# 第1章

# まず初めに

## 1.1 集合

### 1.1.1 集合と要素

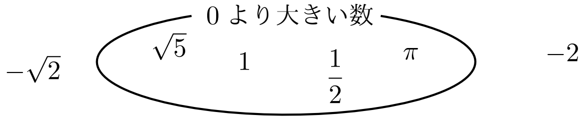
**定義 (集合と要素)**

ある条件を満たすモノの集まりを**集合**という。集合に含まれる1つ1つのモノを、その集合の**要素** (または**元**) という。集合は $\{$ と $\}$ で要素を囲んで表現する。

ここで言う "条件" とは、満たすか満たさないか明確に判断できる "決まり" を言う。

例えば、"0 より大きい数"や"応用数学科の学生"とかであって、"小さい数"や"近くの学生"などは、ここでは条件とは言わない。

集合を考えるとき、どのようなモノが含まれるていて、どのようなモノが含まれていないか見極めることが重要。




**定義 (集合の相等)**

2 つの集合 $A$ と $B$ が**等しい**とは、集合 $A$ の要素は集合 $B$ の要素でもあり、集合 $B$ の要素は集合 $A$ の要素でもあるときをいう。集合 $A$ と $B$ が等しいとき

$$A = B$$

とかく。

例 **1.1.1.** "6 の (正の) 約数の集まり"$= \{1, 2, 3, 6\}$

例 **1.1.2.** "6 の (正の) 約数の集まり"$\neq$"6 以下の素数の集まり"，$\{1, 2, 3, 6\} \neq \{2, 3, 5\}$.

♣ **補足** (否定の記号) 等号を否定する記号として、高校までは $\fallingdotseq$ を使っていたと思う。大学の講義や学術論文では $\neq$ を使うことが多い。どちらを使っても良いが、今後、いろいろな否定は / を使うことが多い。(例：$\not<, \subsetneq, \not\subset, \notin, \nparallel$ のように。)

ただし、平行の記号として $/\!\!/$ を用いた場合、その否定は $\not/\!\!/$ を用いる。

**例 1.1.3.** "四国地方の県の集合"$=$ { 愛媛県, 香川県, 高知県, 徳島県 }

**例 1.1.4.** "中国地方の県の集合"$\neq$ { 岡山県, 島根県, 広島県 }

集合の要素を全て書き表せないとき、誤解を招かない範囲で ... を使うこともある。

**例 1.1.5.** ... を使った集合の表し方の例

(1) "自然数全体の集合" $= \{1, 2, 3, \dots\}$

(2) "100 以下の素数の集合" $= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, 97\}$

要素とし明記されていないが、もちろん 4 や 10 は"自然数全体の集合"の要素である。

♣ **補足** 要素が無限に存在する集合を**無限集合** (例 1.1.5 (1))、逆に要素が有限個しかない集合のことを**有限集合** (例 1.1.5 (2)) と言う。

本来、集合を考えるとき、{} の中に同じモノを 2 つ以上書いても構わない。しかし、集合の定義において、要素の重複という考え方は無いので、キャンセルして扱われる。

$$\begin{aligned}\text{"}OKAYAMA\text{ を表すアルファベットの集合"} &= \{O, K, A, Y, A, M, A\}\\ &= \{O, K, A, Y, M\}.\end{aligned}$$

ここでは (この講義では) "集合のルール" をしっかり理解する必要があるため、重複して答えることは $\boxed{\text{"ダメ!"}}$ とする。例えば、$\frac{4}{6}$ や $\sqrt{9}$ も、(計算途中では書くが、) 特別な理由がない場合は答えとして書かないという"数のルール"がある。

また、集合は"含まれるか、含まれないか"という考え方であり、順序は気にしない。

$$\begin{aligned}\text{"}OKAYAMA\text{ を表すアルファベットの集合"} &= \{O, K, A, Y, M\}\\ &= \{A, K, M, O, Y\}.\end{aligned}$$

### 1.1.2　集合, 要素の表記法

ある集合 $S$ に対して $a$ が $S$ の要素であるとき、

$$a \in S \text{ または } S \ni a$$

とかく。逆に、ある集合 $S$ に対して $a$ が $S$ の要素でないとき、

$$a \notin S \text{ または } S \not\ni a$$

とかく。

♣ **補足**　「$a \in S$」は”$a$ は $S$ の要素 (元) である” または ”$a$ は $S$ に属する” という。ときどき ”$a$ は $S$ に含まれる” ということもあるが、後述の部分集合の言い方と混同するので、慣れるまでは避けることを推奨する。

例 **1.1.6.** $S = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ のとき、$3 \in S$ であり、$0 \notin S$ である。

例 **1.1.7.** $W = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}, \{3, 5, 6\}\}$ のように、集合を要素とする集合もある。
このとき $\{2\} \in W$ であり、$2 \notin W$ であることに注意する。

数学ではいろいろな数の集合を記号で記述する。良く使うものとして、それぞれ

自然数全体の集合を $\mathbb{N}$,　整数全体の集合を $\mathbb{Z}$,　有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$,
実数全体の集合を $\mathbb{R}$,　複素数全体の集合を $\mathbb{C}$

で記述する。

例 **1.1.8.** $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ であり、$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ である。
よって、$-3 \in \mathbb{Z}$ であるが、$-3 \notin \mathbb{N}$ である。

☆条件を用いた表示の仕方

集合の元をすべて書き表すことが出来ないときや直ぐに解らないときなど、{ } の中に | をかき、その左側に候補となる要素、右側に条件をかく。つまり、

$$\{a \mid a \text{ に関する' 条件'}\}$$

であり、これは

' 条件' をみたすすべての $a$ を集めた集合

を意味する。

例 **1.1.9.** 奇数全体の集合 $= \{a \mid a$ は 2 で割り切れない整数 $\}$.

条件を用いた ( | を用いた) 表記において、複数の条件を列挙することが出来る。列挙したときの区切りとなる **,(カンマ) は”かつ”を意味する** こととする。

例 **1.1.10.** 偶数全体の集合 $= \{a \mid a \in \mathbb{Z}, a$ は 2 で割った余りが $0\}$
$= \{a \mid a \in \mathbb{Z}$ かつ $a$ は 2 で割った余りが $0\}$.

例 **1.1.11.** $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \dfrac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z} \text{ かつ } b \in \mathbb{N} \right\}$.

この場合、左辺の集合には $\dfrac{2}{4}$ や $\dfrac{-6}{2}$ なども属しているが気にしない。

♣ **補足**　$\{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ と $\{y \mid y^2 + 2y - 3 = 0\}$ は等しい集合.　は良いだろうか？ (もちろん、全体集合が異なれば話は変わる。)

条件を用いた表示

$$\{a \mid 条件 1, 条件 2, 条件 3, \ldots\}$$

において、いずれかの条件として $a \in X$ ($X$ は既知の集合) が含まれているとき、候補となる要素をこの条件に書き換えることがある。例えば、以下の通りである。

$$\{a \mid 条件 1, \underline{a \in X}, 条件 3, \ldots\} = \{\underline{a \in X} \mid 条件 1, 条件 3, \ldots\}$$

**例 1.1.12.** $\{x \mid x \in \mathbb{R}, 2x^2 - 5x - 3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x - 3 = 0\} = \{-\frac{1}{2}, 3\}.$

**例 1.1.13.** 直線 $y = 3x + 2$ は、集合の記号を用いると

$$S := \{(x, y) \mid y = 3x + 2, x, y \in \mathbb{R}\}$$

と表せ、座標平面の第 1 象限は

$$T := \{(x, y) \mid x, y > 0, x, y \in \mathbb{R}\}$$

と表される。また、座標平面上の点 $(x, y)$ を $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ と書くことが多い。3 次元空間なら $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ である。

**例 1.1.14.** 上の例の集合 $S, T$ はそれぞれ、

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3x + 2\}$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$$

と書き換えることができる。

♠ **注意!**　集合の表し方は一通りではない。

例えば、座標平面の第 1 象限は $\{(x, y) \mid x, y > 0, x, y \in \mathbb{R}\}$ であるが、$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ と表すことも出来る。また、

$$\begin{aligned}\{x \mid x \in \mathbb{Z}\} &= \{x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{0, \pm x \mid x \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

のように一見異なる集合に見える集合も実は等しい。では、

$$\{x \mid x \in \mathbb{N}\} = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

は正しいだろうか？

答えは No. である。

**発展問題 A.** 以下の (1)〜(4) を示せ。

(1) $\{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$　　(2) $\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 \in \mathbb{Z}\} \neq \mathbb{Z}$

(3) $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geqq 0\} = \{b^2 \mid b \in \mathbb{R}\}$　　(4) $\{a \in \mathbb{Q} \mid a \geqq 0\} \neq \{b^2 \mid b \in \mathbb{Q}\}$

**定義 (集合の要素の個数)**

集合 A に含まれる要素の個数を

$$n(A), \quad \#A, \quad |A|$$

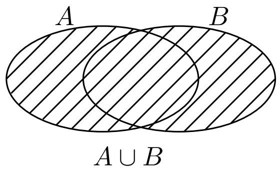
等で表す。

**例 1.1.15.** $A = \{1, 3\}$ のとき、$n(A) = 2$ である。また、$\#\mathbb{R} = \infty$ である。

### 1.1.3　集合の和、差、積

**定義 (和集合)**

2 つの集合 $A$ と $B$ の**和集合**とは、2 つの集合の要素を全て合わせた要素全体の集合をいう。
集合 $A$ と集合 $B$ の和集合は $A \cup B$ とかく。

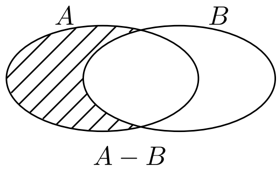



**例 1.1.16.** $A = \{1, 3\},\ B = \{2, 4\}$ の和集合 $A \cup B$ は $\{1, 2, 3, 4\}$ である。

**例 1.1.17.** $A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 3, 5\}$ の和集合 $A \cup B$ は $\{1, 2, 3, 5\}$ である。この場合、 $A \cup B = \{1, 1.2, 3, 3, 5\}$ とは書かない。

**定義 (差集合)**

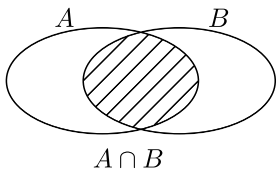
2 つの集合 $A$ と $B$ の**差集合**とは、集合 $A$ の要素から、集合 $B$ の要素全てを除いて得られる要素全体の集合をいう。集合 $A$ と $B$ の差集合は $A \backslash B$ または $A - B$ とかく。




差集合については線型代数学の講義ではあまり使わないので紹介のみに止める。また、商集合は少し意味合いが異なるので紹介も控える。興味があれば各自で調べてほしい。

**定義 (積集合)**

2 つの集合 $A$ と $B$ の**積集合**とは、2 つの集合の要素のなかで、両方の集合に含まれている要素全体の集合をいう。集合 $A$ と集合 $B$ の積集合は $A \cap B$ とかく。




**例 1.1.18.** $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{2, 4, 6, 8\}$ の積集合 $A \cap B$ は $\{2, 4\}$ である。

**例 1.1.19.** $A = \{1, 2, 5\},\ B = \{3, 7, 9\}$ の積集合 $A \cap B$ は空集合 $\varnothing$ (後述) である。

**定義 (空集合)**

**空集合**とは、要素が無い集合であり、$\varnothing$ とかく。

例 **1.1.20.** $A = \{\ \}$ は空集合である。$(A = \varnothing,\ |A| = 0)$

例 **1.1.21.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 < 0\} = \varnothing.$

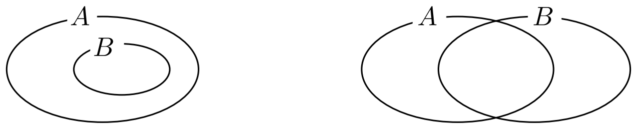
## 1.1.4　部分集合

**定義 (部分集合)**

集合 $A, B$ に対して、

$$x \in B \text{ ならば } x \in A$$

が成り立つとき、”$B$ は $A$ の**部分集合**である”という。$B$ が $A$ の部分集合であるとき、$B \subset A$ または $A \supset B$ とかく。$B$ が $A$ の部分集合であるとき、$B$ **は** $A$ **に含まれる**ともいう。また、$B$ が $A$ の部分集合でないとき、$B \not\subset A$ と表す。




$A \supset B$　　　$A \not\subset B,\ A \not\supset B$

部分集合は、ある集合の要素の一部 (もしくは全体) を取り出した集合とも考えられる。

例 **1.1.22.** $\{1,3\} \subset \{1,2,3\},\quad \{3,5\} \not\subset \{1,2,3\}.$

♠ **注意!**　部分集合の記号 $\subset$ は、左辺と右辺が等しい場合に $A \subset A$ のように使う。

等しいことも含めることを明記して $\subseteqq$ と書くことや、等しくないことを明記して $\subsetneqq$ と書くこともある。今後、$\subset$ は $\subseteqq$ と同義として扱う。

よって、集合が等しいことを次で定義することも出来る。

**定義**

集合 $A, B$ に対し、$A \subset B$ かつ $A \supset B$ が成り立つとき $A$ **と** $B$ **は等しい**という。

$$A \subset B \text{ かつ } A \supset B \Leftrightarrow A = B$$

例 **1.1.23.** $A = \{a, c\},\ B = \{a, b, c, d\}$ のとき、$A \subset B$ である。

例 **1.1.24.** $A = \{a, b\},\ B = \{a, c, d\}$ のとき、$A \subset B$ でも $A \supset B$ でもない。

**例 1.1.25.** 複素数, 実数, 有理数, 整数, 自然数 の各全体集合に対して、次が成り立つ。

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

♡ **point** 空集合 $\varnothing$ は任意の集合の部分集合である。

$$\varnothing \subset A$$

**例 1.1.26.** $A = \{a, b\}$ の部分集合は、$A \supset \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ である。

♣ **補足** 部分集合という概念は線型代数学の講義の中で**非常に重要**なものである。この概念を理解しなければ、部分空間や写像の核や像で苦労するだろう。

また、$A \ni B$ と $A \supset B$ の記号の使い方にも注意が必要である。慣れてくるとどちらも "A に B が含まれている" と言うこともあるので、その時々で $A$ と $B$ の関係を理解しておかなければばならない。

### 1.1.5 区間

**定義 (区間)**

**区間**とは、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合で、ある繋がった範囲を示すものである。その両端によって次のようの別けられる。(混乱が生じないときは $\in \mathbb{R}$ を省くこともある。)

1) 閉区間

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

2) 開区間

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

3) 半開区間

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \qquad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

4) 無限区間

$$[a, \infty) = \{x \mid a \leq x\}, \qquad (a, \infty) = \{x \mid a < x\},$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}, \qquad (-\infty, b) = \{x \mid x < b\},$$
$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

♠ $\leq$ と $\leqq$ は同じ意味

♠ **注意!** 無限区間の場合 $\infty, -\infty$ のカッコは ( か ) である。[ や ] は使ってはいけない。

**例 1.1.27.** $[-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}, \ \{x \mid 1 < x \leq 5\} = (1, 5].$

**例 1.1.28.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1>0\} = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$

**例 1.1.29.** $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1<0\} = \varnothing.$

**例 1.1.30.** $\{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\} = [0, \infty).$

**例 1.1.31.** 区間も集合の 1 種であるから、和集合, 差集合, 積集合を考えることが出来る。

(1) $[-1,3] \cup (1,5] = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\} = [-1,5].$

(2) $[-1,3] \cap (1,5] = \{x \mid 1 < x \leq 3\} = (1,3].$

(3) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3-4x>0\} = (-2,0) \cup (2,\infty).$

(4) $[-1,3) \backslash [1,5] = \{x \mid -1 \leq x < 1\} = [-1,1).$

### 1.1.6　数学言語、記号

数学でよく使う記号や日常と少し異なる言い回しを紹介しておく。

(1) 全称記号 $\forall$

「”任意の”または”全ての”という意味」

例　$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して、$ax^2+bx+c>0$ ならば、$a>0$ かつ $b^2-4ac<0$ である。

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して、$x^2 \geqq 0$ である。

(2) 存在記号 $\exists$

「”ある〜が存在する”または”〜が 1 つは存在する”という意味」

例　$b^2-4ac>0$ ならば $\exists x \in \mathbb{R}, ax^2+bx+c<0$ である。

$\exists x \in \mathbb{C}$ に対して、$x^2 \leqq 0$ である。

(3) 一意的に存在記号 $\exists!$

「”ある〜が 1 つのみ存在する”または”〜が唯一存在する”という意味」

例　$b^2-4ac=0$ ならば $\exists! x \in \mathbb{R}, ax^2+bx+c=0$ である。

$\exists! x \in \mathbb{R}$ に対して、$x^2=0$ である。

(4) 高々

数学で”高々”とは、”多くとも”という意味である。

例　$y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフは $x$ 軸と高々 3 点で交わる。

$y=ax^2+bx+c$ のグラフは $x$ 軸と高々 2 点で交わる。(0 点でもよいことに注意)

(5) 適当

数学で”適当”とは、”雑, いい加減”という意味ではなく、”(適) 切に (当) てはまる”という意味である。

例　$f(x)=x^2+2x-1$ とすると、適当な $x$ に対して $f(x)=f(x+2)$ となる。

例　$\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{オ}}$ に入る適当な値を答えよ。

### 1.1.7　演習問題 I

**問題 1.1.1.** 以下の集合 $A, B, C$ に対して、以下の問いに答えよ。

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{2n \mid n \text{ は整数かつ奇数 }\}, \quad C = \{k \in \mathbb{R} \mid k \notin \mathbb{N}\}$$

(1) 素数のなかで、$A$ に属する数 (要素) を答えよ。
(2) 以下の数のうち、$B$ に属する数を答えよ。

$$-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

(3) $B$ にも $C$ にも属する要素を 1 つ答えよ。
(4) $B$ に属さず、$A$ に属する要素を答えよ。

**問題 1.1.2.** 以下の集合を、例にならって要素を一つずつ並べる方法で表せ。
例. $A = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leqq x < 2\} = \{-2, -1, 0, 1\}$, $A' = \{x \in \mathbb{N} | -7 \leqq x < 0\} = \varnothing$

(1) $A_1 = \{\ x \mid x \in \mathbb{N}, -2 < x \leqq 3\}$
(2) $A_2 = \{10$ 以下の素数 $\}$
(3) $A_3 = \{20$ 以下の自然数で、2 の倍数でありかつ 3 の倍数 $\}$
(4) $A_4 = \{\ x \mid x$ は方程式 $x^2 - 2x - 15 = 0$ の解 $\}$
(5) $A_5 = \{\ y \in \mathbb{N} \mid y$ は方程式 $x^2 - 2x - 15 = 0$ の解 $\}$
(6) $A_6 = \{\ y \mid y$ は方程式 $y^2 - y - 2 = 0$ の解であり、かつ $y^2 - 5y + 6 = 0$ の解 $\}$
(7) $A_7 = \{\ y \mid y$ は方程式 $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ の解 $\}$
(8) $A_8 = \{\ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, a \in A_3, b \in A_7\}$
(9) $A_9 = \{\ x \mid x \in \mathbb{Z}, x$ は不等式 $x^2 - 2x - 15 < 0$ をみたす $\}$
(10) $A_{10} = \{\ x \mid x \in \mathbb{Z}, x$ は不等式 $x^2 + 2x - 3 \leqq 0$ をみたす $\}$
(11) $A_{11} = \{\ x^2 - 2x - 3 \mid x \in A_1\}$
(12) $A_{12} = \{\ x + y \mid x, y \in A_2\}$
(13) $A_{13} = \{\ x + y \mid x \in A_1, y \in A_2\}$
(14) $A_{14} = \{\ \{x, y\} \mid x \in A_1, y \in A_2\}$
(15) $A_{15} = \{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A_1, y \in A_2\}$

**問題 1.1.3.** 次の集合を例に例にならって、記号をもちいて表せ。
　　例. 自然数の中で偶数全体の集合は、$\{\ 2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(1) 自然数の中で奇数全体の集合
(2) 4 で割ると 1 余るような自然数全体の集合
(3) 2 つの平方数 (ある整数の 2 乗で表される整数) の和として表される非負整数全体の集合

**問題 1.1.4.** 以下の集合 $A$〜$C$ に対し、(1) から (4) を要素を一つずつ並べる方法で表せ。

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は 12 の約数 }\},\ B = \{2,3,5,7,11\},\ C = \left\{-1, \frac{3}{2}, \sqrt{5}, 4, \pi, -8\right\}$$

(1) 集合 $A$　　(2) 集合 $A \cup B$　　(3) 集合 $A \cap C$　　(4) 集合 $\mathbb{Z} \cap C$

**問題 1.1.5.** 以下の集合 $A$〜$E$ に対し、(1) から (6) を要素を一つずつ並べる方法で表せ。

$$A = \{-2,0,2\},\ B = \{2,5,7\},\ C = \{3,\ 5\},$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\},\ E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x-1| < 3\}$$

