p -コンパクト群 $(S^{2t-1})_p^\wedge$ に対し, 次が成り立つ:

- (1) Φ_λ は $A_{\frac{p-1}{t}}$ -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$).
- (2) Φ_λ が $A_{\frac{p-1}{t}+1}$ -写像 $\iff \lambda(\lambda^{\frac{p-1}{t}} - 1) \equiv 0 \pmod p$.

注意. $t = \frac{p-1}{2}$ の場合, 定理 3 (2) は McGibbon [3] により示されている.

本講演の主定理を述べる:

定理 4. p を奇素数, $\lambda \in \mathbb{Z}$ の $\pmod p$ 還元 $\bar{\lambda}$ は $\mathbb{F}_p^*$ の生成元とする. X は $\mathbb{F}_p$ -有限 A_p -空間, Φ_λ は $A_{\frac{p+1}{2}}$ -写像であり Steenrod 作用素 $\{\mathcal{P}^j\}_{j \geq 1}$ が $QH^*(X; \mathbb{F}_p)$ に自明に作用するとき $X_p^\wedge$ は p -完備化されたトーラスにホモトピー同値である.

* 〒 239-8686 神奈川県横須賀市走水 1-10-20 防衛大学校総合教育学群数学教育室
e-mail: yusuke@nda.ac.jp

注意. (1) 定理 4 における λ の条件を除くことはできない. 実際:

- $\lambda \equiv 0 \pmod{p}$ のとき, 定理 3 (2) より p -コンパクト群 $(S^3)_p^\wedge$ に対する Φ_λ は $A_{\frac{p+1}{2}}$ -写像である.
- $\lambda^s \equiv 1 \pmod{p}$ (ただし $1 \leq s < p-1$, $s|(p-1)$) であるとき $t = \frac{p-1}{s} > 1$ とおくと, 定理 2 より p -コンパクト群 $(S^{2t-1})_p^\wedge$ に対する Φ_λ は A_∞ -写像となる.

(2) 定理 4 において X は A_p -空間, Φ_λ は $A_{\frac{p+1}{2}}$ -写像という条件を弱めることはできない. 実際:

- Stasheff [5] より $(S^{2t-1})_p^\wedge$ は A_{p-1} -空間 ($\forall t \geq 1$) であり, その A_{p-1} -構造に対する Φ_λ は A_{p-1} -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$) となることが示せる.
- 定理 3 (1) より p -コンパクト群 $(S^3)_p^\wedge$ に対する Φ_λ は $A_{\frac{p-1}{2}}$ -写像 ($\forall \lambda \in \mathbb{Z}$) である.

定理 4 は, 次の命題を用いて示される:

命題 5. p, λ は定理 4 と同じ条件を満たすとする. X は $\mathbb{F}_p$ -有限 A_p -空間, Φ_λ は $A_{\frac{p+1}{2}}$ -写像のとき, 次が成り立つ:

(1) $a \geq 0, b > 0, 0 < c < p$ とする.

$$(i) \quad QH^{2p^a(pb+c)-1}(X; \mathbb{F}_p) = \mathcal{P}^{p^at} QH^{2p^a(p(b-t)+c+t)-1}(X; \mathbb{F}_p) \\ (1 \leq \forall t \leq \min\{b, p-c\}).$$

$$(ii) \quad \mathcal{P}^{p^at} QH^{2p^a(pb+c)-1}(X; \mathbb{F}_p) = 0 \quad (c \leq \forall t < p).$$

(2) $a \geq 0, 0 < c < p$ とする.

$$\mathcal{P}^{p^at} : QH^{2p^ac-1}(X; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cong} QH^{2p^a(tp+c-t)-1}(X; \mathbb{F}_p) \quad (1 \leq \forall t < c).$$

注意. 命題 5 (1) は $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ が A_p -原始的生成, Φ_λ が A_{p-1} -写像という条件のもとで Lin [4] により最初に示されている.

参考文献

- [1] M. Arkowitz, J. Ewing and S. Schiffman, *H-structures on localized and completed spheres*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 26 (1975), no. 1, 295–307.
- [2] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, Algebraic topology (Arcata, CA, 1986), 193–220, Lecture Notes in Math., 1370, Springer, Berlin, 1989.
- [3] C. A. McGibbon, *Multiplicative properties of power maps II*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, 479–508.
- [4] J. P. Lin, *A_n -liftings into Postnikov towers*, Kyushu J. Math. 51 (1997), no. 1, 35–55.
- [5] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275–292; ibid. 108 (1963), 293–312.