Mod p decomposition of H-spaces of low rank

西信 洋和　　逸見豊

p は $p \geq 5$ を満たす素数で，すべての空間は p で局所化されている．X を単連結で p-torsion free mod p finite H 空間とする．

$$\begin{gathered} H^*(X;\mathbb{Z}/p) = \Lambda(x_1, \cdots, x_k), \\ \deg x_i = 2n_i + 1, (1 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_k). \end{gathered} \tag{$*$}$$

k を X の rank といい，X を mod p exterior H 空間という．

例.

(1) 奇数次元球面 S^{2n+1} (rank 1)

$$H^*(S^{2n+1};\mathbb{Z}/p) = \Lambda(x)$$
$$\deg x = 2n+1$$

(2) $B_n(p)$ (rank 2)

$$H^*(B_n(p);\mathbb{Z}/p) = \Lambda(x_1, x_2)$$
$$\deg x_1 = 2n+1,\ \deg x_2 = 2n + 2(p-1) + 1,\ \mathcal{P}^1(x_1) = x_2$$

で与えられる．

Theorem (Kumpel [3], Hemmi [2])**.**

(1) $(2n_k + 1) - (2n_1 + 1) < 2(p-1)$ であれば，X は p-regular になる．つまり，

$$X \simeq S^{2n_1+1} \times \cdots \times S^{2n_k+1}$$

と表される．

(2) $(2n_k + 1) - (2n_1 + 1) < 4(p-1)$ であれば，X は quasi p-regular になる．つまり，X は奇数次元球面や $B_n(p)$ の積として表される．

研究目的.

1. $(2n_k + 1) - (2n_1 + 1) < 6(p-1)$ のとき，p-irreducible な mod p exterior H 空間を構成する
2. $(2n_k + 1) - (2n_1 + 1) < 6(p-1)$ のとき，X は上で構成した空間の積に分解することを示す.

Theorem (Cooke-Harper-Zabrodsky [1])**.**

Y を mod p exterior H 空間とする．このとき，Hopf 構成 $H(m)\colon Y * Y \to \Sigma Y$ と写像 $\Sigma\alpha\colon S^{2n_k+1} \to \Sigma Y$ による week pull-back を $Y[\alpha]$ とする．

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & Y * Y & \xrightarrow{H(m)} & \Sigma Y \\ \| & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Sigma\alpha} \\ Y & \longrightarrow & Y[\alpha] & \longrightarrow & S^{2n_k+1} \end{array}$$

$k < p-1$ ならば，$Y[\alpha]$ は rank k の mod p exterior H 空間である．

Theorem.

$p \geq 5$, X を rank k の mod p exterior H 空間とする．$(2n_k+1)-(2n_1+1) < 6(p-1)$ ならば，X は次の空間の積にホモトピー同値である．

(1) S^{2n+1}
(2) $S^{2n+1}[\alpha_1]$
(3) $S^{2n+1}[\alpha_2]$
(4) $(S^{2n+1}[\alpha_1])[\widetilde{\alpha}_1]$
(5) $(S^{2n+1}[\alpha_1])[\epsilon_\circ\alpha_2]$
(6) $(S^{2n+1} \times S^{2n+2(p-1)+1})[\alpha_2, \alpha_1]$

参考文献

[1] G. Cooke, J. Harper, and A. Zabrodsky, *Torsion free mod p H-spaces of low rank*, Topology **18** (1979), 349–359.

[2] Y. Hemmi, *Mod p decompositions of Mod p finite H-spaces*, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.) **22** (2001), 59–65.

[3] P. G. Kumpel, Jr., *On p-equivalences of mod p H-spaces*, Quart. J. Math. Oxford (2) **23** (1972), 173–178.