(1) $A_1 = A \cap D$　　(2) $A_2 = B \cup C$

(3) $A_3 = (A \cap B) \cup C$　　(4) $A_4 = (A \cup C) \cap E$

(5) $A_5 = D \cap (2,\ 5]$　　(6) $A_6 = (-\infty,\ 4] \cap E$

**問題 1.1.6.** 以下の集合を例にならって区間、またはいくつかの区間の和集合で表せ。

例. $\{\ x \mid -6 \leq x < 5\} = [-6,\ 5)$,　$\{\ x \mid x^2 - 1 > 0\} = (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty)$

(1) $\{\ x \mid -6 \leq x \leq 5\}$　　(2) $\{\ x \mid -1 < x \leq 6\}$

(3) $\{\ x \mid -6 \leq x \leq 5\} \cup \{\ x \mid -1 < x \leq 6\}$

(4) $\{\ x \mid -6 \leq x \leq 5\} \cap \{\ x \mid -1 < x \leq 6\}$

(5) $\{\ x \mid x^2 - 2x - 15 < 0\}$　　(6) $\{\ x \mid x^2 - 2x - 15 \geq 0\}$

(7) $\{\ x \mid x^2 + 2x + 3 > 0\}$　　(8) $\{\ x \mid x^2 + 2x + 3 < 0\}$

(9) $\{\ x \mid x^2 - 2x + 1 > 0\}$　　(10) $\{\ x \mid (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0\}$

**問題 1.1.7.** 次の (1)〜(10) の内容は正しいか、間違えているか答えよ。

(1) $A_1 = \{1,3,5,7,9\}$ のとき、$5 \in A_1$ である。

(2) $A_2 = \{2,4,6,8\}$ のとき、$\{2,4\} \in A_2$ である。

(3) $A_3 = \{1,3,5\}, A_3' = \{2,3,4\}$ に対して $A_3 \cap A_3' = \{3\}$ である。

(4) $A_4 = \{1,3,5\}$ に対して $A_4 \supset \{3,5\}$ である。

(5) $A_5 = \{2,3,4\}$ に対して $\varnothing \subset A_5$ である。

(6) $A_6 = \{\ 2m+1 \mid m \in \mathbb{N}\}$ に対して $x, y \in A_6$ ならば、$x+y$ は偶数である。

(7) $A_7 = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$ に対して $A_7$ に平面上の原点 $(0,0)$ は属さない。

(8) $A_8 = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は 3 の倍数 }\}$ に対して $x, y \in A_8$ ならば、$x + y \in A_8$ である。

(9) $A_9 = \{\ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ は 6 の倍数 }\}$ に対して $x, y \in A_9$ ならば、$x - y \in A_9$ である。

(10) ある集合 $A_{10}, A_{10}'$ に対して、$A_{10} \not\subset A_{10}'$ かつ $A_{10} \not\supset A_{10}'$ ならば、$A_{10} \cup A_{10}' = \varnothing$ である。

**発展問題 B.** 集合 $A = \{1,2,3\}, B = \{3,4\}$ に対して、集合 $C = \{S \cup T \mid S \subset A, T \subset B\}$ と集合 $D = \{S \cap T \mid S \subset A, T \subset B\}$ を、要素を一つずつ並べる方法で表せ。

**発展問題 C.** 以下の表において、集合 $A$ を左の欄とするとき、上の表記が正しいか、誤りか、($0 \in A$ をヒントに) 正しければ○、誤りなら × で埋めよ。

| $A$ | $0 \in A$ | $0 \subset A$ | $\{0\} \in A$ | $\{0\} \subset A$ | $\{0,1\} \in A$ | $\{0,1\} \subset A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{1\}$ | × | | | | | |
| $\{0,1\}$ | ○ | | | | | |
| $\{\{0\},1\}$ | × | | | | | |
| $\{0,\{0\},1\}$ | ○ | | | | | |
| $\{0,\{0,1\}\}$ | ○ | | | | | |

### 1.1.8　演習問題 I の略解

**略解 1.1.1.** (1) 2, 3, 5　(注意) ”素数のなかで”なので、1 は要素として含まれない。

(2) $n$ は $\ldots,-5,-3,-1,1,3,5,\ldots$ なので、$2n$ は $\ldots,-10,-6,-2,2,6,10,\ldots$ となる。よって、答えは $-6,-2,2,6$ である。

(3) $-2,-6,-10,-14,\ldots$ のうちのいずれか。2 や 6 はダメである。

(4) $1,3,4,5$

**略解 1.1.2.** (1) $A_1 = \{1,\ 2,\ 3\}$　(2) $A_2 = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(3) $A_3 = \{6,\ 12,\ 18\}$　(4) $A_4 = \{-3,\ 5\}$

(5) $A_5 = \{5\}$　(6) $A_6 = \{2\}$

(7) $A_7 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$　(8) $A_8 = \{2,3,4,6,9,12,18\}$

(9) $A_9 = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$　(10) $A_{10} = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1\}$

(11) $A_{11} = \{-4,\ -3,\ 0\}$

(12) $\{x+y \mid x,y \in A_2\}$ は $x$ と $y$ を $A_2$ の要素とするので、$x=2, y=2$ の場合も考えられる (4 や 6 を忘れない)。よって、$A_{12} = \{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14\}$

(13) $A_{13} = \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

(14) 集合 $A_{14}$ の要素は集合であることに注意する。したがって、$\{2,3\}$ と $\{3,2\}$ は同じ集合なので、どちらか一方のみを書く。同様に、$\{2,2\}$ や $\{3,3\}$ は $\{2\},\{3\}$ と書く。

よって、

$A_{14} = \{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,5\},\ \{1,7\},\ \{2\},\ \{2,3\},\ \{2,5\},\ \{2,7\},\ \{3\},\ \{3,5\},\ \{3,7\}\}$

(15) (14) との違いは、集合 $A_{15}$ の要素は座標である。したがって、$(2,3)$ と $(3,2)$ は別物である。よって、(15) の要素の数が (14) の要素の数より 1 つ多い。

$A_{15} = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(2,2),(2,3),(2,5),(2,7),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

ちなみに、$(2,2)$ を $(2)$ とはしない。

**略解 1.1.3.** 書き方が 1 通りでないことに注意しておくこと。

(1) $\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(2) $\{4n-3 \mid n \in \mathbb{N}\}$

(3) $\{n^2+m^2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$

**略解 1.1.4.** ”何が” 候補か忘れないように。$\mathbb{N}$ は自然数なので、負の数は考えない。

(1) $A$ は $\{1,2,3,4,6,12\}$ もしくは、$A=\{1,2,3,4,6,12\}$

(2) $A \cup B$ は $\{1,2,3,4,5,6,7,11,12\}$ もしくは、$A \cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,11,12\}$

(3) $A \cap C$ は $\{4\}$ もしくは、$A \cap C=\{4\}$

(4) $\mathbb{Z} \cap C$ は $\{-1,4,-8\}$ もしくは、$\mathbb{Z} \cap C=\{-1,4,-8\}$

**略解 1.1.5.** (1) $A_1=\{2\}$　(2) $A_2=\{2,3,5,7\}$　(3) $A_3=\{2,3,5\}$

(4) $A_4=\{0,2,3\}$　(5) $A_5=\{3\}$　(6) $A_6=\{-1,0,1,2,3\}$

**略解 1.1.6.** (1) $[-6,5]$

(2) $(-1,6]$

(3) $[-6,6]$

(4) $(-1,5]$

(5) $(-3,5)$

(6) $(-\infty,-3] \cup [5,\infty)$

(7) $(-\infty,\infty)$

(8) $\varnothing$

(9) $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$　和集合で表すことを忘れないように。

(10) $[1,2] \cup [3,\infty)$

**略解 1.1.7.** (1) ○ (2) × (3) ○ (4) ○ (5) ○ (6) ○ (7) ○ (8) ○ (9) × (10) ×

♣ 補足　自然数全体の集合：$\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,\ldots\}$,

整数全体の集合：$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$,

有理数全体の集合：$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}=\left\{0,\pm1,\pm2,\pm\dfrac{1}{2},\pm3,\pm\dfrac{1}{3},\ldots\right\}$,

実数全体の集合：$\mathbb{R}=\{$ 幾何学的に考えると、数直線上にある数全て $\}$,

$$\mathbb{R} \ni 0,\ 1,\ -3,\ \frac{2}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \log 2,\ etc.$$

複素数全体の集合：$\mathbb{C}=\{a+b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

$$\mathbb{C} \ni 0,\ 1,\ -3,\ \frac{2}{3},\ \pi,\ \sqrt{2},\ \log 2,\ 2-3\sqrt{-1},\ \pi+\log 3\sqrt{-1},\ etc.$$

ちなみに、実数でない複素数を虚数という。

# 1.2　写像

## 1.2.1　写像とは

**定義 (写像)**

2 つの集合 $X$ と $Y$ に対し、$X$ の各要素に対して $Y$ の 1 つの要素を対応させる**規則**を (定義域) $X$ から (値域) $Y$ への**写像**という。この規則を $f$ とするとき、

$$f : X \to Y$$

で表す。$X$ の要素 $x$ に対して、$Y$ の要素 $y$ を対応させるとき、

$$f : x \mapsto y$$

または

$$f(x) = y, \quad y = f(x)$$

で表す。
また、$X = Y$ のとき、$X$ から $X$ への写像を**変換**という ($X$ 内の変換という)。

集合 $X$ から集合 $Y$ への $f$ による写像を図で表すと、以下のようなイメージとなる。

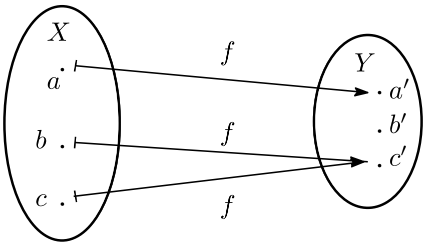



図 1

この図でわかるように、 $Y$ の要素のなかに、$X$ の要素が対応していない要素があっても構わないが、$X$ の要素のなかに、$Y$ の要素に対応していない要素があってはならない。

また、$Y$ の要素 1 つに対応している $X$ の要素が 2 つ (以上) あっても構わない。

♠ **注意!**　$\to$ と $\mapsto$ の違いに注意する。$\to$ は定義域と値域を表すために使われ、$\mapsto$ は要素同士の対応の規則を表すために使用される。

例 **1.2.1.** $X = \{x, x'\}, Y = \{y, y'\}$ とし、写像 $f$ を

$$f : X \to Y,\ f : x \mapsto y,\ f : x' \mapsto y'$$

と定めると、$X$ の要素 $x$ に対して $Y$ の要素 $y$ を対応させ、$X$ の要素 $x'$ に対して $Y$ の要素 $y'$ を対応させる規則で出来ている。

例 **1.2.2.** $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし、写像 $f : X \to Y$ を

$$f : x \mapsto x^2$$

と定める。のように使うこともある。

例 **1.2.3.** $X = \{a, b, c\}, Y = \{a', b', c'\}$ とし、写像 $f$ を

$$f : X \to Y,\ f : a \mapsto a',\ f : b \mapsto c',\ f : c \mapsto c'$$

と定めると $f$ は、ちょうど図 1 のイメージとなる。

♣ **補足**　高校までに習った関数は写像の一種である。定義域と値域がどちらも実数の場合、関数ということが多い。

## 1.2.2　写像の表記法

写像を定めるためには対応する規則を定義しなければならない。定義の方法として、”全てを表す方法”と”関連を表す方法”がある。

また、明らかに解る場合を除いて定義域と値域の集合も明記する。

全てを表す方法

(定義域の) 集合 $X$ と (値域の) 集合 $Y$ の要素を全て書き表すことが出来るとき、写像の規則を全て表す方法を考える。実際の例を見るのが一番解りやすいと思う。

例 **1.2.4.** $X = \{$ リンゴ, ミカン, バナナ $\}$, $Y = \{100$ 円, 150 円, 200 円 $\}$ とする。このとき、”値段を付ける”という規則 $f$ を、

$$f(\text{リンゴ}) = 150\ \text{円}, f(\text{ミカン}) = 200\ \text{円}, f(\text{バナナ}) = 150\ \text{円}$$

とすると $f$ は $X$ から $Y$ への写像である。

例 **1.2.5.** $X = \{0, 1, 2, 3\}$ とする。このとき規則 $f$ を

$$f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 2, f(3) = 3$$

とすると、$f$ は $X$ から $X$ への変換である。

関連を表す方法

集合 $X, Y$ の要素を全て書き表すことが出来ないとき、写像の関連を一般的に表す方法を考える。こちらも例を用いて説明する。

例 **1.2.6.** $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ とする。このとき、$x \in X$ に対して規則 $f$ を $f(x) = x^2 + 5x + 6$ とすると、$f$ は $X$ から $Y$ への写像である。(もしくは、$f$ は $X (= Y)$ 内の変換である。)

♡ **point**　この例からも解るように、既によく知っている関数 ($x^2, x^3, \sin(x), \log(x)$ など) は写像の一種である。

**例 1.2.7.** $X = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ とし、規則 $f$ を"$x$ 軸方向に 1, $y$ 軸方向に $-2$ 移動させる"とすると、$f$ は $X$ 内 (平面内) の変換である。例えば、$f((1,1)) = (2,-1)$ である。

**例 1.2.8.** $X = \{1,2,3,4\}$, $Y = \{0,1,2\}$ とする。$f$ を "3 で割った余り" という条件にすれば、$f$ は $X$ から $Y$ への写像であり、$g$ を "3 倍した数" とすると $g$ は $X$ から $Y$ への写像ではない。このとき、$f : X \to Y$ の各要素の対応は

$$f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 0,\ f(4) = 1$$

である。

**例 1.2.9.** 座標平面上の点に対して、原点からの距離を対応させる規則も写像である。

まず、$X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ とする。このとき、この写像 $f : X \to Y$ は

$$f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

という規則である。($x \in X$ の $x$ と $(x,y)$ の意味に注意。)

### 1.2.3　写像の相等

**定義 (写像の相等)**

2 つの写像

$$f : X \to Y, g : A \to B$$

が等しいとは

$$X = A, Y = B$$

であり、任意の $x \in X = A$ に対して

$$f(x) = g(x)$$

であることをいう。 このとき $f = g$ とかく。

**重要** 写像が等しいためには、まず、定義域同士、値域同士が等しくなければならない。

**例 1.2.10.** 2 つの写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ を

$$f : x \mapsto x^2 + 1,\ g : x \mapsto x^2 + 1$$

で定めると、$f \neq g$ である。(ただし、$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とする。)

**例 1.2.11.** 2 つの写像 $f : \{-2,-1,0,1,2\} \to \mathbb{R},\ g : \{-2,-1,0,1,2\} \to \mathbb{R}$ を

$$f : x \mapsto 4x - x^3,\ g : x \mapsto 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

で定めると、$f = g$ である。

### 1.2.4　写像の像

**定義 (像)**

写像 $f : X \to Y$ に対して、$X$ の要素すべてを $f$ で移し、それらの要素すべてを集めた集合を**写像 $f$ の像** (image) といい、$f(X)$ や $\mathrm{Im} f$ で表す。すなわち、

$$f(X) = \mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$$

である。

例 **1.2.12.** 2 つの集合 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ に対して、写像 $f : X \to Y$ を

$$f : x \mapsto |x|$$

で定める。このとき、$f(-1) = 1, f(0) = 0, f(1) = 1$ であるので、

$$f(X) = \{0, 1\}$$

である。

♣ **補足**　写像 $f : X \to Y$ は、あきらかに $f(X) \subset Y$ である。

### 1.2.5　全射、単射、全単射

**定義 (全射)**

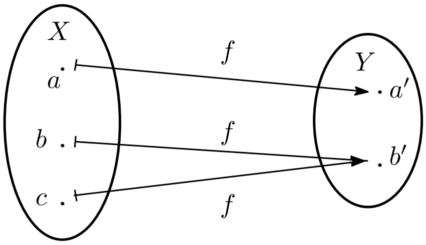
写像 $f : X \to Y$ が次の性質をもつとき、**全射**あるいは**上への写像**という。

任意の $y \in Y$ に対応している $x \in X$ が必ず存在する。

言い換えれば

$$\mathrm{Im}\ f = Y \text{ または } f(X) = Y$$

である。



**定義 (単射)**

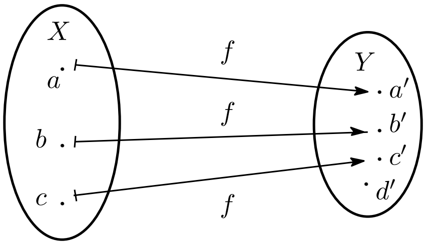
写像 $f : X \to Y$ が次の性質をもつとき、**単射**あるいは **1 対 1 写像**という。

$$1 \text{ つの } y \in Y \text{ に対応する } x \in X \text{ は高々 } 1 \text{ つしかない。}$$

言い換えれば

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

である。




**定義 (全単射)**

写像 $f : X \to Y$ が全射かつ単射のとき、$f$ を**全単射**あるいは **1 対 1 上への写像**という。

例 **1.2.13.** 写像 $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_1 : x \mapsto 3x + 1$$

で定める。このとき、$f_1$ は全単射である。

例 **1.2.14.** 写像 $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f_2 : (x, y) \mapsto x + y$$

で定める。このとき、$f_2$ は全射であるが単射ではない。

実際、$(1, 1)$ も $(2, 0)$ も $f_2$ で移すと 2 に移る。異なる要素が移った先で同じ要素となっている。

例 **1.2.15.** 写像 $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ を

$$f_3 : x \mapsto (x, 2x)$$

で定める。このとき、$f_3$ は単射であるが、全射ではない。例えば、$\mathbb{N}^2 \ni (1, 1)$ を考えると、この要素に $f_3$ で移ってくるものはない。

**例 1.2.16.** 写像 $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f_4 : x \mapsto x^2$$

で定める。このとき、$f_4$ は全射でも単射でもない。

例えば、1 も $-1$ も $f_4$ で移すと 1 であるので、単射でない。また、$-1$ に $f_4$ で移ってくる要素は $\mathbb{R}$ の中にない。

♣ **補足** 例 1.2.4. の $X = \{$ リンゴ, ミカン, バナナ $\}$, $Y = \{100$ 円, 150 円, 200 円 $\}$ に対し、"値段を付ける" という規則は全部で 27 通りある。

そのなかで、全単射となる規則の付けたは 6 通りしかない。

♠ **注意!** 全射, 単射 を議論するとき、定義域と値域が重要である!

**例 1.2.17.** 写像 $f : x \mapsto x^2$ は 全射であるか、単射であるか答えよ。

............. 解らない。

**例 1.2.18.** 写像 $f$ の規則を

$$f : x \mapsto x^2$$

とする。また、$\mathbb{R}_{\geqq 0} = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geqq 0\}$ とすると、以下が言える。

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とすると、$f$ は全射でも単射でもない。

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ とすると、$f$ は全射であるが単射でない。

(3) $f : \mathbb{R}_{\geqq 0} \to \mathbb{R}$ とすると、$f$ は単射であるが全射でない。

(4) $f : \mathbb{R}_{\geqq 0} \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$ とすると、$f$ は全単射である。

**発展問題 D.** 写像 $f$ の規則を

$$f : x \mapsto \sin(x)$$

とする。このとき以下の問いに答えよ。

ただし、答えは一通りではないので、当てはまるものを 1 組ずつ答えればよい。

(1) $f$ が単射でなく全射となるように $f$ の定義域と値域を定めよ。

(2) $f$ が全射でなく単射となるように $f$ の定義域と値域を定めよ。

(3) $f$ が全単射となるように $f$ の定義域と値域を定めよ。

(4) $f$ が全射でも単射でもないように $f$ の定義域と値域を定めよ。

### 1.2.6 合成写像, 恒等写像

**定義 (合成写像)**

2 つの写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が

$$f \ : \ x \mapsto x', \quad g \ : \ x' \mapsto x''$$

であるとき、$x$ を $x''$ に移す写像を$f$ と $g$ の**合成写像**といい、$g \circ f$ とかく。すなわち、

$$g \circ f \ : \ X \to Z, \quad g \circ f \ : \ x \mapsto x''$$

である。なお、$f \circ f$ を $f^2$ と表すこともある。

**例 1.2.19.** 2 つの写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がそれぞれ

$$f \ : \ x \mapsto 2x + 1, \quad g \ : \ x' \mapsto x'^2 - 2$$

の場合、まず $f$ で $x$ は $2x+1$ に移る。これを $x'$ と思えば、$x' = 2x+1$ は $g$ で $x'^2 - 2 = (2x+1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$ に移る。よって $g \circ f : x \mapsto 4x^2 + 4x - 1$ である。

このことから解るように、$g \circ f(x)$ は $g\left(f(x)\right)$ と表すことが出来る。

$$g\left(f(x)\right) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1$$

♠ **注意!** $f$,$g$ の順序と $g \circ f$ の順序に注意。

一般的に、$g \circ f \neq f \circ g$ である。例 4-6. で $g \circ f(1), f \circ g(1)$ をそれぞれ計算してみると、

$$g \circ f(1) = g(3) = 7, f \circ g(1) = f(-1) = -1$$

であり、$g \circ f(1) \neq f \circ g(1)$ である。ちなみに、

$$f\left(g(x)\right) = f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 3.$$

**定義 (恒等写像)**

集合 $X$ に対して、$X$ の各要素を自分自身に移す写像を**恒等写像 (恒等変換)** といい、$\mathrm{id}_X$ または単に id で表す。 すなわち、

$$\mathrm{id}_X \ : \ X \to X, \quad \mathrm{id}_X(a) = a, \quad for \ \forall a \in X$$

である。

**例 1.2.20.** 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f : x \mapsto x$ で定めると、$f$ は恒等写像、すなわち $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ である。

### 1.2.7　逆写像

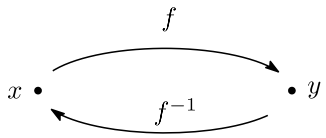
**定義 (逆写像)**

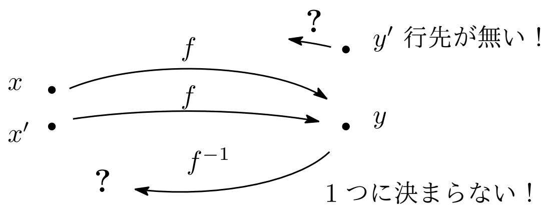
2 つの写像 $f : X \to Y, g : Y \to X$ が、

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \text{ かつ } f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

を満たすとき、$g$ を $f$ の**逆写像** (反対に $f$ を $g$ の**逆写像**) という。$g$ が $f$ の逆写像であるとき、$g = f^{-1}$ で表す。($f = g^{-1}$ でもある。)

♣ **補足**　任意の写像が逆写像を持つわけではない。写像 $f$ が逆写像をもつためには、$f$ が全単射でなければならない。細かい証明は省くが、下の図をみると解りやすいと思う。




**例 1.2.21.** 写像 $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_1 : x \mapsto 3x + 1$ で定めると、$f_1$ は全単射であった。

逆変換を求めるために、まず $3x + 1 = y$ として、$x$ について解いてみると、$x = \dfrac{y-1}{3}$ となる。よって、$f_1^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{3}$ である。

が、写像の変数は $x$ を使うのが慣例なので、$f_1^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$ と書き直すことが多い。

**例 1.2.22.** 例 1.2.18 において、(4) のときのみ逆写像が存在し、$f^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$ となる。

**例 1.2.23.** 平面上の点を $x$ 軸方向に 1 移動し、$y$ 軸方向に $-3$ 平行移動させると、この移動は写像 (変換) になる。すなわち、

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f : (x, y) \mapsto (x + 1, y - 3)$$

であり、この写像 (変換) は全単射である (証明は各自に委ねる)。よって、逆写像が存在する。$f$ で $(x, y)$ が移された先の要素を $(x', y')$ とする。すなわち、$(x', y') = f(x, y) = (x + 1, y - 3)$ である。これより、

$$x' = x + 1, y' = y - 3 \Longrightarrow x = x' - 1, y = y' + 3$$

となるので、$f$ の逆写像は

$$f^{-1} : (x, y) \mapsto (x - 1, y + 3)$$

となる。( $x', y'$ の ’ は取り除いている。)

### 1.2.8 演習問題 II

**問題 1.2.1.** $X = \{$ カレー, ラーメン, うどん $\}$, $Y = \{300$ 円, $400$ 円 $\}$ とする。このとき、考えられる”値段を付ける”という規則 $f : X \to Y$ を全て答えよ。(全 8 通り)

例) $f$(カレー) $= 300$ 円、$f$(ラーメン) $= 300$ 円、$f$(うどん) $= 400$ 円

**問題 1.2.2.** 以下の問いに答えよ。

(1) $f_1 \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f_1(x) = 2x$ に対して、$f_1(1),\ f_1(-2)$ を求めよ。

(2) $f_2 \ : \ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2,\ \ f_2(x) = (x, 2x)$ に対して、$f_2(2),\ f_2(-4)$ を求めよ。

(3) $f_3 \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ f_3((x,y)) = x^2 - y$ に対して、$f_3((-2,5)),\ f_3((2,-5))$ を求めよ。

(4) $f_4 \ : \ \mathbb{R}^2 \to [0,\infty),\ \ f_4((x,y)) = x^2 + y^2$ に対して、$f_4((0,0)),\ f_4((2,-3))$ を求めよ。

**問題 1.2.3.** 以下の写像 $f$ に対して、それぞれ $f$ の像 $\mathrm{Im}\ f$ を求めよ。

(1) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ \ f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f : x \mapsto x^2 - 1$

(3) $f : [1,\infty) \to \mathbb{R},\ \ f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

**問題 1.2.4.** 写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ とし、2 つの集合 $X,\ Y$ を $X = \{-1,0,1\}$, $Y = \{-1,0,1,2\}$ とする。このとき、$Z = \{\ (x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ に対して $f(Z)$ を記せ。

すなわち、$Z$ に対して、$\{f(a) \mid a \in Z\}$ を、<u>要素を全て書く方法</u>で記せ。

**問題 1.2.5.** 以下の集合 $X_i$ と写像 $f_i : X_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1,2,\ldots,8)$ に対して、$f_i(X_i)$ を区間 または 区間の和で表せ。

例) $X_0 = (-3,2]$, $f_0 : x \mapsto x^2 - 1$ のとき、$f_0(X_0) = [-1,8)$ である。

(1) $X_1 = [-6,5]$, $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$

(2) $X_2 = (-1,6]$, $f_2 : x \mapsto x^2 - 1$

(3) $X_3 = [-3,3]$, $f_3 : x \mapsto x^3 + 1$

(4) $X_4 = [-1,5)$, $f_4 : x \mapsto x^3 + 1$

(5) $X_5 = (-3,5)$, $f_5 : x \mapsto x^3 + 1$

(6) $X_6 = (-\infty,-3] \cup [5,\infty)$, $f_6 : x \mapsto x^2 - 1$

(7) $X_7 = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, $f_7 : x \mapsto x^3 + 1$

(8) $X_8 = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ , $f_8 : x \mapsto x^3 - x$

**問題 1.2.6.** 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f(x)=2x-1$, 写像 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x)=x^2+3x-4$ で定めるとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f(1)$、$f(-2)$、$g(1)$、$g(-2)$ を求めよ。

(2) 写像 $f$ は、全射か否か答えよ。また、単射か否か答えよ。

(3) 写像 $g$ は、全射か否か答えよ。また、単射か否か答えよ。

(4) 合成写像 $f\circ g(1)$ および、$g\circ f(1)$ を求めよ。

(5) 合成写像 $f\circ g(x)$ および、$g\circ f(x)$ を求めよ。

(6) 合成写像 $f\circ g(x)$ および、$g\circ f(x)$ は、全射か否か答えよ。また、単射か否か答えよ。

**問題 1.2.7.** 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$, が、以下の (1)〜(4) となる例をそれぞれ 1 つ $(a,b,c,d$ を) 考えよ。(存在しない場合もあるかもしれない)

(1) 全射でも単射でもない　(2) 単射でなく全射になる

(3) 全射でなく単射になる　(4) 全単射になる

**問題 1.2.8.** 集合 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{1,2\}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) $X$ から $Y$ への全射 $f$ を全て求めよ。（ヒント：全部で 6 通りある。）

(2) $X$ から $Y$ への単射は存在しないことを示せ。

**問題 1.2.9.** $Z=\{1,2,3,4\}$ から $Z$ への次の写像 $f$, $g$ を次のように定める。

写像 $f$: $f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=4,\ f(4)=1.$

写像 $g$: $g(1)=2,\ g(2)=3,\ g(3)=1,\ g(4)=4.$

(1) $f$, $g$ はそれぞれ単射かどうか判定せよ。

(2) $f$, $g$ はそれぞれ全射かどうか判定せよ。

**問題 1.2.10.** 集合 $X,Y$ を $X=\{0,1,2,3\}$, $Y=\{4,5,6,7\}$ とし、写像 $f$, $g$ を次のように定める。

写像 $f:X\to Y,\ f(0)=7,\ f(1)=4,\ f(2)=5,\ f(3)=6.$

写像 $g:Y\to X,\ g(x)=|x-6|.$

このとき次の設問に答えよ。

(1) 写像 $f$, $g$ について、全射と単射の判定をせよ。

(2) $g\circ f(1)$, $f\circ g(7)$ を求めよ。

(3) 合成写像 $g\circ f(x)$ に対して、$g\circ f(X)$ を求め、全射と単射の判定をせよ。

**問題 1.2.11.** 写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $f:x\mapsto x^3+ax^2+bx+c$ で定める。任意の $a,b,c\in\mathbb{R}$ において、$f$ は全射であることをしめせ。また、$f$ が単射となるための $a,b,c$ の条件を答えよ。

### 1.2.9　演習問題 II の略解

**略解 1.2.1.** 1) $f$(カレー) $= 300$ 円、$f$(ラーメン) $= 300$ 円、$f$(うどん) $= 300$ 円

2) $f$(カレー) $= 300$ 円、$f$(ラーメン) $= 300$ 円、$f$(うどん) $= 400$ 円

3) $f$(カレー) $= 300$ 円、$f$(ラーメン) $= 400$ 円、$f$(うどん) $= 300$ 円

4) $f$(カレー) $= 400$ 円、$f$(ラーメン) $= 300$ 円、$f$(うどん) $= 300$ 円

5) $f$(カレー) $= 300$ 円、$f$(ラーメン) $= 400$ 円、$f$(うどん) $= 400$ 円

6) $f$(カレー) $= 400$ 円、$f$(ラーメン) $= 400$ 円、$f$(うどん) $= 300$ 円

7) $f$(カレー) $= 400$ 円、$f$(ラーメン) $= 300$ 円、$f$(うどん) $= 400$ 円

8) $f$(カレー) $= 400$ 円、$f$(ラーメン) $= 400$ 円、$f$(うどん) $= 400$ 円

**略解 1.2.2.** (1) $f_1(1) = 2,\ f_1(-2) = -4.$　(2) $f_2(2) = (2,4),\ f_2(-4) = (-4,-8).$

(3) $f_3((-2,5)) = -1,\ f_3((2,-5)) = 9.$　(4) $f_4((0,0)) = 0,\ f_4((2,-3)) = 13.$

**略解 1.2.3.** 写像の像は、集合であることに注意する。

(1) $\mathrm{Im}\ f = \{-1,1\}$　(2) $\mathrm{Im}\ f = \{a \in \mathbb{R} \mid -1 \leqq a\} = [-1,\infty)$

(3) $\mathrm{Im}\ f = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 < a \leqq 1\} = (0,1]$

**略解 1.2.4.** まず、$Z$ を全て書き表して考えてみる。

$$Z = \{(-1,-1),(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,-1),\\ (0,0),(0,1),(0,2),(1,-1),(1,0),(1,1),(1,2)\}$$

よって、$f(Z) = \left\{0,1,\sqrt{2},2,\sqrt{5}\right\}$ である。

**略解 1.2.5.** (1) $f_1(X_1) = [-1,35]$　(2) $f_2(X_2) = [-1,35]$

(3) $f_3(X_3) = [-26,28]$　(4) $f_4(X_4) = [0,126)$

(5) $f_5(X_5) = (-26,126)$　(6) $f_6(X_6) = [8,\infty)$

(7) $f_7(X_7) = (-\infty,0) \cup (2,\infty)$　(8) $f_8(X_8) = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$

**略解 1.2.6.** (1) $f(1) = 1,\ f(-2) = -5,\ g(1) = 0,\ g(-2) = -6$

(2) 全射かつ単射　(3) 全射でも単射でもない。

(4) $f \circ g(1) = f(g(1)) = f(0) = -1$、$g \circ f(1) = g(f(1)) = g(1) = 0$

(5) $f \circ g(x) = f(x^2+3x-4) = 2(x^2+3x-4)-1 = 2x^2+6x-9$

$g \circ f(x) = g(2x-1) = (2x-1)^2+3(2x-1)-4 = 4x^2-4x+1+6x-3-4 = 4x^2+2x-6$

(6) $f \circ g(x)$ と $g \circ f(x)$ のどちらも、全射でも単射でもない。

($\because$) 定義域、値域、(3) より明らか。

**略解 1.2.7.** (1) $f(x) = x^2$ など。　(2) $f(x) = x^3 - x$ など。　(3) 存在しない。(4)$f(x) = x$ など。

**略解 1.2.8.** (1)

$f_1$: $f_1(1) = 2,\ f_1(2) = 1,\ f_1(3) = 1.$　　$f_2$: $f_2(1) = 1,\ f_2(2) = 2,\ f_2(3) = 1.$

$f_3$: $f_3(1) = 1,\ f_3(2) = 1,\ f_3(3) = 2.$　　$f_4$: $f_4(1) = 1,\ f_4(2) = 2,\ f_4(3) = 2.$

$f_5$: $f_5(1) = 2,\ f_5(2) = 1,\ f_5(3) = 2.$　　$f_6$: $f_6(1) = 2,\ f_6(2) = 2,\ f_6(3) = 1.$

(2) ($X$ の要素の個数) $>$ ($Y$ の要素の個数) なので、$f(x) = f(x')$ となる $x \neq x'$ が必ず存在する。

**略解 1.2.9.** (1) $f$ は単射ではない。（理由：$2 \neq 3$ なのに $f(2) = 4 = f(3)$ だから、4 は二つ以上の矢印の行き先になっている。）$g$ は単射。

(2) $f$ は全射ではない。（理由：3 が写像 $f$ の矢印の行き先になっていない。）$g$ は全射。

**略解 1.2.10.** (1) $f$ は全射であり単射でもある (全単射)。$g$ は全射でも単射でもない。

(2) $g \circ f(1) = g(4) = 2,\quad f \circ g(7) = f(1) = 4$

(3) $g \circ f(X) = \{0, 1, 2\}$　全射でも単射でもない。

**略解 1.2.11.** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ であるから、$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ である。また、$f'(x) = 0$ の判別式は $D/4 = a^2 - 3b$ である。

よって、増減表は $a^2 < 3b,\ a^2 = 3b,\ a^2 > 3b$ の場合で

| $x$ | $\cdots$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ |

,

| $x$ | $\cdots$ | $x_0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

,

| $x$ | $\cdots$ | $x_0$ | $\cdots$ | $x_1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

となる。また、$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ で、$f(x)$ は連続関数であるから、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $y = f(x)$ は $y = a$ と交点を持つ。よって、$f$ は全射である。

上記の考察より、単射となるのは $a^2 \leqq 3b$ のときである。($c$ は任意)

**発展問題 E.** $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ とするとき、(1)〜(5) が正しければ証明を、正しくない場合は反例を答えよ。

(1) $g \circ f$ が単射ならば、$g$ も $f$ も単射である。

(2) $f$ も $g$ も単射ならば、$g \circ f$ は単射である。

(3) $g \circ f$ が全射ならば、$g$ も $f$ も全射である。

(4) $f$ も $g$ も全射ならば、$g \circ f$ は全射である。

(5) $g$ が単射で、$f$ が全射ならば、$g \circ f$ は全単射である。

**発展問題 F.** 以下を示せ。ただし、$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},\ \mathbb{Q}_+ := \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$ とする。

(1) $X$ から $Y$ への全射が存在するならば、$Y$ から $X$ への単射が存在する。

(2) $\mathbb{N}_0^2$ から $\mathbb{N}_0$ への全単射が存在する。

(3) $\mathbb{N}_0$ から $\mathbb{Z}$ への全単射が存在する。

(4) $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Q}_+$ への全単射が存在する。

(5) $\mathbb{N}_0^2$ から $\mathbb{Q}$ への全単射が存在する。

# 第2章

# 行列

## 2.1 行列の演算

### 2.1.1 行列とは

**定義 (行列)**

下のように”数”を正方形 (長方形) の形に並べ、丸カッコ ( と ) 又は 角カッコ [ と ] で囲んだものを**行列**という。また、並べた各数を、その行列の**成分**という。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},\ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

行列を表す記号は、**大文字**のアルファベットを使うことが多い。

例 **2.1.1.** 例えば、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

のように用いる。

**定義 (行と列)**

行列の成分の横の並びを**行**、たての並びを**列**という。
行は上から順に、第 1 行, 第 2 行,.... といい、列は左から順に第 1 列, 第 2 列,.... という。
第 $m$ 行までと 第 $n$ 列まである行列を、$m$ **行** $n$ **列の行列**、$m \times n$ **行列**、$(m, n)$ **行列**などという。

例 **2.1.2.** 例 2.1.1 の行列 $A$ の第 1 行は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ で、第 2 列は $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。

例 **2.1.3.** 例 2.1.1 の行列 $A$ は 2 行 2 列の行列、行列 $C$ は 2 行 3 列の行列である。

♠ **注意!**　行列の行を**行ベクトル (横ベクトル)**、列を**列ベクトル (縦ベクトル)** と言うこともある。逆に、行ベクトルや列ベクトルも行列の 1 種である。

♠ **余談**　行ベクトルは $(a\ b)$ や $(a\ b\ c)$ と表す。しかし、後に出てくるベクトルは $(a, b)$ と表すことになる。したがって、$(a\ b)$ や $(a\ b\ c)$ をベクトルと呼ぶことに抵抗があるかもしれないが、演算等で不都合が出ないため、気にせず使ってもらいたい。

### 2.1.2　正方行列と対角成分

**$(i, j)$ 成分**

行列の第 $i$ 行、第 $j$ 列の交点にある成分を **$i$ 行 $j$ 列成分** または **$(i, j)$ 成分**という。

例 2.1.1 の 行列 $A$ の (2,1) 成分は 3 であり、行列 $C$ の $(2, 3)$ 成分は $f$ である。

**正方行列**

一般の行列は、行の数と列の数は同じではないが、ここでは行と列の数が同じものを扱う。行の数と列の数が同じ $n$ の行列を **$n$ 次正方行列**という。

**対角成分**

正方行列の 1 行 1 列成分、2 行 2 列成分、3 行 3 列成分, ... を、その正方行列の**対角成分**という。

例 2.1.1 の行列 $A$ は 2 次正方行列、行列 $B$ は 3 次正方行列である。

例えば、” 行列 $A$ の対角成分の和を求めよ。” と言われたら、$-1 + 2 = 1$ である。

### 2.1.3　行列の相等

**定義 (行列の相等)**

行列 $A$ と $B$ は、それぞれの行数, それぞれの列数が同じなら、**同じ形の行列**という。同じ形の行列 $A$ と $B$ において、$A$ の $(i, j)$ 成分と $B$ の $(i, j)$ 成分が、それぞれすべて等しいとき $A$ と $B$ は等しいといい、$A = B$ で表す。

例 **2.1.4.** それぞれ対応する $(i, j)$ 成分が全て等しい場合、行列として等しい。

$$\begin{pmatrix} 4/2 & 3/2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1.5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 & 1.5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

### 2.1.4　行列の和、差、定数倍

行列の演算として、行列の和、行列の定数倍を定義し、行列の差を定義する。

和や差は同じ形の行列に対して定義することができ、それらは 2 次正方行列の場合と同様に定義することができる。したがって、行列の和、差、定数倍の定義は 2 次正方行列の場合で行う。

**定義 (行列の和)**

2 つの 2 次正方行列 $A$ と $B$ に対して、行列の和 $A+B$ を

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で定義する。

★ 行列 $A$ と行列 $B$ の $(i,j)$ 成分を足して、結果の行列の $(i,j)$ 成分とする。

2 次正方行列と 2 次正方行列の和は **2 次正方行列**となる。

例 **2.1.5.** 2 次正方行列の和

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 次正方行列以外も同様に (上の定義の★で) 定義でき、和を求めることが可能である。

例 **2.1.6.** 3 次正方行列の和、2 行 3 列の行列の和

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f & g \\ i & h & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f & c+g \\ b+i & c+h & a+j \end{pmatrix}.$$

例 **2.1.7.** 同じ形でない行列では演算出来ない。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \times$$

**定義 (行列の定数倍)**

実数 $k$ に対して、2 次正方行列 $A$ を $k$ 倍した行列 $kA$ を次で定義する。

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

例 **2.1.8.**

$$3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

♣ **補足**　行列 $A$ の $-1$ 倍、$(-1)A$ を $-A$ と書く。

行列の和と定数倍を定義することによって、行列の差が簡単に定義される。

**定義 (行列の差)**

同じ形の行列 $A$ と $B$ に対して、行列の差 $A-B$ を次で定義する。

$$A - B = A + (-1)B$$

例 **2.1.9.** 2 次正方行列の差

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の和、定数倍に関して次の計算法則が成り立つ。

**行列の計算法則**

$A, B, C$ を同じ形の行列とし、$k, l$ を実数とするとき以下が成り立つ。

(i) $A + B = B + A$　(行列の和の交換法則)

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$　(行列の和の結合法則)

(iii) $k(A + B) = kA + kB$　(行列の定数倍の行列に関する分配法則)

(iv) $(k + l)A = kA + lA$　(行列の定数倍の定数に関する分配法則)

(v) $(kl)A = k(lA)$　(行列の定数倍の結合法則)

この他にも、同じ形の行列 $A, B, C$ と実数 $k(\neq 0)$ に対して、

$$A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$$

$$A = B \Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A = B \Leftrightarrow kA = kB$$

などもなりたつ。

### 2.1.5　演習問題 III

**問題 2.1.1.** 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。

(1) $A$ は何行何列の行列か。

(2) $A$ の (2,1) 成分は何か。

(3) $A$ の (2,2) 成分は何か。

(4) $A$ の第 2 行をベクトルの形で答えよ。

(5) $A$ の第 1 列をベクトルの形で答えよ。

**問題 2.1.2.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。

(1) $A$ の (3,2) 成分は何か。

(2) $A$ の (1,3) 成分は何か。

(3) $A$ の第 2 行をベクトルの形で答えよ。

(4) $A$ の第 3 列をベクトルの形で答えよ。

(5) $A$ の対角成分の和を求めよ。

**問題 2.1.3.** 以下の行列の計算をせよ (1 つの行列で表せ)。

(1) $3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$　(5) $2\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 3/2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 10 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\left\{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$　(9) $\frac{1}{5}\left\{0.5\begin{pmatrix} 50 & 100 \\ -50 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

(10) $1.3\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 0.5\left\{3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}\right\}$

**問題 2.1.4.** 以下の行列 $A, B, O$ に対して、(1)〜(3) に答えよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ y-2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} z & x+2y \\ w & xz \end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $3A - B = O$ を満たす $w, x, y, z$ を求めよ。

(2) $A - 2B = O$ を満たす $w, x, y, z$ を求めよ。

(3) $A + B = O$ を満たす $w, x, y, z$ を求めよ。

**問題 2.1.5.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ に対して、

$$\begin{cases} 3X + 2Y &= A \\ 2X - Y &= B \end{cases}$$

が成り立つとき、2 次正方行列 $X, Y$ を求めよ。

**発展問題 G.** 1 次変数 $x, y, z, w$ に対して、行列の式

$$x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 26 & 37 \end{pmatrix}$$

が成り立つとき、$x, y, z, w$ を求めよ。

（今後、このような方程式を 4 次正方行列を用いて解く方法を学ぶ。教科書 110p)

**発展問題 H.** 以下の行列の計算をせよ。

(1) $3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 4 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

(4) $2\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(5) $3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{6} \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & \frac{1}{12} \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} n \cdot 2^{n-1} & \frac{1}{n(n+1)} \\ (-1)^n & n^2 - n + 1 \end{pmatrix}$

### 2.1.6 演習問題 III の略解

**略解 2.1.1.** (1) 2 行 2 列 または 行数が 2 で列数が 2 など。

(2) 2 (3) 1 (4) $(2\ \ 1)$ または $(2,\ 1)$ (5) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

[[(5) は列を聞かれているので、列ベクトルで書くこと。]]

**略解 2.1.2.** (1) $-1$ (2) $-2$ (3) $(2\ \ 4\ \ 0)$ または $(2,\ 4,\ 0)$ (4) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

(5) $1+4+6=11.$

**略解 2.1.3.** (1) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 15 \\ -12 & 32 & -4 \\ 16 & -1 & 15 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} -19 & 6 \\ 1 & -14 \end{pmatrix}$ (9) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.8 & -0.6 \\ -0.6 & -3 \end{pmatrix}$

**略解 2.1.4.** (1) $3\begin{pmatrix} 1 & 2x \\ y-2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & x+2y \\ w & xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の対応する各成分を抜き出すと、

$$\begin{cases} 3-z=0, & 6x-x-2y=0, \\ 3y-6-w=0, & 6-xz=0 \end{cases}$$

である。後は連立方程式を解いていくと、$w=9, x=2, y=5, z=3$ である。

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2x \\ y-2 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} z & x+2y \\ w & xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ より、

$$\begin{cases} 1-2z=0, & 2x-2x-4y=0, \\ y-2-2w=0, & 2-2xz=0 \end{cases}$$

である。後は連立方程式を解いていくと、$w=-1, x=2, y=0, z=\dfrac{1}{2}$ である。

(3) 同様に計算すると、$w=5, x=2, y=-3, z=-1$ である。

**略解 2.1.5.** 行列の計算法則を使うと $X=\dfrac{1}{7}(A+2B), Y=\dfrac{1}{7}(2A-3B)$ となり、これに $A$,$B$ を代入すると $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。

## 2.2　行列の積

行列の積については、同じ形の行列同士でも積が定義できない場合がある。ここでは、2 次正方行列, 3 次正方行列に限って定義を行う。

**定義 (行列の積)**

2 つの 2 次正方行列 $A$ と $B$ に対して行列の積 $AB$ を次で定義する。

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

積の結果も 2 次正方行列であることに注意。$A = B$ なら $AA = A^2$ である。

**覚え方** まず、行列 $A$ と $B$ を**行**と**列**で別けて考える。

$$AB = \left(\begin{array}{|cc|}\hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}\right) \left(\begin{array}{|c|c|}\hline b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline \end{array}\right)$$

行列 $A$ の第 1 行と行列 $B$ の第 1 列を順に掛けたものを足して、結果の $(1,1)$ 成分に書く。
行列 $A$ の第 1 行と行列 $B$ の第 2 列を順に掛けたものを足して、結果の $(1,2)$ 成分に書く。
行列 $A$ の第 2 行と行列 $B$ の第 1 列を順に掛けたものを足して、結果の $(2,1)$ 成分に書く。
行列 $A$ の第 2 行と行列 $B$ の第 2 列を順に掛けたものを足して、結果の $(2,2)$ 成分に書く。

**例 2.2.1.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ のとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

♣ 補足 (ベクトルと行列の積)

行列の積の覚え方によって、行列とベクトル、ベクトルと行列の積も定義できる。

$$\left(\begin{array}{|cc|}\hline a_1 & a_2 \\ \hline \end{array}\right) \left(\begin{array}{|c|c|}\hline b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \hline \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_1 b_{11} + a_2 b_{21} & a_1 b_{12} + a_2 b_{22} \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{|cc|}\hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}\right) \left(\begin{array}{|c|}\hline b_1 \\ b_2 \\ \hline \end{array}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

**例 2.2.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ のとき、

$$A\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y \\ 3 \cdot x + 4 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

である。

♡ **point**　2 次正方行列の積が解れば、3 次正方行列の場合も簡単!!

**定義 (行列の積)**

2 つの 3 次正方行列 $A$ と $B$ に対して行列の積 $AB$ を次で定義する。

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

ただし、$c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$ である。

積 $AB$ の $(i,j)$ 成分 $c_{ij}$ は、行列 $A$ の第 $i$ 行 $(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3})$ と行列 $B$ の第 $j$ 列 $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{pmatrix}$ を順に掛けたものを足したものである。例えば、上の $c_{12}$ は、$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$ である。

定義内にある $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$ という記号に慣れない人もいると思う。しかし、単純なもので順に数を代入して考えればよい。上記の $c_{12}$ なら $i = 1, j = 2$ であり、$c_{12} = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2}$ である。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{3}$ は $k$ を 1 から 3 まで動かして和をとることなので、上の結果となる。

◇ **発展**　では正方行列でない行列の場合はどうなるか？　こちらは少し注意が必要で、同じ形の行列同士でも積が**定義出来ない**ことがある。詳しくは線型代数学と演習 II の講義で扱う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = ?, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = ?$$

♠ 注意!　行列の積は和と違って、$AB = BA$ とならない事がある！

**例 2.2.3.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり、 $AB \neq BA$ の例である。

したがって、$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ と出来ないことに注意が必要である。実際は、$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ である。

**発展問題 I.** 行列 $A, B$ をそれぞれ以下とするとき、行列の積 $AB$ と $BA$ を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3　零行列, 単位行列

実数の和、積でも特別な数として 0 と 1 がある。行列にも特別な行列がある。

**定義 (零行列)**

すべての成分が 0 の正方行列を**零行列**といい、$O$(オー) で表す。

**定義 (単位行列)**

対角成分がすべて 1 で、残りの成分すべてが 0 の正方行列を**単位行列**といい、$E$ で表す。

**例 2.3.1.** 2 次正方行列の場合 (次数を正確に表す場合、$O_2$ や $E_2$ と書くこともある。)

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

♣ 補足 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を単位行列とは言わないが、$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を零行列と言い、$O_{3,2}$ や $O_{2,3}$ 書くこともある。

♠ 注意!

$AO = OA = O$ であるが、$A \neq O, B \neq O$ でも $AB = O$ となる場合がある。

例 **2.3.2.** $A \neq O, B \neq O$ でも $AB = O$ となる例.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このような計算で間違えることは無いが、証明問題等の途中で、

$(A+B)(A-B) = O$ より、$A = -B$ または、$A = B$ となるので、........ としないように、しっかりと覚えておくこと。

♡ **point**　この零行列, 単位行列は (実数の 0 や 1 と似た) 次の性質を持っている。

$$A + O = O + A = A,$$

$$A + (-1)A = (-1)A + A = O,$$

$$AE = EA = A$$

この性質を 2 次正方行列の場合で確認すると、以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 & b+0 \\ c+0 & d+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+(-a) & b+(-b) \\ c+(-c) & d+(-d) \end{pmatrix} = O$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

行列の積に関する計算法則として以下のもが成り立つ。

**行列の計算法則**

$A, B, C$ を 2 次 (または 3 次) 正方行列とし、$k$ を実数とするとき以下が成り立つ。

(i) $(AB)C = A(BC)$　(行列の積の結合法則)

(ii) $(A+B)C = AC + BC$,

　$C(A+B) = CA + CB$　(行列の分配法則)

(iii) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$　(定数と行列の積の結合法則)

(i) より、$A(BC)$ や $(AB)C$ のカッコを省略しても問題ない。よって、4 つ以上の積の場合もカッコは省略してよい。

また、同じ行列の積 $AA$ や $AAA$ を $A^2$ や $A^3$ のように書く。

再度注意しておくが、$AB \neq BA$ である。計算法則に $AB = BA$ (可換法則) はない。

### 2.3.1　演習問題 IV

**問題 2.3.1.** 以下の行列の計算をせよ。

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$　(6) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 30 \\ 0 & -10 & 0 \\ 10 & 20 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 15 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2}$　(10) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{4}$　(11) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{8}$　(12) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{2023}$

**問題 2.3.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす $x$, $y$ を求めよ。

**問題 2.3.3.** 以下の問いに答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & -2 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ のとき、$AB = O$ が成り立つような $x$, $y$ の値を求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & 4 \end{pmatrix}$ のとき、$AB = BA$ となるように $a$, $b$ の値を求めよ。

### 2.3.2 演習問題 IV の略解

**略解 2.3.1.**

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$ (7) $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 200 & 300 & 0 \\ 0 & 50 & 0 \\ 0 & -200 & 200 \end{pmatrix}$

(9) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (11) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (12) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

♣ **補足** (5) 2 乗すると単位行列になる。 $A^{100} = (A^2)^{50} = E^{50} = E.$ (8) は (7) の 50 倍. (10) は (9) の 2 乗で、(11) は (10) の 2 乗である。

(12) (9) と (11) が同じ (2 乗と 8 乗が同じ) なので、6 乗を計算すると単位行列になっている。$2023 = 6 \times 337 + 1$ より、2023 乗は 1 乗と同じ行列となる。

**略解 2.3.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y & x+xy \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ が } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ に一致}$$

$$\Leftrightarrow x+y=0 \text{ かつ } x+xy=0$$
$$\Leftrightarrow (x,y)=(0,0) \text{ または } (x,y)=(1,-1).$$

**略解 2.3.3.** (1) $AB = \begin{pmatrix} 2x-2 & -4+y \\ 4x-4 & -8+2y \end{pmatrix}$ である。よって、$AB = O \Leftrightarrow (x,y) = (1,4).$

(2) それぞれの積を実際に計算すると、

$$AB = \begin{pmatrix} 2-2b & a-8 \\ 6-b & 3a-4 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2+3a & -4-a \\ b+12 & -2b-4 \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$AB = BA \Leftrightarrow 2 \text{ つの行列 } AB, BA \text{ の各成分が一致}$$
$$\Leftrightarrow a=2,\ b=-3.$$

# 2.4　名前の付いた行列

## 2.4.1　行列の方程式

行列に対しても、方程式を考えることが出来る。

**例題 2.4.1.** 行列 $A, B$ を以下とするとき、$2X+3A=B$ を満たす $2\times 2$ 行列 $X$ を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

**解）.** 行列の和の定義から、等式の両辺に同じ行列を加えても等式は成り立つ。従って、

$$2X+3A=B$$

の両辺に行列 $-3A$ を加えると

$$2X=-3A+B$$

となる。また、両辺を $\frac{1}{2}$ 倍すれば、

$$X=-\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}B$$

を得る。あとは、この式に $A$,$B$ を代入して計算すると行列 $X$ が得られる。

$$X=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2} & -3+1\\ -\frac{9}{2}+\frac{3}{2} & -6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -3\end{pmatrix}$$

である。

**例題 2.4.2.** 行列 $A, B$ を以下とするとき、方程式 $AX=B$ を満たす $2\times 2$ 行列 $X$ を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$$

もし、$\underline{A'A=E\ \text{となる行列}\ A'\ \text{が存在する}}$ ならば、$AX=B$ の両辺に左から $A'$ を掛けると、

$$AX=B \quad\Rightarrow\quad A'AX=A'B \quad\Rightarrow\quad X=A'B$$

となるので、$X$ を求めることが出来る。

### 2.4.2　逆行列

**定義 (逆行列)**

(2 次以上の) 正方行列 $A$ に対し、性質 $AA' = E, A'A = E$ を満たす行列 $A'$ を、$A$ の**逆行列**といい、$A^{-1}$ で表す。ただし、逆行列は必ず存在するとは限らない。逆行列をもつ正方行列を、**正則行列**という。

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $ad - bc \neq 0$ のとき、逆行列 $A^{-1}$ は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

である。ここに現れる $ad-bc$ を $A$ **の行列式** (determinant) といい、$\det A$ や $|A|$ で表す。

$$\det A = |A| = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

実際に、この 2 次正方行列の逆行列 $A^{-1}$ は $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ を満たすことを確認!

♠ **注意!**　逆行列を $\dfrac{1}{A}$ と書いたり、2 乗を $A^{-2}$ と書いたりしない。$\left(A^{-1}\right)^2$ とかく。

♠ **注意!**　行列 $A$ の行列式の値が 0 となる、すなわち $ad - bc = 0$ となるとき

<u>行列 $A$ の逆行列は存在しない。</u>

**例 2.4.1.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ は逆行列をもつか。逆行列をもつ場合は、逆行列を求めよ。

まず、$\det A = 1\cdot 4 - 3\cdot 2 = -2 \neq 0$ より、行列 $A$ は逆行列をもつ。よって、

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。実際、

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

つぎに、$\det B = 1\cdot 6 - 2\cdot 3 = 0$ より、行列 $B$ は逆行列をもたない (正則行列ではない)。

例題 2.4.2 の答えは、以下の通り。

$$X = A'B = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

逆行列の性質

同じ次数の正則行列 $A$,$B$ に対して、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である。よって、正則行列と正則行列の積もまた正則行列となることがわかる。

**発展問題 J.** $A$, $B$ を各成分が全て整数の 2 次正方行列とし、さらに行列 $B$ は対称行列とする (対称行列の定義は次項)。それぞれの積が

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix},\ BA = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$$

であるとき、行列 $A$, $B$ を求めよ。

### 2.4.3　連立 1 次方程式の行列による記法

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}.$$

は行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る。

ここで、行列 $A$ とベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{b}$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

とおけば、この連立方程式は

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2.1}$$

と表すことができる。

このときの行列 $A$ をこの連立 1 次方程式の**係数行列** という。

♡ **point**　この係数行列が逆行列をもつならば、係数行列の逆行列を $A^{-1}$ を (2.1) の左からかけることによって、

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

となり、連立 1 次方程式の解が求められる。

**例 2.4.2.** 以下の連立 1 次方程式を解く。

$$(1)\ \left\{\begin{array}{r} x+2y=-1 \\ 3x+4y=-3 \end{array}\right., \qquad (2)\ \left\{\begin{array}{r} x+2y=-1 \\ 2x+4y=-3 \end{array}\right., \qquad (3)\ \left\{\begin{array}{r} x+2y=-1 \\ 2x+4y=-2 \end{array}\right.$$

例 2.4.1 より、行列 $A$ は逆行列があり、行列 $B$ は逆行列をもたない。

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

であったので、(1) の解ベクトルを $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、$x=-1, y=0$ が求まる。

一方、(2) の場合は解なしであり、(3) は不定形となり、実数の組 $(-2k-1, k)$ $(k \in \mathbb{R})$ で成り立つ。

### 2.4.4　転置行列

ある行列が与えられ、その行列に対して、ある操作を行ったものに名前の付いている行列 (転置行列) と、ある特徴をもった行列に名前の付いてる行列 (対称行列 等) がある。

**定義 (転置行列)**

行列 $A$ に対して、行の役割と列の役割を入れ替えて出来る行列を行列 $A$ の**転置行列**といい、${}^tA$ (または $A^T$) で表す。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad {}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

**例 2.4.3.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{pmatrix}$ に対して、それぞれの転置行列は、

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ {}^tB = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ {}^tC = \begin{pmatrix} o & r \\ p & s \\ q & t \end{pmatrix}$$

である。

一般に次が成り立つ。

**転置行列の性質**

同じ次数の正方行列 $A$,$B$ に対して、

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

である。

**逆行列の転置行列の性質**

正則行列 $A$ に対して、

$$^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

である。このことから、正則行列の転置行列も正則である。

### 2.4.5　対称行列, 交代行列, 三角行列, 対角行列, スカラー行列, 直交行列

**定義 (対称行列)**

正方行列 $A$ に対し、

$$^tA = A$$

となる行列を**対称行列**という。

♡ **point**　対称行列は、対角成分に対して右上側と左下側が対称になっている行列である。すなわち、$(i,j)$ 成分と $(j,i)$ 成分が等しい。

**定義 (交代行列)**

正方行列 $A$ に対し、

$$^tA = -A$$

となる行列を**交代行列**という。

♡ **point**　交代行列は、対角成分が必ず 0 である。

**定義 (上 (下) 三角行列)**

正方行列で、対角成分より下 (上) の成分が全て 0 の行列を**上 (下) 三角行列**という。

**定義 (対角行列)**

正方行列 $A$ が、上三角行列 かつ 下三角行列のとき、$A$ を**対角行列**という。すなわち、対角成分以外が全て 0 の行列である。

**定義 (スカラー行列)**

対角行列 $A$ の、対角成分がすべて同じ値のとき、$A$ を**スカラー行列**という。すなわち、$kE$ と表すことのできる行列である。

♡ **point**　単位行列、零行列は上三角行列、下三角行列、対角行列、スカラー行列のいずれでもある。

例 **2.4.4.** 次の行列 (1)〜(10) の中から 対称行列、交代行列、上 (下) 三角行列、対角行列、スカラー行列を答える。

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(6)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(i) 対称行列は (2), (3), (6), (8), (9), (10).

(ii) 交代行列は (4), (6).

(iii) 上三角行列は (3), (5), (6), (10).

(iv) 下三角行列は (3), (6), (7), (10).

(v) 対角行列は (3), (6), (10).

(vi) スカラー行列は (3), (6).

**定義 (直交行列)**

正則行列 $A$ に対し、

$${}^tA = A^{-1}$$

を満たす行列 $A$ を**直交行列**という。

例 **2.4.5.** 直交行列の例

以下の行列は直交行列である。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

実際に直交行列の定義を満たしているか各自で確認すること。

**定義 (ベキ零行列)**

正方行列 $A$ に対し、$A^m = O$ を満たす自然数 $m$ が存在するとき、$A$ を**ベキ零行列**という。

**例 2.4.6.** 2 次と 3 次正方行列でベキ零行列の例

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.4.6　演習問題 V

**問題 2.4.1.** 以下の行列 (1) から (8) に対して、(i)〜(v) に当てはまるものを全て答えよ。

(i) 対称行列　(ii) 交代行列　(iii) 上三角行列　(iv) 下三角行列　(v) 対角行列

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**問題 2.4.2.** 以下の設問に答えよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ のとき、$3X - 2A = B$ を満たす 2 次正方行列 $X$ を求めよ。

(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき、$2X + A = 3B$ を満たす 3 次正方行列 $X$ を求めよ。

**問題 2.4.3.** 以下の行列 (1) から (10) に対して、逆行列が存在するか調べ、存在する場合は逆行列を答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　(10) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

**問題 2.4.4.** 問題 2.4.3 の行列 (1)〜(10) に対して、直交行列をすべて答えよ。

**問題 2.4.5.** 以下の行列 A, B, C の逆行列を (ア)〜(ソ) からそれぞれ選べ。(計算練習)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

[選択欄]

(ア) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(イ) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　(ウ) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(エ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$　(オ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(カ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(キ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$　(ク) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　(ケ) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

(コ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$　(サ) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$　(シ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ス) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　(セ) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(ソ) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[ ヒント ] 逆行列の求め方はまだ学習していない。しかし、候補があるので、実際に積を求め、$AA' = E$ となる $A'$ を見つける。

また、(ア) から順に掛け算するのではなく、ある程度予想をたてることも重要。

発展問題 **K.** 行列 $A, P$ を $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $P^{-1}AP$ を計算せよ。

(2) $A^n$ ($n$: 自然数) を求めよ。

♣ 補足　$P$ は問題 2.4.5 の $A$ である。

発展問題 **L.** 以下の問いに答えよ。

(1) $A^n = E$ となる自然数 $n$ が存在するとき、$A$ は正則行列である。

(2) ベキ零行列は正則行列でないことを示せ。

(3) $A^2 = A$, $A \neq E$ ならば、$A$ は正則行列でないことを示せ。

(4) $A^n = O$ となる自然数 $n$ が存在するとき、

$$(E - A)(E + A + A^2 + \cdots + A^{n-1})$$

を計算せよ。

(5) $A, B$ が共にベキ零行列で可換なら、$AB$ もベキ零行列であることを示せ。

(6) $A$ がベキ零行列なら $E - A, E + A$ は共に正則行列であることを示せ。また、それぞれの逆行列を求めよ。

発展問題 **M.** 以下の問いに答えよ。

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ で $a = b \neq 0$ のとき、行列 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ は正則であることを示せ。

(2) (1) の $A$ に対して、複素数 $\omega = a + ib$ を対応すせる。この対応により、$A$ の形の行列全体の集合 ($a = b = 0$ も含む) と、複素数全体の集合が 1 対 1 に対応する。このとき、行列の和、積、逆行列は、複素数の和、積、逆数にそれぞれ対応することを示せ。

発展問題 **O.** $n$ 次正方行列 $X, Y$ に対して、

$$[X, Y] = XY - YX$$

とおく。(これを $X$,$Y$ の**交換子積**という。)

(1) $[X, Y] = E_n$ となる、$n$ 次正方行列 $X, Y$ は存在しないことを示せ。

(2) $n$ 次正方行列 $X, Y, Z$ に対して

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = O$$

が成り立つことを示せ。

### 2.4.7　演習問題 V の略解

**略解 2.4.1.** (i) 対称行列は (1), (6), (7)

(ii) 交代行列は (3)

(iii) 上三角行列は (1), (5), (6)

(iv) 下三角行列は (1), (6), (8)

(v) 対角行列は (1), (6)

**略解 2.4.2.** (1) $3X - 2A = B$ より、$X = \dfrac{1}{3}(2A + B)$ なので、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{3}\left(2\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}\left(-A + 3B\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -5 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 9 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -3 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**略解 2.4.3.**　まずはそれぞれの行列の行列式の値を求める。

(1) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times (-2) = 5 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(2) $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 2 = -4 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ である。

(3) $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(4) $\det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\times 0-(-1)\times 1 = 1 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(5) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\times 1-(-1)\times 0 = 1 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

(6) $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\times 0-0\times 0 = 0$ となる。よって、逆行列は存在しない。

(7) $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0\times 0-0\times 2 = 0$ となる。よって、逆行列は存在しない。

(8) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1\times 1-1\times 1 = 0$ となる。よって、逆行列は存在しない。

(9) $\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\times 0-1\times 1 = -1 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。

(10) $\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-(-\frac{\sqrt{3}}{2})\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \neq 0$ となる。よって、逆行列は存在し、$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ である。

**略解 2.4.4.** 直交行列なら、転置行列が逆行列である。よって、転置行列と掛け算をし、単位行列になれば直交行列であることがわかる。例えば、(1) は

$$ {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \neq E $$

なので、(1) は直交行列ではない。

同様に計算すると、(3), (4), (9), (10) が直交行列であることが解る。

**略解 2.4.5.** 3 次正方行列の逆行列の求め方は習っていないが、候補が有れば $AX = E$ または $XA = E$ となる $X$ を探すことは出来る。

$A^{-1}$ は (キ) ，$B^{-1}$ は (ス) ，$C^{-1}$ は (ケ) である。

# 第3章

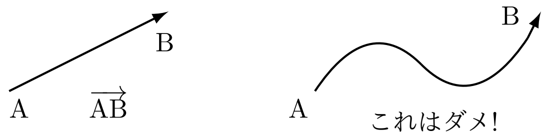
# ベクトル

## 3.1　ベクトルの演算

### 3.1.1　ベクトルとは

**定義 (ベクトル)**

平面または空間において、A を始点、B を終点とする有向線分を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であらわす。




有向線分について、その位置を問題にしないで、その大きさと向きだけを考えたとき、これを**ベクトル**という。
また、始点と終点が同じ場合を**零ベクトル**といい、$\mathbf{o}$ で表す。

ベクトルの表し方

O を原点とし、有効線分を用いた $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ や $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のように始点と終点を書く方法や、ベクトル記号 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, ..., $\overrightarrow{z}$ のように矢印を用いて書く方法がある。今後は

$$\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ ...,\ \mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z},\ ...$$

のように太文字で表した方法を多く用いるが、黒板やノートでは 白抜き

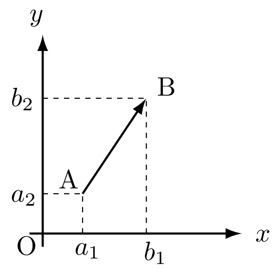
$$\mathbb{a}, \mathbb{b}, \mathbb{c}, \ldots, \mathbb{x}, \mathbb{y}, \mathbb{z}, \ldots$$

を用いる。(毎回、塗りつぶすのが大変なので)

♠ **注意!**　ベクトルの $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ などと実数の $a, b, c$ は明確に区別すること！！

**成分を用いたベクトルの表し方**

ベクトルの表し方は成分を用いて表すこともある。平面上 (空間内) の座標を用いて、始点から終点までの増加分を記述する方法である。




例えば、点 A の座標が $(a_1, a_2)$ であり、点 B の座標が $(b_1, b_2)$ であったとする。このとき、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ と表す。したがって、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

である。

♠ **注意!**　縦ベクトルと横ベクトルは、混乱がない場合にはどちらを利用しても良い。例えば

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2, 1) \quad や \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

と表す。

しかし、(ベクトルの演算など) どちらか一方でなければならないときは、区別が必要である。また、演算などで、

$$(3, -1) + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

のような表記は望ましくない。

### 3.1.2　ベクトルの次元と成分

成分を用いてベクトルを表したとき、例えば、空間内のベクトルを $(a, b, c)$ のように 3 つの数で表したとき、ベクトルの成分の左から第 1 成分、第 2 成分、第 3 成分 または $x$ 成分、$y$ 成分、$z$ 成分 と言う。縦ベクトルの場合は上から順となる。

成分が 2 つのベクトルは<u>2 次元ベクトル</u>、成分が 3 つのベクトルは<u>3 次元ベクトル</u>という。

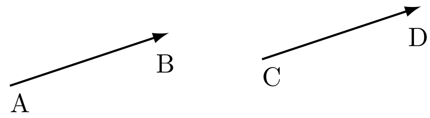
**例** $\mathbf{a} = (2, 1)$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ とすると、$\mathbf{a}$ は第 1 成分が 2, 第 2 成分が 1 の 2 次元ベクトルで $\mathbf{b}$ は第 1 成分が 3, 第 2 成分が $-2$, 第 3 成分が 7 の 3 次元ベクトルである。

♠ **注意!**　表記 $(1, 2)$ や $(3, 1, 4)$ は座標を意味する場合と (位置) ベクトルを表す場合がある。

### 3.1.3　ベクトルの和、差、定数倍

**定義 (ベクトルの相等 1)**

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が平行移動で移りあうとき、2 つのベクトルは等しいといい、$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と表す。



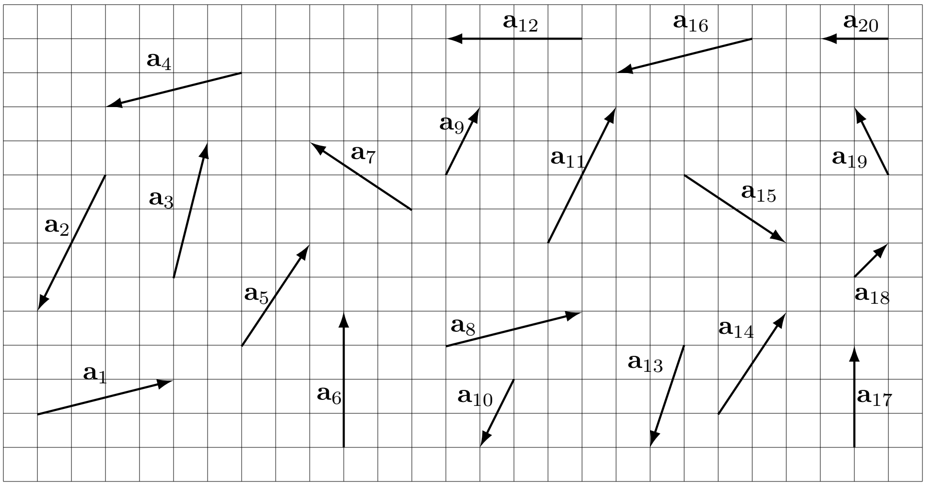

**定義 (ベクトルの相等 2)**

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して、$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ なら 2 つのベクトルは等しい。

♡ **point**　3 次元ベクトルの場合も同様に定義することができる。

また、列ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ でも同様に定義される。

例 **3.1.1.** 以下のベクトルに対して、等しいベクトルを見つける。例えば、$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_8$.



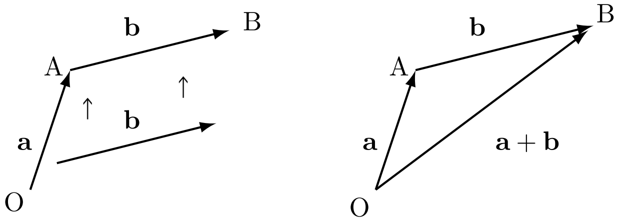

$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_8$ のほかには、$\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_{16}$, $\mathbf{a}_5 = \mathbf{a}_{14}$ が同じベクトルである。

**定義 (ベクトルの和 1)**

O を原点とし、平面または空間の 2 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathbf{a}$, $\underline{\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathbf{b}}$ となるように点 A, B を選び、

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と定義する。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の和という。




**定義 (ベクトルの和 2)**

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して、和 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ を

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

で定める。

♡ **point**　$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ なら $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ である。

**定義 (ベクトルの定数倍 1)**

ベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ と定数 $k \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathbf{a}$ の**定数倍** $k\mathbf{a}$ を

$k > 0$ ならば、$\mathbf{a}$ と同じ向きで、大きさが $k$ 倍のベクトル、
$k < 0$ ならば、$\mathbf{a}$ と反対向きで、大きさが $|k|$ 倍のベクトル、
$k = 0$ ならば、零ベクトル

と定義する。
$\mathbf{a} = \mathbf{o}$ ならば、すべての実数 $k$ に対して $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ と定義する。

♣ **補足**　定数倍のことを**スカラー倍**とも言う。

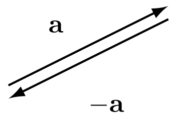
**定義 (ベクトルの定数倍 2)**

2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ と実数 $k$ に対して、定数倍 $k\mathbf{a}$ は $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2)$ で定める。

♡ **point**　縦ベクトルの場合も同様に定義される。

特に $k=-1$ のとき、$(-1)$ 倍の $\mathbf{a}$ は

$$\text{”}\mathbf{a}\text{ と反対向きで大きさが同じベクトル”}$$




であり、$(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$ とあらわす。

**例 3.1.2.** 例 3.1.1. において、$\mathbf{a}_1=-\mathbf{a}_4$ であり、$\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_{10}$ である。

**例 3.1.3.** ベクトル $\mathbf{a}=(1,3)$, $\mathbf{b}=(-2,2)$ に対して、和や定数倍を考える。

(1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(1,3)+(-2,2)=(1-2,3+2)=(-1,5)$

(2) $-3\mathbf{a}=-3(1,3)=(-3,-9)$

(3) $3\mathbf{a}+\mathbf{b}=3(1,3)+(-2,2)=(1,11)$

**定義 (ベクトルの差 1)**

ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ に対して差 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ を

$$\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$$

で定義する。

**定義 (ベクトルの差 2)**

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2),\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ に対して、差 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ は

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2)$$

で定義する。

♡ **point**　縦ベクトルの場合も同様に定義される。

**補題 (ベクトルの平行)**

2 つのベクトル $\mathbf{a},\mathbf{b}$ $(\mathbf{a}\neq\mathbf{o},\mathbf{b}\neq\mathbf{o})$ が平行であるとき、$\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$ と書く。
2 つのベクトル $\mathbf{a}\neq\mathbf{o},\mathbf{b}\neq\mathbf{o}$ が平行であるための条件は

$$\mathbf{a}=k\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}/\!/\mathbf{b}$$

である。(条件より $k\neq0$ である。$k<0$ も可。)

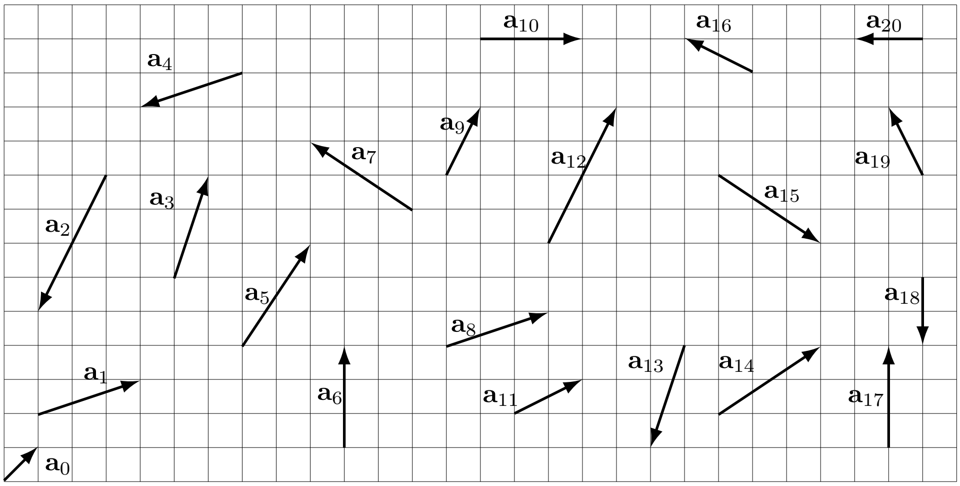
**例 3.1.4.** 例 3.1.1. において、$\mathbf{a}_1=-\mathbf{a}_4$ であり、$\mathbf{a}_2=2\mathbf{a}_{10}$ であった。よって、

$$\mathbf{a}_1/\!/\mathbf{a}_4,\quad \mathbf{a}_2/\!/\mathbf{a}_{10}$$

が解る。

### 3.1.4　演習問題 VI

**問題 3.1.1.** 以下のマス目において、右および上を正の方向とし、1 マスを縦横 1 とする。すなわち $\mathbf{a}_0$ を成分表示すると $(1,1)$ となる。このとき、以下の問いに答えよ。




(1) 以下のベクトルをそれぞれ成分で表せ。

(i) $\mathbf{a}_1$　　(ii) $\mathbf{a}_2$　　(iii) $\mathbf{a}_3+2\mathbf{a}_4$　　(iv) $2\mathbf{a}_5-3\mathbf{a}_6$

(2) 成分表示が 以下の表示となるものを、$\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうちから選べ。

(i) $(2,3)$　　(ii) $(3,0)$　　(iii) $(0,-2)$　　(iv) $(-2,1)$

(3) 以下の等式を満たすベクトル $\mathbf{x}$ を成分表示し、$\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうちから選べ。

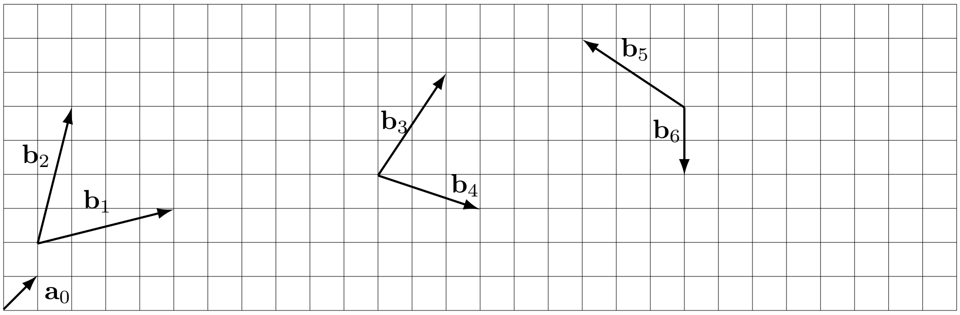
(i) $\mathbf{x}+2\mathbf{a}_9=\mathbf{o}$　(ii) $\mathbf{a}_{10}+\mathbf{x}=2\mathbf{a}_{11}$　(iii) $\mathbf{a}_{12}-\mathbf{x}=-2\mathbf{a}_{13}$　(iv) $2\mathbf{x}+\mathbf{a}_{18}=-\mathbf{a}_{20}$

(4) $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうち、同じベクトルの組を全て答えよ。

(5) $\mathbf{a}_0$ から $\mathbf{a}_{20}$ のうち、平行なベクトルの組を全て答えよ。

**問題 3.1.2.** マス目の決まりは問題 3.1.1 と同じとする。すなわち $\mathbf{a}_0=(1,1)$ となる。

3 つのベクトルを $\mathbf{x}=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$、$\mathbf{y}=\mathbf{b}_3-\mathbf{b}_4$、$\mathbf{z}=-\mathbf{b}_5+2\mathbf{b}_6$ で定めるとき、$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ を作図せよ。ただし、位置 (始点) は自由に選んでよい。



### 3.1.5　演習問題 VI の略解

**略解 3.1.1.** (1) (i) $\mathbf{a}_1 = (3, 1)$

(ii) $\mathbf{a}_2 = (-2, -4)$

(iii) $\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4 = (1, 3) + 2(-3, -1) = (1, 3) + (-6, -2) = (-5, 1)$

(iv) $2\mathbf{a}_5 - 3\mathbf{a}_6 = 2(2, 3) - 3(0, 3) = (4, 6) + (0, -9) = (4, -3)$

(2) (i) $(2, 3) = \mathbf{a}_5$

(ii) $(3, 0) = \mathbf{a}_{10}$

(iii) $(0, -2) = \mathbf{a}_{18}$

(iv) $(-2, 1) = \mathbf{a}_{16}$

(3) (i) $\mathbf{x} = -2\mathbf{a}_9 = (-2, -4) = \mathbf{a}_2$

(ii) $\mathbf{x} = -\mathbf{a}_{10} + 2\mathbf{a}_{11} = (-3, 0) + (4, 2) = (1, 2) = \mathbf{a}_9$

(iii) $\mathbf{x} = \mathbf{a}_{12} + 2\mathbf{a}_{13} = (2, 4) + 2(-1, -3) = (0, -2) = \mathbf{a}_{18}$

(iv) $2\mathbf{x} = -\mathbf{a}_{18} - \mathbf{a}_{20} = -(0, -2) - (-2, 0) = (2, 2)$ より、$\mathbf{x} = (1, 1) = \mathbf{a}_0$

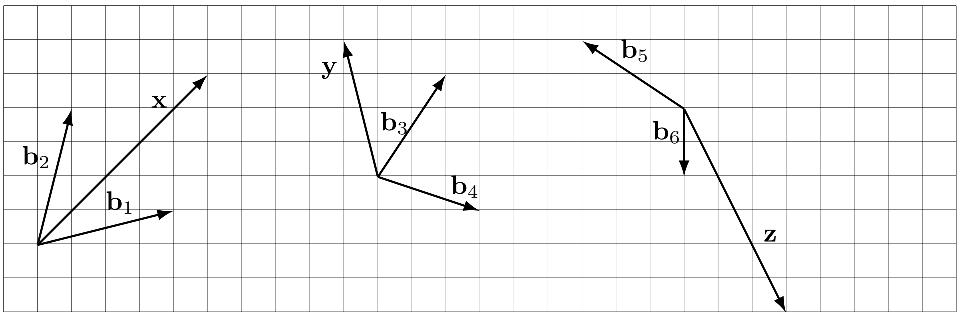
(4) 同じベクトルの組は $[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_8]$, $[\mathbf{a}_6,\ \mathbf{a}_{17}]$ である。

(5) 平行なベクトルの組は、

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_8],\ [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_9, \mathbf{a}_{12}],\ [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_{13}],\ [\mathbf{a}_6, \mathbf{a}_{17}, \mathbf{a}_{18}],\ [\mathbf{a}_7, \mathbf{a}_{15}],\ [\mathbf{a}_{10}, \mathbf{a}_{20}]$$

である。

**略解 3.1.2.**




**発展問題 P.** 三角形 ABC の各辺の中点の座標がそれぞれ (2,0,1),(4,0,6),(3,1,2) のとき、三点 A, B, C の座標を求めよ。

## 3.2 ベクトルの内積

### 3.2.1 内積の定義

**定義 (ベクトルの内積 1)**

2 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ に対して、**内積**を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ または $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ で表し、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

で定義する。同様に、$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の場合も $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$ と定義する。

ここで、ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさを $|\mathbf{a}|$ または、$||\mathbf{a}||$ で表すとする。2 次元ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ の場合、大きさ $|\mathbf{a}|$ は $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ となるのは明らかである。

このとき、内積を使えば

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})$$

と表すことが出来る。

♣ **補足** 3 次元ベクトルの場合も同様に内積を定義することができる。3 次元ベクトル $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ に対し、内積を

$$(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3$$

で定義する。(たてベクトルも同様。)

**例 3.2.1.** 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (-3, 4)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$ の場合、大きさ $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, 内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ はそれぞれ

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, |\mathbf{b}| = \sqrt{5},\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -6 + 4 = -2$$

である。

**定義 (単位ベクトル)**

大きさ 1 のベクトルを**単位ベクトル** (または、正規化されたベクトル) という。

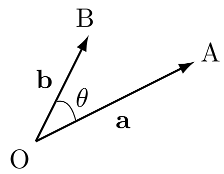
もちろん、零ベクトル (始点と終点が一致したベクトル) の大きさは 0 である。

**例 3.2.2.** ベクトル $\mathbf{a} = (-3, 4)$ に対して、ベクトル $\mathbf{a}$ と同じ向きで、大きさが 1 のベクトルを考える。例 3.2.1. から、ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさは 5 であることが解っている。したがって、ベクトル $\mathbf{a}$ を $\dfrac{1}{5}$ 倍すればよいので、求めるベクトルは $\left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ である。

☆ ベクトルの内積は次で定義することもある。

**定義 (ベクトルの内積 2)**

2 つのベクトル: $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o})$ のなす角を $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$ とするとき、




$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

で内積を定める。すなわち、$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$ である。
また $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のうち少なくとも一方が $\mathbf{o}$ のとき、$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ と定義する。

♠ **注意!**　これは 3 次元ベクトルでも (それ以上でも) 成り立つことに注意。

**例 3.2.3.** $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 10$ の場合、なす角の値 $\theta$ は

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{10}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2}$$

より $\theta = \dfrac{\pi}{3}(= 60^\circ)$ である。

### 3.2.2　内積の計算法則

**定理 (内積の計算法則)**

i) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$　(内積の交換法則)
ii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$　(内積の分配法則)
iii) $(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, k\mathbf{b})$　(内積のスカラー倍の結合法則)

[証明]　それぞれのベクトルを成分表示 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2), \mathbf{c} = (c_1, c_2)$ とし、左辺と右辺を計算すれば明らか。3 次元以上も同様に出来る。

♠ **注意!**　iii) は $k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq (k\mathbf{a}, k\mathbf{b})$ を意味している。すなわち、

$$(k\mathbf{a}, l\mathbf{b}) = kl(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

である。

2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o})$ が直交しているとき、$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ と書く。このとき、内積の定義において、成す角を $90^\circ$ と置くことにより以下のことが解る。

**ベクトルの直交**

2 つのベクトル $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ が直交するための必要十分条件は以下である:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

**例 3.2.4.** $\mathbf{a} = (a, -1)$, $\mathbf{b} = (3, 4)$ に対して、$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ となる $a$ の値を考える。この 2 つのベクトルが直交するとき、内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ の値は 0 である。よって、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 3a - 4$$

より、$a = \dfrac{4}{3}$ のとき、2 つのベクトルは直交する。

### 3.2.3　演習問題 VII

**問題 3.2.1.** ベクトル $(s, -2s)$ が単位ベクトルとなるとき、$s$ の値を求めよ。

**問題 3.2.2.** 2 つのベクトル $\mathbf{a} = (-3, 4)$, $\mathbf{b} = (2, s)$ に対して、以下の問いに答えよ。
(1) $\mathbf{a} /\!/ \mathbf{b}$ となる $s$ の値を求めよ。
(2) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ となる $s$ の値を求めよ。

**問題 3.2.3.** ベクトル $\mathbf{a} = (-3, 7)$, $\mathbf{b} = (5, -2)$ に対して、以下を計算せよ。

(1) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$　(2) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(3) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$　(4) $\dfrac{1}{3}\mathbf{a} + \dfrac{5}{3}\mathbf{b}$

(5) $6(\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$　(6) $12(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - 3(2\mathbf{a} + 8\mathbf{b})$

(7) 大きさ $|\mathbf{a}|$　(8) 大きさ $|\mathbf{b}|$

(9) 内積 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$　(10) ベクトル $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角 $\theta$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$

(11) 内積 $(2\mathbf{a}, 2\mathbf{b})$　(12) 内積 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b})$

(13) 大きさ $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$　(14) 大きさ $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$

**問題 3.2.4.** 平面上の 2 つのベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| = 1$, $|3\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 1$ を満たすように動くとき、$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ の最小値 $m$ と、最大値 $M$ を求めよ。

**問題 3.2.5.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ と ベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に対して、以下を計算せよ。
ただし、${}^t\mathbf{a}$ はベクトル $\mathbf{a}$ の転置である。

(1) $A\mathbf{a}$　(2) ${}^t\mathbf{a}A$
(3) 大きさ $|A\mathbf{a}|$　(4) 大きさ $|{}^t\mathbf{a}A|$
(5) 内積 $(A\mathbf{a}, A\mathbf{a})$　(6) 内積 $({}^t\mathbf{a}A, {}^t\mathbf{a}A)$

**応用問題．** 次の不等式が成り立つことを証明せよ。ただし、文字はすべて実数とする。

$$(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (px + qy + rz)^2$$

### 3.2.4　演習問題 VII の略解

**略解 3.2.1.** ベクトル $(s,-2s)$ の大きさは $|(s,-2s)| = \sqrt{s^2+(-2s)^2} = \sqrt{5}|s|$ なので、与えられたベクトル $(S,-2s)$ が単位ベクトルとなるには、

$$\sqrt{5}|s| = 1$$

より、$s = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ でなければならない。

このとき、$s = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ を忘れないようにすること。

**略解 3.2.2.** (1) $\mathbf{a}//\mathbf{b}$ となるには、$\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ をみたす実数 $k$ が存在しなければならない。よって、

$$(-3,4) = k(2,s)$$

を解くと、$k = -\dfrac{3}{2}$ であり、$s = -\dfrac{8}{3}$ を得る。

(2) $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ となるのは、内積 $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ のときである。よって、

$$-3\cdot 2 + 4s = 0$$

より、$s = \dfrac{3}{2}$ である。

**略解 3.2.3.** (1) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (2,5)$ (2) $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (-8,9)$

(3) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b} = (9,8)$ (4) $\dfrac{1}{3}\mathbf{a}+\dfrac{5}{3}\mathbf{b} = \left(\dfrac{22}{3},-1\right)$

(5) $6(\mathbf{a}-2\mathbf{b}) = (-78,66)$ (6) $12(\mathbf{a}+\mathbf{b})-3(2\mathbf{a}+8\mathbf{b}) = 6\mathbf{a}-12\mathbf{b} = (-78,66)$

(7) $|\mathbf{a}| = \sqrt{58}$ (8) $|\mathbf{b}| = \sqrt{29}$

(9) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -29$

(10) $\cos\theta = \dfrac{(\mathbf{a},\mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{-29}{\sqrt{58}\sqrt{29}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より、$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

問いが $0 \leq \theta \ \leq \pi$ なので、度数法でなく、弧度法で答えるのが望ましい。

(11) 内積 $(2\mathbf{a},2\mathbf{b}) = 4(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -116$

(12) 内積 $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (\mathbf{a},\mathbf{a})-(\mathbf{b},\mathbf{b}) = 58-29 = 29$

(13) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{29}$ (14) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \sqrt{145}$

**略解 3.2.4.** $\mathbf{x} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b}, \mathbf{y} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ とおくと

$$\mathbf{a} = \frac{1}{10}\mathbf{x} + \frac{3}{10}\mathbf{y}, \quad \mathbf{b} = \frac{3}{10}\mathbf{x} - \frac{1}{10}\mathbf{y}$$

より $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \dfrac{2}{5}\mathbf{x} + \dfrac{1}{5}\mathbf{y}$. よって、$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ の大きさは、

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \left|\frac{2}{5}\mathbf{x} + \frac{1}{5}\mathbf{y}\right| = \sqrt{\frac{5}{25} + \frac{4}{25}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \sqrt{\frac{5}{25} + \frac{4}{25}\cos\theta}$$

と表すことができる。

ここで、$\cos\theta$ の取り得る値の範囲は、$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ なので

$$\frac{1}{25} \leq \frac{5}{25} + \frac{4}{25}\cos\theta \leq \frac{9}{25}$$

がいえる。したがって $\dfrac{1}{5} \leq |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq \dfrac{3}{5}$ より、$m = \dfrac{1}{5}, M = \dfrac{3}{5}$.

**略解 3.2.5.** (1) $A\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$　(2) ${}^t\mathbf{a}A = (3\ 4)$　(3) $|A\mathbf{a}| = 5$

(4) $|{}^t\mathbf{a}A| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$　(5) $(A\mathbf{a}, A\mathbf{a}) = 25$　(6) $({}^t\mathbf{a}A, {}^t\mathbf{a}A) = 25$

**応用問題 略解**

2 つのベクトル $\mathbf{a} = (p, q, r), \mathbf{b} = (x, y, z)$ に対して、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

が成り立つ。ただし、$\theta$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ のなす角の値とする。

したがって、

$$px + qy + rz = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\cos\theta$$

が成り立つ。よって、

$$-\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leqq px + qy + rz \leqq \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

が成り立つので、各辺を 2 乗すると

$$(p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqq (px + qy + rz)^2$$

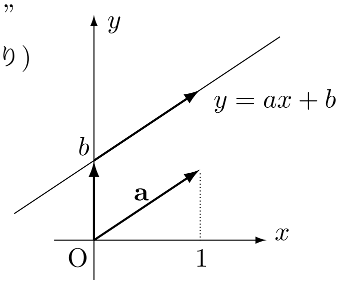
が成り立つ。

# 3.3　直線の方程式

## 3.3.1　平面上の直線の方程式

平面 ($\mathbb{R}^2$) 上の直線の方程式は $y = ax + b$ であった。この直線の方程式は言い換えれば ”平面上の点 $(x, y)$ で、式 $y = ax + b$ を満たす点の集まり” である。すなわち、集合で考えると ($x$ を $t$ とすることにより)

$$\text{”直線 } y = ax + b\text{”} = \{(t, at + b) \mid t \in \mathbb{R}\}$$




であり、ベクトルの計算法則に従うと

$$(t, at + b) = (t, at) + (0, b) = t(1, a) + (0, b)$$

である。この式または図より、この直線上の点 $(x, y)$ は、ベクトル $\mathbf{a} = (1, a), \mathbf{b} = (0, b)$ を用いて

$$(x, y) = \mathbf{b} + t\mathbf{a} \qquad (t : \text{パラメーター}) \tag{1}$$

と表されることが解る。このとき、$t$ を 1 つ定めれば直線上の 1 点が定まり、逆に直線上の 1 点に対して唯一つ $t$ の値が対応する。このような $t$ を**パラメーター**と言い、式 (1) を **直線のベクトル方程式** または **直線のパラメーター表示**という。

また、ベクトル $\mathbf{a} = (1, a)$ を直線の**方向ベクトル**という。

♠ **注意!**　1 つの直線に対して、直線のベクトル方程式の表し方は 1 通りではない！たとえば、直線 $2x + y = 1$ は、$s, t$ をパラメーターとして、

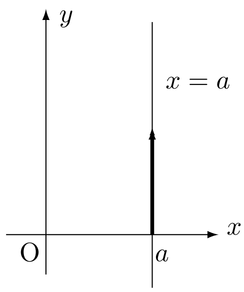
$$(x, y) = (0, 1) + t(1, -2) \quad \text{や} \quad (x, y) = (1, -1) + s(-2, 4)$$

とかくことが出来る。一見異なるが、前者に対し $t = -2s + 1$ とすれば後者を表している。

特殊な直線の方程式

$y$ 軸と平行な直線の方程式は $x = a$ で、ベクトル方程式は

$$(x, y) = (a, 0) + t(0, 1)$$




($t$ はパラメーター) である。

特殊な直線も含めて、平面上の直線の方程式は、(特殊な直線も含めて) 一般的に $ax + by = c$ と書ける。

これは、$\mathbf{b} = (a, b),\ \mathbf{x} = (x, y)$ とおいて、内積を用いると

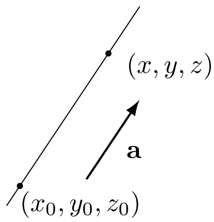
$$\text{”直線 } ax + by = c\text{”} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = c\}$$

と表される。この直線を原点を通るように平行移動すると、$(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0$ と表され、直線を表す $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ が直交していることが解る。このベクトル $\mathbf{b}$ を直線の**法線ベクトル**という。

### 3.3.2　空間内の直線の方程式

平面上の場合と同様に、空間内 ($\mathbb{R}^3$) のある条件

”点 $(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$　$(a, b, c \neq 0)$ に平行なベクトル上の点”




を満たす点の集まりは直線になる。それらの条件を満たす点を $(x, y, z)$ とすると、

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。

これが、空間内の **直線のベクトル方程式 (パラメーター表示)** である。ここで $t$ は任意のパラメーターだから、$t$ を消去して

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

を得る。

これが、 **空間の直線の方程式**で、ベクトル $\mathbf{a}$ がこの直線の **方向ベクトル**である。

♣ **point**　逆に、直線の方程式を $= t$ と置き、1 つずつの式に分ければ

$$at = x - x_0,\ bt = y - y_0,\ ct = z - z_0$$

となる。これを変形し、ベクトルの形で書くと

$$(x, y, z) = (at + x_0, bt + y_0, ct + z_0) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (t \in \mathbb{R})$$

となり、空間の直線のベクトルの方程式が求められる。

特殊な直線の方程式

上の条件で $a, b, c$ のいずれか 1 つが 0、例えば $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ の場合、直線の方程式は

$$x = x_0, \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

と、$x$ の辺が無い 1 つの等式で表されることになる。
さらに、上の条件で $a, b, c$ のうち 2 つが 0、例えば $a = 0, b = 0, c \neq 0$ の場合、直線の方程式は

$$x = x_0, y = y_0, (z : \text{任意}).$$

となる。

**例 3.3.1.** 以下の空間内の直線の方程式を考える。

(1) 点 $(0, 2, 1)$ を通り、方向ベクトルが $(2, 1, -3)$ の直線

通る点 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 2, 1)$, 方向ベクトル $(a, b, c) = (2, 1, -3)$ を空間の直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

に代入すると、直線の方程式が得られる。 解 $\dfrac{x}{2} = y - 2 = \dfrac{z - 1}{-3}.$

(2) 点 $(-1, 2, 1)$ を通り、方向ベクトルが $(0, -1, 3)$ の直線

この直線の方向ベクトルの $x$ 成分が 0 であるので、特殊な直線となっている。したがって、まず $x = -1$ が解る。$x$ の辺以外の直線の方程式に代入すると、方程式を求めることができる。

解 $x = -1, \dfrac{y - 2}{-1} = \dfrac{z - 1}{3}.$

(3) 2 点 $(-1, 0, 2)$, $(3, 0, -2)$ を通る直線

まず、方向ベクトルが無いので方向ベクトルを求める。通る 2 点を A, B とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ がこの直線の方向ベクトルであることがわかる。

方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4, 0, -4)$ をみると、1 つの成分が 0 となっているので、特殊な直線となっている。したがって、まず $y = 0$ が解る。あとは、$y$ の辺以外の直線の方程式に代入すると、方程式を求めることができる。

解 $x = \dfrac{z - 1}{-1}, y = 0.$

♣ **補足**　方向ベクトルは各成分が互いに素として使うことが多い。よって、$(4, 0, -4)$ は $(1, 0, -1)$ として考える。

(4) 2 点 $(-2, 3, 1)$, $(-2, -2, 1)$ を通る直線

(3) と同じく方向ベクトルをまず求める。方向ベクトルは $(0, -5, 0)$ なので、特殊な直線となる。この場合、$x = -2, z = 1$ となる。よって、直線の方程式を求めることができる。

解 $x = -2, y :$ 任意$, z = 1.$

(5) 原点を通り平行移動すると直線 $\dfrac{x}{2} = y - 2 = \dfrac{z - 1}{-3}$ と一致する直線

(方向) ベクトルは平行移動しても変わらないため、求める直線の方向ベクトルも同じ $(2, 1, -3)$ であることが解る。後は原点を通るように代入すると直線の方程式は求められる。

解 $\dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{-3}.$

### 3.3.3 内分点と外分点

以下の定理は 2 次元ベクトルのみならず、3 次元以上のベクトルでも成り立つ。

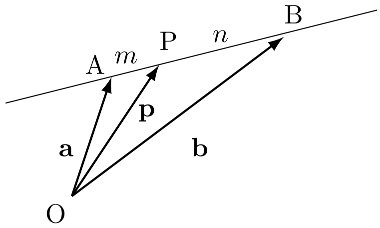
**定理 (線分の内分点)**

2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ とする。このとき、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n}$$

で与えられる。

(証明)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n} \\ &= \frac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n} \quad //\end{aligned}$$




**定理 (線分の外分点)**

2 点 A, B の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ とする。このとき、線分 AB を $m:n$ に外分する点 P の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{-n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m-n}$$

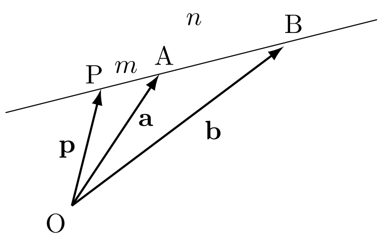
で与えられる。

(証明) 外分点の場合、$m<n, m \geqq n$ で図が異なるが証明の本質的なところは同じなので、$m<n$ の場合に示す。

$m<n$ の場合、外分点 P は右図の位置になる。

ただし、この図において $n$ は PB の比を表す。

これは、線分 PB を $m:n-m$ に内分する点が A であると意味している。



外分比は、AP : PB で表す。ここで、

$$\text{PB=PA+AB}$$

であるので、AP : PB=AP : PA+AB であり、AP : PA+AB= $m : n$ より、$m$(PA+AB)= $n$AP なので、

$$\text{PA : AB} = m : n - m$$

である。

よって内分の公式を使うと、

$$\mathbf{a} = \frac{(n-m)\mathbf{p} + m\mathbf{b}}{m + (n-m)}$$

が得られ、式変形をすると

$$\mathbf{p} = \frac{-n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m - n}$$

をえる。//

**発展問題 Q.** 三角形 ABC において、外接円の中心を P とすると、

$$3\overrightarrow{\text{PA}} + 5\overrightarrow{\text{PB}} + 7\overrightarrow{\text{PC}} = \overrightarrow{0}$$

が成り立ち、三角形 ABP の面積が $\sqrt{3}$ である。

このとき、外接円の半径および三角形 ABC の面積を求めよ。

### 3.3.4　演習問題 VIII

**問題 3.3.1.** 以下の平面上の直線の方程式と、直線のベクトル方程式をそれぞれ求めよ。

(1) 点 $(0,3)$ を通り、方向ベクトルが $(1,2)$ の直線

(2) 点 $(-1,2)$ を通り、方向ベクトルが $(2,-1)$ の直線

(3) 2 点 $(-2,3)$, $(3,-2)$ を通る直線

(4) 2 点 $(3,-1)$, $(-1,0)$ を通る直線

(5) 直線 $x+2y=1$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2,1)$ を通る直線

(6) 直線 $3x-7y=5$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2,1)$ を通る直線

(7) 直線 $x+2y=1$ と直交し、点 $(2,1)$ を通る直線

(8) 直線 $3x-7y=5$ と直交し、点 $(2,1)$ を通る直線

**問題 3.3.2.** 以下の空間内の直線の方程式と、直線のベクトル方程式をそれぞれ求めよ。

(1) 点 $(0,0,0)$ を通り、方向ベクトルが $(1,2,3)$ の直線

(2) 点 $(0,-1,2)$ を通り、方向ベクトルが $(2,-1,-1)$ の直線

(3) 2 点 $(-2,3,1)$, $(3,-2,-2)$ を通る直線

(4) 2 点 $(3,-1,-5)$, $(-1,0,-5)$ を通る直線

(5) 直線 $x = \dfrac{y}{2} = z-1$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2,1,-1)$ を通る直線

(6) 直線 $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z+1}{-2}$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2,1,0)$ を通る直線

**発展問題 R.** 以下の (7), (8) は、ベクトルの外積を知っていると解きやすい問がであるが、知らない場合は少し計算が必要になる問題である。

(7) 2 つの直線 $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-2}{-3}$, $x-1 = \dfrac{y-2}{2} = z-1$ と直交し、点 $(0,0,0)$ を通る直線

(8) 2 つの直線 $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z+6$, $x+2 = y+1 = z-3$ と直交し、点 $(2,1,-3)$ を通る直線

**問題 3.3.3.** 平面上の点 $\mathrm{A}(1,2)$,$\mathrm{B}(5,-1)$ と、空間内の点 $\mathrm{C}(-1,-2,3)$, $\mathrm{D}(1,3,-1)$ に対して以下の問いに答えよ。

(1) 2 点 A, B を結ぶ線分 AB を 2 : 1 に内分する点 $\mathrm{P}_1$ の座標を求めよ。

(2) 2 点 A, B を結ぶ線分 AB を 2 : 3 に外分する点 $\mathrm{P}_2$ の座標を求めよ。

(3) 2 点 C, D を結ぶ線分 CD を 3 : 1 に内分する点 $\mathrm{P}_3$ の座標を求めよ。

(4) 2 点 C, D を結ぶ線分 CD を 3 : 5 に外分する点 $\mathrm{P}_4$ の座標を求めよ。

**問題 3.3.4.** 以下の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC があり、辺 AB を 1 : 1 に内分する点 P の座標が $(3,-1,-1)$、辺 AC を 1:2 に内分する点 Q の座標が $(1,-2,2)$、辺 AC を 2 : 1 に内分する点 R の座標が $(0,-1,4)$ である。

このとき、3 つの頂点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 三角形 ABC があり、辺 AB を 1 : 1 に内分する点 P の座標が $(3,1,2)$、辺 BC を 1 : 1 に内分する点 Q の座標が $(2,0,1)$、辺 CA を 2 : 1 に外分する点 R の座標が $(7,3,9)$ である。

このとき、3 つの頂点 A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

### 3.3.5 演習問題 VIII の略解

**略解 3.3.1.** 直線の通る点 (の位置ベクトル) $\mathbf{b}$ と、方向ベクトル $\mathbf{a}$ が解ると、直線のベクトル方程式は

$$(x, y) = \mathbf{b} + t\mathbf{a} \quad (t: \text{パラメーター})$$

で求まる。縦ベクトル表記でも可。

(1) "点 $(0, 3)$ を通り、方向ベクトルが $(1, 2)$ の直線" を考えるということは、通る点と方向ベクトルが解っているので上の公式に代入して

$$(x, y) = (0, 3) + t(1, 2) \quad (t: \text{パラメーター})$$

が求まる。これが、直線のベクトル方程式である。

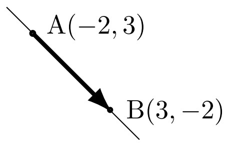
ここから、パラメーターを消去する。直線のベクトル方程式において、各成分で考えると $x = 0 + t, y = 3 + 2t$ を得る。ここから、$t = x$ が解るので、第 2 式に代入すると $y = 3 + 2x$ すなわち、$y = 2x + 3$ または $2x - y = -3$ となり、直線の方程式が得られる。

(2) "点 $(-1, 2)$ を通り、方向ベクトルが $(2, -1)$ の直線" も (1) と同様、公式に代入して

$$(x, y) = (-1, 2) + t(2, -1) \quad (t: \text{パラメーター})$$

が求まる。ここから、$x = -1 + 2t, y = 2 - t$ を得る。第 1 式から、$t = \frac{x+1}{2}$ なので、第 2 式に代入すると、$y = 2 - \frac{x+1}{2}$ となる。分数を解消すると $x + 2y = 3$ となる。

(3) "2 点 $(-2, 3), (3, -2)$ を通る直線" の問題は、方向ベクトルが解っていないのでまず方向ベクトルを求める。




右図より、2 点 A,B を通る直線の方向ベクトルは $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (または $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ など) であることが解る。

したがって、方向ベクトルを $(-2, 3) - (3, -2) = (-5, 5)$ となる。

(選び方によっては、(5,-5) となるが、(5,-5) も正しい。)

方向ベクトルが求まったので (1), (2) と同じように計算し、直線のベクトル方程式は

$$(x, y) = (-2, 3) + t(-5, 5) \quad (t: \text{パラメーター})$$

で、直線の方程式は $x + y = 1$ となる。

♣ **補足** 方向ベクトルは $(-1, 1)$ とした方が良いが、解りやすく $(-5, 5)$ にしている。

(4) "2 点 $(3, -1), (-1, 0)$ を通る直線" も (3) と同様。

方向ベクトルが $(4, -1)$ なので、直線のベクトル方程式が

$$(x, y) = (3, -1) + t(4, -1) \quad (t: \text{パラメーター})$$

であり、直線の方程式は $x + 4y = -1$ となる。

(5) ”直線 $x+2y=1$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2,1)$ を通る直線”は、一見方向ベクトルが解らないが、直線 $x+2y=1$ と同じ方向ベクトルなので、この直線の方向ベクトルを求める。平面の直線の方程式からベクトル方程式を求めるとき、どちらか一方の変数をパラメーターとして考える方法がある。

例えば、$t=y$ とする。この場合、$x=1-2y$ なので、$x=1-2t, y=t$ となる。よって、$(x,y)=(1,0)+t(-2,1)$ なので、この直線の方向ベクトルは $(-2,1)$ だと解る。

以上より、求めたい直線は”方向ベクトルが $(-2,1)$ で、点 $(2,1)$ を通る直線” となるので、これまでと同様に計算して、それぞれの方程式は

$$x+2y=4, (x,y)=(2,1)+t(-2,1) \quad (t: \text{パラメーター}).$$

♣ **補足**　略解では $(x,y)=(0,2)+t(-2,1)$　$(t: \text{パラメーター})$ と書いているが、略解の式に $t=t'-1$ を代入すると $(x,y)=(2,1)+t'(-2,1)$ となる。直線のベクトル方程式の表し方は 1 通りではないことに注意。

また、内容をしっかり理解していれば $x+2y=c$ に $(x,y)=(2,1)$ を代入して $c=4$ から $x+2y=4$ と求めることも出来る。

(6) ”直線 $3x-7y=5$ と方向ベクトルが同じで、点 (2,1) を通る直線”も (5) と同様。$x$ を $t$ とおくと、$y=\frac{3}{7}t-\frac{5}{7}$ となる。よって、$(x,y)=(0,-\frac{5}{7})+t(1,\frac{3}{7})$ となり、方向ベクトルは $(1,\frac{3}{7})$ であることが解る。以上より、求めたい直線は”方向ベクトルが $(1,\frac{3}{7})$ で、点 $(2,1)$ を通る直線” となる。したがって、それぞれの方程式は

$$3x-7y=-1, (x,y)=\left(0,\frac{1}{7}\right)+t\left(1,\frac{3}{7}\right) \quad (t: \text{パラメーター}).$$

(7) ”直線 $x+2y=1$ と直交し、点 $(2,1)$ を通る直線”の場合もまずは、方向ベクトルを求める。そのために、直線 $x+2y=1$ の方向ベクトルを求める。

(5), (6) の求め方で求めると、$(-2,1)$ と解る。このベクトルに直交するベクトル $(a,b)$ が求めたい直線の方向ベクトルとなる。

2 つのベクトルが直交するので、内積を用いて $-2a+b=0$ から $(a,b)=(a,2a)$ となる $(a\neq 0)$。このことは、ベクトル $(a,b)$ はベクトル $(1,2)$ と平行であることを意味する。

よって、この問題は”方向ベクトルが (1, 2) で、点 (2, 1) を通る直線”となる。これまでと同様にして

$$2x-y=3, (x,y)=(2,1)+t(1,2) \quad (t: \text{パラメーター}).$$

(8) ”直線 $3x-7y=5$ と直交し、点 $(2,1)$ を通る直線” も (7) と同様にして解く。

この直線の方向ベクトルは $(7,3)$ であり、このベクトルと直交するベクトル (のうちの 1 つのベクトル) は $(1,-\frac{7}{3})$ である。後はこれまでと同様にして、それぞれの方程式は

$$7x+3y=17,\ (x,y)=\left(0,\frac{17}{3}\right)+t\left(1,-\frac{7}{3}\right) \quad (t: \text{パラメーター}).$$

**略解 3.3.2.** 直線の通る点 $(x_0, y_0, z_0)$ と、方向ベクトル $(a, b, c)$ が解ると、直線のベクトル方程式は

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (t : \text{パラメーター})$$

で求まる。(縦ベクトル表記でも可。) また、直線の方程式は

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

となる。

(1) ”点 $(0, 0, 0)$ を通り、方向ベクトルが $(1, 2, 3)$ の直線” を考えるということは、通る点と方向ベクトルが解っているので上の公式に代入する。直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \quad (x, y, z) = t(1, 2, 3) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

直線のベクトル方程式は通る点が解るように $(x, y, z) = t(1, 2, 3) + (0, 0, 0)$ と書くこともある。

(2) ”点 $(0, -1, 2)$ を通り、方向ベクトルが $(2, -1, -1)$ の直線” も (1) 同様に公式に代入する。直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 2}{-1}, \quad (x, y, z) = t(2, -1, -1) + (0, -1, 2) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

(3) ”2 点 $(-2, 3, 1)$, $(3, -2, -2)$ を通る直線” は、平面の場合 (問題 3.3.1 (3), (4)) を参考に方向ベクトルを求める。方向ベクトルは $(-2, 3, 1) - (3, -2, -2) = (-5, 5, 3)$ を得るので、後は 2 点のいずれかを通る点として公式に代入する。直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$\frac{x + 2}{-5} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z - 1}{3}, \quad (x, y, z) = t(-5, 5, 3) + (-2, 3, 1) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

(4) ”2 点 $(3, -1, -5)$, $(-1, 0, -5)$ を通る直線” は、(3) と同様に、まず方向ベクトルを求める。方向ベクトルは $(3, -1, -5) - (-1, 0, -5) = (4, -1, 0)$ を得る。このとき、第 3 成分が 0 であることに注意する（特殊な直線）。

よって、直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$\frac{x - 3}{4} = \frac{y + 1}{-1}, z = -5, \quad (x, y, z) = t(4, -1, 0) + (3, -1, -5) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

♠ **注意!**　$z = 0$ の解答が多かったが、方向ベクトルの成分が 0 の成分に対しては、通る点の成分を取り続ける。すなわち、方向ベクトルの $z$ 成分の成分が 0 なら、$z = z_0$ (通る点の $z$ 成分) となる。

(5) ”直線 $x = \frac{y}{2} = z - 1$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2, 1, -1)$ を通る直線”を考えると、方向ベクトルが同じなので、直線の方程式は $x - x_0 = \frac{y - y_0}{2} = z - z_0$ に通る点を代入すればよい。

よって、直線の方程式は

$$x - 2 = \frac{y - 1}{2} = z + 1$$

である。これをもとに、直線のベクトル方程式を求めることが出来るので、直線のベクトル方程式は

$$(x, y, z) = t(1, 2, 1) + (2, 1, -1) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

(6) ”直線 $\frac{x}{3} = \frac{y - 4}{5} = \frac{z + 1}{-2}$ と方向ベクトルが同じで、点 $(2, 1, 0)$ を通る直線”は (5) と同じ考えで求めることができる。

よって、直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{-2}, \quad (x, y, z) = t(3, 5, -2) + (2, 1, 0) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

(7) ”2 つの直線 $\frac{x - 4}{3} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 2}{-3}, x - 1 = \frac{y - 2}{2} = z - 1$ と直交し、点 $(0, 0, 0)$ を通る直線”を考えるにあたって、この 2 つの直線の方向ベクトルを考えると、それぞれの方向ベクトルは、$\mathbf{v}_1 = (3, 2, -3), \mathbf{v}_2 = (1, 2, 1)$ である。

ここで、求める直線の方向ベクトルを $\mathbf{a} = (a, b, c)$ とすると、$\mathbf{a}$ は $\mathbf{v}_1$ とも $\mathbf{v}_2$ とも直交する。(直線と直線のなす角については、次回定義するのだが....)

よって、内積をとると $(\mathbf{a}, \mathbf{v}_1) = 0, (\mathbf{a}, \mathbf{v}_2) = 0$ が成り立つ。これより、$3a + 2b - 3c = 0$, $a + 2b + c = 0$ を解くと、$(a, b, c) = \left(2c, -\frac{3}{2}c, c\right)$ をえる。方向ベクトルの性質から $c \neq 0$ なら任意に指定できるので、$c = 2$ とすると方向ベクトルは $(4, -3, 2)$ となる。

よって、直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}, \quad (x, y, z) = t(4, -3, 2) + (0, 0, 0) \quad (t : \text{パラメーター}).$$

(8) ”2 つの直線 $\frac{x - 4}{2} = \frac{y - 2}{-1} = z + 6, x + 2 = y + 1 = z - 3$ と直交し、点 $(2, 1, -3)$ を通る直線”も (7) と同様に 2 つの直線の方向ベクトルと直交するベクトル $\mathbf{a}$ を求める。$\mathbf{a} = (2, 1, -3)$ となるので、直線の方程式と直線のベクトル方程式は

$$\frac{x - 2}{2} = y - 1 = \frac{z + 3}{-3}, \quad (x, y, z) = t(2, 1, -3) + (2, 1, -3) \quad (t : \text{パラメーター})$$

となる。

♣ **補足**　パラメーターの取り方によっては略解と異なる方程式になっていると思う。パラメーターの変数変換にも慣れておいた方がよい。

**略解 3.3.3.** 内分と外分の公式に間違えず代入する。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = \dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+1} = \dfrac{(1,2)+2(5,-1)}{3} = \dfrac{1}{3}(11,0)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_2} = \dfrac{-3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2-3} = \dfrac{-3(1,2)+2(5,-1)}{-1} = (-7,8)$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_3} = \dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3+1} = \dfrac{(-1,-2,3)+3(1,3,-1)}{4} = \dfrac{1}{4}(2,7,0)$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_4} = \dfrac{-5\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{3-5} = \dfrac{-5(-1,-2,3)+3(1,3,-1)}{-2} = \dfrac{1}{2}(-8,-19,18)$

**略解 3.3.4.** (1) 線分の内分点の定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} = (1,-2,2),\quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3} = (0,-1,4)$$

が解るので、整理すると

$$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (3,-6,6),\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (0,-3,12)$$

である。これを解くと、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,-3,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (-1,0,6)$ となる。

また、点 B は線分 AP を 2:1 に外分した点なので、

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{-\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{2-1} = \frac{-(2,-3,0)+2(3,-1,-1)}{1} = (4,1,-2)$$

となる。

以上より、求める 3 頂点の座標は A$(2,-3,0)$, B$(4,1,-2)$, C$(-1,0,6)$ である。

(2) 線分の内分点、外分点の定理より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+1}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{1+1}, \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{\overrightarrow{-\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2-1}$$

なので、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (6,2,4), \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (4,0,2), \overrightarrow{-\mathrm{OC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (7,3,9)$$

である。

これを解くと、各頂点の座標は A$(5,1,7)$, B$(1,1,-3)$, C$(3,-1,5)$ である。

**発展問題 Q 略解**　まず、外接円の半径を $r$ とする。次に、

$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+7\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$$

から、

$$7\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

と変形し、両辺の内積 $(7\overrightarrow{\mathrm{CP}},7\overrightarrow{\mathrm{CP}})=(3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}},3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ を計算すると、

$$(\overrightarrow{\mathrm{PA}},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}})=\frac{1}{2}r^2 \tag{3.1}$$

が得られる ($|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=r$ に注意)。

また、$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくと、三角形 ABP の面積は、$\dfrac{1}{2}r^2\sin\theta$ である。よって

$$\frac{1}{2}r^2\sin\angle\theta=\sqrt{3}$$

より、$\sin\theta=\dfrac{2}{r^2}\sqrt{3}$ である。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いると、$\cos\theta=\pm\dfrac{1}{r^2}\sqrt{r^4-12}$ である。式 (3.1) から $>0$ が解るので、$\cos\theta=\dfrac{1}{r^2}\sqrt{r^4-12}$ である。このことより、

$$(\overrightarrow{\mathrm{PA}},\ \overrightarrow{\mathrm{PB}})=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cos\theta=r^2\cdot\frac{1}{r^2}\sqrt{r^4-12}=\sqrt{r^4-12} \tag{3.2}$$

を得る。式 (3.1), (3.2) から、$r=2\sqrt{2}$ を得る。

次に、

$$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+7\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}$$

を変形すると、

$$15\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{CA}}+5\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

となる。これは、

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{8}{15}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{CA}}+5\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{8}$$

となる。これより、

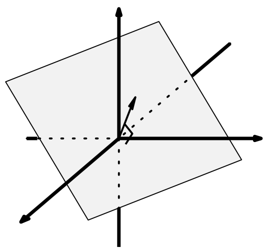
$$\triangle\mathrm{APB}:\triangle\mathrm{ABC}=(15-8):15=7:15$$

となるので、$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{15}{7}\sqrt{3}.$

## 3.4　3 次元空間内の平面の方程式

### 3.4.1　平面の方程式とベクトル方程式

あるベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$ に垂直で、原点を通る平面は唯一つに決まる。



今、ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$ に垂直で、原点を通る平面上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を考える。平面上にある点 P に対しては、

$$\mathbf{a} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

であるから、この点 $(x, y, z)$ は、内積

$$((a, b, c),\ (x, y, z)) = 0$$

を満たすことになる。したがって、

$$ax + by + cz = 0$$

である。これが、原点を通る平面の方程式となる。

同様に、ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$ に垂直で、点 $\mathrm{K}(x_0, y_0, z_0)$ を通る平面上の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ を考える。定義より、

$$\mathbf{a} \perp \overrightarrow{\mathrm{KP}}$$

であるから、平面上の点 $(x, y, z)$ は内積 $((a, b, c),\ (x - x_0, y - y_0, z - z_0)) = 0$ を満たすことになる。したがって、$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ である。

以上より、ベクトル $\mathbf{a} = (a, b, c)$ に垂直で、$(x_0, y_0, z_0)$ を通る**平面の方程式**は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

であることが解る。ここで、ベクトル $\mathbf{a}$ をこの平面の **法線ベクトル**という。

平面の方程式は書き換えると、

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (\text{または、} ax + by + cz = d')$$

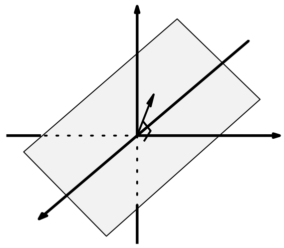
と表すことも出来ることに注意する。

また、空間内の直線の方程式の場合と同様に、 **平面のベクトル方程式**も存在し、

$$(x, y, z) = s(u_1, u_2, u_3) + t(v_1, v_2, v_3) + (x_0, y_0, z_0)$$

の形で表される。(ただし、$s, t$ はパラメーターである。)

特殊な平面の方程式



1 つの座標軸、例えば $x$ 軸を含む平面の方程式は $by+cz=d$ ($x$ : 任意) の形をしていて、法線ベクトルは $(0,b,c)$ となる。

$x$-$y$ 平面と平行な平面の方程式は $z=a$ ($x,y$ : 任意) で、法線ベクトルは $(0,0,1)$ である。

平面の方程式から平面のベクトル方程式へ変換

平面の方程式 $ax+by+cz=d$ からベクトル方程式を導く方法は、変数をパラメーターに置けば求められる。例えば $a\neq 0$ なら、$s,t$ をパラメーターとし、$y=s, z=t$ と置けば

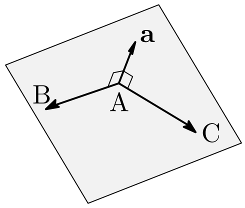
$$(x,y,z)=s\left(-\frac{b}{a},1,0\right)+t\left(-\frac{c}{a},0,1\right)+\left(\frac{d}{a},0,0\right)$$

である。(ちなみに、パラメーターを少し変えれば分数は解消できる。)

### 3.4.2　平面の方程式の例

法線ベクトルと通る点が 1 つ決まれば平面の方程式と平面のベクトル方程式は求めることができる。ここでは、法線ベクトルや通る点が解らない場合も含めて、例を考えていく。

まず、1 つの直線上にない異なる 3 点 A,B,C を決めると、この 3 つの点を通る平面がただ一つ定まることは感覚として解ると思うし、実際に 1 つに定まる。このとき、これら 3 つの点を通る平面の方程式を考えてみる。




(考え方) 通る点と法線ベクトルが解れば平面の方程式は求まる。いま、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平面上のベクトルである。よって、平面の法線ベクトルを $\mathbf{a}$ とすれば、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\mathbf{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\mathbf{a}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の外積を知っていると直ぐに $\mathbf{a}$ が求まるが、ここでは方程式を解く方法で $\mathbf{a}$ を求める。

(少し具体例) 例えば、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,2,-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,0,3)$ であったとき、これらのベクトルと直交するベクトル $\mathbf{a}=(a,b,c)$ を求めてみる。

ベクトル $\mathbf{a}$ とそれぞれのベクトルの内積を計算すると

$$a+2b-c=0,\quad 2a+3c=0$$

が成り立つことが解る。この 2 つの式から、$a=-\frac{3}{2}c,\ b=\frac{5}{4}c$ を得る。

このことから、直交するベクトルは $\left(-\frac{3}{2}c,\frac{5}{4}c,c\right)$ $(c\neq 0)$ となる。このうちの 1 つとして $c=4$ とすれば、$(-6,5,4)$ が直交するベクトルの 1 つであることが解る。

あとは、与えられた 3 つの点 A,B,C のいずれかを選べば平面の方程式を書き表すことができる。

**例 3.4.1.** 以下の平面の方程式を考える。
(1) 点 $(1,-2,0)$ を通り、法線ベクトルが $(2,-1,2)$ の平面

点 $(x_0,y_0,z_0)$ を通り、法線ベクトルが $(a,b,c)$ の平面の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

である。これに代入すると、$2(x-1)-1(y+2)+2z=0$ である。少しきれいにすると求まる。

解 $2x-y+2z=4.$

(2) 3 点 $(-1,1,1)$, $(2,-2,3)$, $(2,0,-2)$ を通る平面

まずベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求める。ただし、点の選び方は自由なので、前から A, B, C とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,-2,3)-(-1,1,1)=(3,-3,2),$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,0,-2)-(-1,1,1)=(3,-1,-3)$$

この 2 つのベクトルは平行でなく、どちらも零ベクトルでないことに注意する。

この 2 つのベクトルとベクトル $(a,b,c)$ が直交するとする。従って、内積を計算すると

$$3a-3b+2c=0,\quad 3a-b-3c=0$$

が成り立つことが解る。この 2 つの式から、$a=\dfrac{11}{6}c,\ b=\dfrac{5}{2}c$ を得る。

このことから、直交するベクトルのうちの 1 つは、$(11,15,6)$ であることが解る。

問題の 3 つの点はいずれも平面上にあるので、どの点を選んでもよい。よって、平面の方程式は

$$11(x+1)+15(y-1)+6(z-1)=0$$

である。少し変形して求める。

解 $11x+15y+6z=10.$

ちなみに、平面のベクトル方程式は

$$(x,y,z)=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(3,-3,2)+t(3,-1,-3)+(-1,1,1)$$

$(s,t:$ パラメーター$)$ である。

(3) 直線 $\dfrac{x}{2}=y-2=\dfrac{z-1}{-3}$ と直交し、原点を通る平面

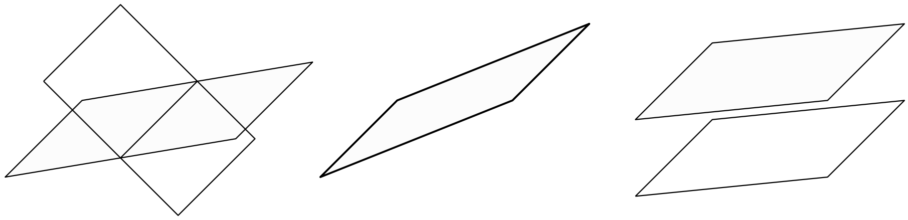
直線と直交するので、直線の方向ベクトル $(2,1,-3)$ が、平面の法線ベクトルとなる。よって、答えは $2x+y-3z=0$ である。

解 $2x+y-3z=0.$

### 3.4.3　平面の交わり

[1] 平面と平面の交わりは、3 通りが考えられる。

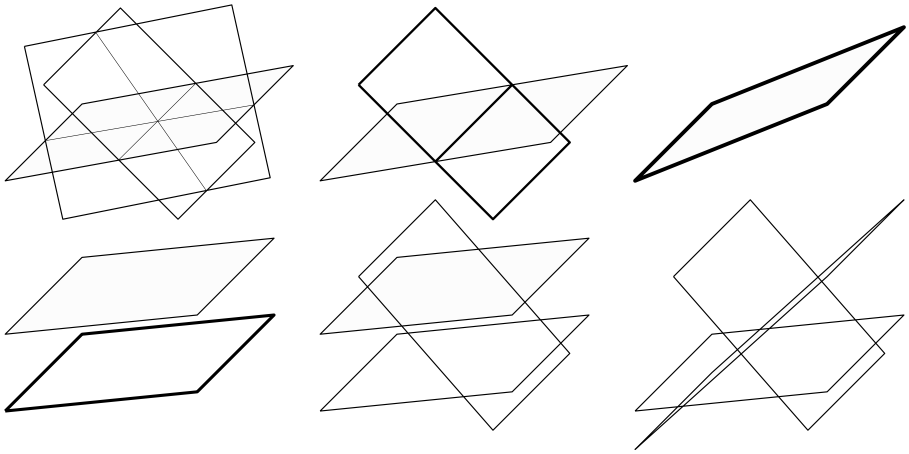
(1) 1 直線で交わる。　(2) 平面となる (一致する)。　(3) 交わらない (平行である)。



[2] 3 平面の交わりは、4 通りが考えられる。これら (の一部) の図は以下の通り。

(1) 1 点で交わる　　　　　　(2) 1 直線で交わる

(3) 平面となる (一致する)。　(4) 3 平面の共通の交点が存在しない。



(4-i) 2 つの平面が一致せず平行な場合、 残りの平面はどのような場合でも共通の交点がない。(下段左の図、中央の図、3 平面が一致せず平行な場合の図は略。)

(4-ii) 3 つの平面のうち任意の 2 平面を選びできる交線の直線の方向ベクトル 3 つがすべて一致 (平行) し、それら直線が共有点を持たない (各 2 平面の交線が一致しない)。

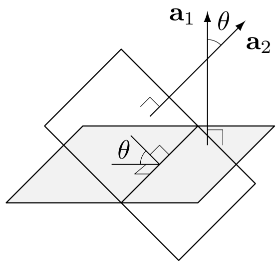
♣ **補足**　平面の方程式は $ax + by + cz = d$ である。よって、"3 平面の交わりを求める" ことは、連立方程式

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax + by + cz &=& d \\ a'x + b'y + c'z &=& d' \\ a''x + b''y + c''z &=& d'' \end{array} \right.$$

を解くことと同じである。(解が一点、直線または平面上の任意の点、解なし)

### 3.4.4　なす角

#### 平面と平面のなす角




2 つの平面の交わりが 1 直線の場合、2 つの平面のなす角 $\theta$ は、次で定める。

[1] 2 つの法線ベクトルのなす角 $\theta'$ が $0 \leqq \theta' \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ならば、$\theta = \theta'$ とする。

[2] 2 つの法線ベクトルのなす角 $\theta'$ が $\dfrac{\pi}{2} < \theta'$ ならば、$\theta = \pi - \theta'$ とする。

平面のなす角を法線ベクトルのなす角で定めることもあるが、本講義では $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定めることとする。

2 つの平面が一致する場合、または、交わらない場合は 2 つの平面のなす角は 0 であることに注意する。

**例 3.4.2.** 2 つの平面 $x + 2y - 3z = 0,\ 2x - 3y + z = 3$ のなす角を求めよ。

2 つの法線ベクトルは $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -3), \mathbf{a}_2 = (2, -3, 1)$ であり、法線ベクトルのなす角 $\theta'$ は、

$$\cos\theta' = \frac{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)}{|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|} = \frac{2-6-3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+9+1}} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

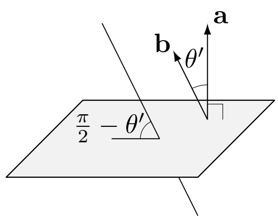
より、$\theta' = \dfrac{2}{3}\pi$ である。なす角を $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とするなら、なす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。

#### 直線と直線のなす角

空間内の 2 つの直線のなす角は (例え交点がなくても)、それぞれの方向ベクトルのなす角として定義する。

この場合も、なす角は一般的に、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定めることが多い。

#### 直線と平面のなす角




直線と平面のなす角 $\theta$ は、直線の方向ベクトルと平面の法線ベクトルのなす角 $\theta'$ を用いて、

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \theta'$$

で表すことができる。

ただし、法線ベクトルと方向ベクトルは図のように平面に対して同じ側に向いているものとする。すなわち、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となるように考える。

### 3.4.5　演習問題 IX

**問題 3.4.1.** 以下の空間内の平面に対し、平面の方程式と、平面のベクトル方程式をそれぞれ求めよ。

(1) 点 $(1,0,4)$ を通り、法線ベクトルが $(2,-2,1)$ の平面

(2) 点 $(-1,1,3)$ を通り、法線ベクトルが $(0,2,-1)$ の平面

(3) 3 点 $(-2,3,1)$, $(3,-2,2)$ $(1,-3,1)$ を通る平面

(4) 3 点 $(3,-1,0)$, $(1,-1,0)$ $(1,-1,1)$ を通る平面

(5) 直線 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-5}{2}$ と直交し、点 $(1,2,1)$ を通る平面

(6) 直線 $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-3}{-3}$ を含み、点 $(1,1,1)$ を通る平面

**問題 3.4.2.** 以下のそれぞれの $\theta$

(1) 2 つの平面 $x+2y+3z=4,\ 2x-3y-z=3$ のなす角を $\theta$ とする。

(2) 2 つの平面 $2x-y+2z=2,\ 3x+4y-z=1$ のなす角を $\theta$ とする。

(3) 2 つの直線 $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-2},\ \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z-3}{-5}$ のなす角を $\theta$ とする。

(4) 直線 $x+1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{3}$ と平面 $-2x+3y+z=2$ のなす角を $\theta$ とする。

**問題 3.4.3.** 以下の $\boxed{\qquad\qquad}$ に当てはまる適切なベクトルや座標もしくは直線の方程式を答えよ。

2 つの平面 $x-2y+2z=3,\ 3x-4y-2z=1$ の交点の集合を考える。

まず、2 つの式を連立して解くと、

$$(x,y,z)=t\,\boxed{\qquad\qquad}+\boxed{\qquad\qquad}\quad(t:\text{パラメーター})\tag{1}$$

となる。また、2 つの平面の法線ベクトルは $\boxed{\qquad\qquad}$, $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

次に、交点の集合から異なる 2 点 A, B をとると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ はこの 2 つの法線ベクトルと直交する[*1]。よって、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $k\boxed{\qquad\qquad}$ である。ただし、$k$ は 0 でない実数とする。

式 (1) より、交点として $\boxed{\qquad\qquad}$ が含まれていることが解る。

よって、交点の集合は方向ベクトルが $\boxed{\qquad\qquad}$ で点 $\boxed{\qquad\qquad}$ を通る直線であることが解る。

以上より、求める集合は直線 $\boxed{\qquad\qquad}$ 上の点集合となる。

♣ 補足 $\boxed{\qquad\qquad}$ に入るものは唯一ではない。

[*1] 法線ベクトルは、平面上の零ベクトルでない任意のベクトル $\mathbf{a}$ と直交する。

### 3.4.6　演習問題 IX の略解

**略解 3.4.1.** (1) 平面の方程式は $2(x-1)+(-2)(y-0)+1(z-4)=0$ を整理すると、$2x-2y+z=6$ である。

また、平面のベクトル方程式は $(x,y,z)=(3,0,0)+s(1,1,0)+t(-\frac{1}{2},0,1)$ である。ただし、$s,t$ はパラメーターとする。

(2) 平面の方程式は $0(x-(-1))+2(y-1)+(-1)(z-3)=0$ を整理すると、$2y-z=-1$ ($x$: 任意) である。

また、平面のベクトル方程式は $(x,y,z)=(0,0,1)+s(1,0,0)+t(0,1,2)$ である。ただし、$s,t$ はパラメーターとする。

(3) 3 つの点を順に A,B,C とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,-5,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,-6,0)$ となる。平面の法線ベクトルはこの 2 つのベクトルと直交するので、法線ベクトルを $(a,b,c)$ とすると $5a-5b+c=0,\ 3a-6b=0$ である。これを解くと、$(a,b,c)=(2,1,-5)$ を得る。よって、求める平面の方程式は $2x+y-5z=-6$ である。

また、平面のベクトル方程式は $(x,y,z)=(-3,0,0)+s(-1,2,0)+t(5,0,2)$ である。ただし、$s,t$ はパラメーターとする。

(4) (3) と同様に考えると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2,0,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,0,1)$ から、法線ベクトル $(a,b,c)$ は $-2a=0,\ -2a-c=0$ を満たす。これを解くと、$(a,b,c)=(0,b,0)$ を得る。よって、求める平面の方程式は $y=-1$ ($x,z$ : 任意) である。

また、平面のベクトル方程式は $(x,y,z)=(0,-1,0)+s(1,0,0)+t(0,0,1)$ である。ただし、$s,t$ はパラメーターとする。

(5) 直線と直交する平面の法線ベクトルは、直線の方向ベクトルと一致する。よって、平面の方程式は $2(x-1)+3(y-2)+2(z-1)=0$ を整理すると、$2x+3y+2z=10$ である。

また、平面のベクトル方程式は $(x,y,z)=(5,0,0)+s(-3,2,0)+t(-1,0,1)$ である。ただし、$s,t$ はパラメーターとする。

(6) 直線を含む平面なので、直線上の任意の点は、平面上の点でもある。例えば、$(0,4,0),(-2,0,3)$ は共有点である。よって、平面上の 3 点が得られたので、(3) と同様に考える。平面上の 2 つのベクトル $(1,-3,1),(-2,-4,3)$ と、法線ベクトル $(a,b,c)$ に対して $a-3b+c=0,\ -2a-4b+3c=0$ が成り立つ。これを解くと、$(a,b,c)=(1,1,2)$ を得る。よって、求める平面の方程式は $x+y+2z=4$ である。

また、平面のベクトル方程式は $(x,y,z)=(4,0,0)+s(-1,1,0)+t(-2,0,1)$ である。ただし、$s,t$ はパラメーターとする。

**略解 3.4.2.** (1) それぞれの法線ベクトルは $(1,2,3),(2,-3,-1)$ である。これを公式に代入すると

$$\cos\theta = \frac{2-6-3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+9+1}} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

となる。よって、$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ であるが、$\dfrac{\pi}{2}$ を超えているので、なす角 $\theta$ は $\pi - \dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{\pi}{3}$ である。

(2) それぞれの法線ベクトルは $(2,-1,2),(3,4,-1)$ である。これを公式に代入すると

$$\cos\theta = \frac{6-4-2}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{9+16+1}} = 0$$

となる。よって、なす角 $\theta$ は、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

(3) それぞれの方向ベクトルは $(-1,2,-2),(3,4,-5)$ である。これを公式に代入すると

$$\cos\theta = \frac{-3+8+10}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+16+25}} = \frac{15}{\sqrt{9}\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。よって、なす角 $\theta$ は、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

(4) 直線の方向ベクトルは $(1,2,3)$, 平面の法線ベクトルは $(-2,3,1)$ である。これを公式に代入すると

$$\cos\theta' = \frac{-2+6+3}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

となる。よって、なす角 $\theta$ は、$\theta = \dfrac{\pi}{2} - \theta' = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6}$.

**略解 3.4.3.** 2 つの平面 $x-2y+2z=3,\ 3x-4y-2z=1$ の交点の集合を考える。

まず、2 つの式を連立して解くと、

$$(x,y,z) = t(6,4,1) + (-5,-4,0) \qquad (t: \text{パラメーター}) \tag{1}$$

となる。また、2 つの平面の法線ベクトルは $(1,-2,2),\ (3,-4,-2)$ である。

次に、交点の集合から異なる 2 点 A, B をとると、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ はこの 2 つの法線ベクトルと直交する[*2]。よって、$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は $k(6,4,1)$ である。ただし $k$ は 0 でない実数とする。

式 (1) より、交点のとして $(-5,-4,0)$ が含まれていることが解る。

よって、交点の集合は方向ベクトルが $(6,4,1)$ で点 $(-5,-4,0)$ を通る直線であることが解る。

以上より、求める集合は直線 $\dfrac{x+5}{6} = \dfrac{y+4}{4} = z$ 上の点集合となる。

♣ **補足**　この問題を解くだけなら、(1) から $t$ を消去するだけで答えは得られる。

[*2] 法線ベクトルは、平面上の零ベクトルでない任意のベクトル $\mathbf{a}$ と直交する。

# 第4章

# 線型写像

## 4.1　線型写像と線型変換 (一次変換)

### 4.1.1　一次変換の定義と性質

まず、一般的な定義を紹介しておく。

**定義 (線型写像)**

$n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $m$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ への写像 $f$ が、

$$f(k\mathbf{x}+l\mathbf{y}) = kf(\mathbf{x})+lf(\mathbf{y}) \qquad \text{for} \ \ {}^\forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n,\ {}^\forall k,l\in\mathbb{R}$$

を満たすとき、写像 $f$ を**線型写像**という。
特に $m=n$ のとき、線型写像 $f$ を **線型変換** または **一次変換**という。

この定義から、次の命題が成り立つ。

**命題 (線型性)**

線型写像 $f$ において、次の性質が成り立つ。

(1) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})+f(\mathbf{y})$

(2) $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \quad \text{for} \ \ {}^\forall k\in\mathbb{R}$

この命題は上の定義において、$k=1, l=1$ とすれば (1)、$l=0$ とすれば (2) がいえることは容易にわかる。さらに、この性質 (2) から解るように、$k=0$ とすると

(0) $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$

が解る。これを 0 番目の命題とすることもある。実際に、ある写像が一次変換 (線型写像) か否か確認するとき、$\mathbf{o}$ の行先が $\mathbf{o}$ か確かめることは有用である。

♣ **補足**　線型写像の定義を、この命題で行う場合もある。すなわち、(1) と (2) を満たすような写像を線型写像と定義する。

**例題.** 写像 $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ

$$f(x,y) = (x-y, -x),\quad g(x,y) = (y, x-1),\quad h(x,y) = (x^2, y^2)$$

で定めるとき、写像 $f, g, h$ は一次変換か否か答えよ。

$f$ は一次変換の命題 (1), (2) を満たすので 一次変換である。
$g$ は一次変換でない。$g$ は命題 (0) を満たさない。
$h$ は命題 (0) は満たすが、命題 (1), (2) は満たさないので、$h$ は一次変換でない。

現段階では一般的な線型写像を扱うのではなく、平面上の一次変換に限った場合を考える。その場合、次のように定義する。

**定義 (平面上の一次変換)**

平面上の点 $(x, y)$ に対して、平面上の点 $(x', y')$ への変換で、行列と列ベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される変換を**一次変換**または**線型変換**という。このとき、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をこの一次変換の**表現行列**という。

**例 4.1.1.** 例題の写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, -x)$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。一次変換も、写像であるので、

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f : (x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$$

のように写像の記号を用いて表すこともある。

♠ **注意!** ”一次変換を求めよ”と”表現行列を求めよ”の違いを、明確に理解すること。よく知られている平面上の変換は一次変換である。

### 4.1.2　$x$ 軸に関する折返し

平面上の点 $(x, y)$ は $(x, -y)$ に移る。すなわち、一次変換を表す式では

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

と表される。すなわち、表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である。

### 4.1.3　$y$ 軸に関する折返し

平面上の点 $(x,y)$ は $(-x,y)$ に移る。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

### 4.1.4　拡大縮小

$x$ 軸方向に $k$ 倍, $y$ 軸方向に $l$ 倍拡大, 縮小すると点 $(x,y)$ は $(kx,ly)$ に移る。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kx \\ ly \end{pmatrix}$$

### 4.1.5　回転変換

点 $(x,y)$ を原点の周りに角度 $\theta$ だけ反時計回りに回転し得られる点 $(x',y')$ は

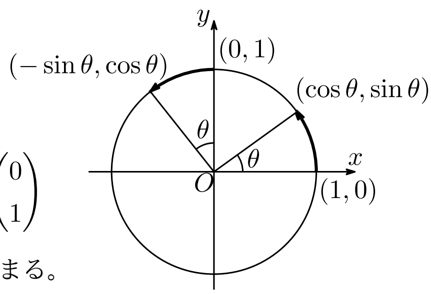
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。

図からわかるように、点 $(1,0)$ と $(0,1)$ をこの変換 $f$ で移すと、

$$f : (1,0) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$f : (0,1) \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta)$$

となる。




そこで、求める表現行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より反時計回りに角度 $\theta$ の回転に対する表現行列が求まる。

♣ **補足**　$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ や $f((x,y))$ のように ( や ) が 2 個続く場合、省略して 1 つにし、$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ や $f(x,y)$ と書くこともある。

### 4.1.6　原点を通る直線に関する対称移動

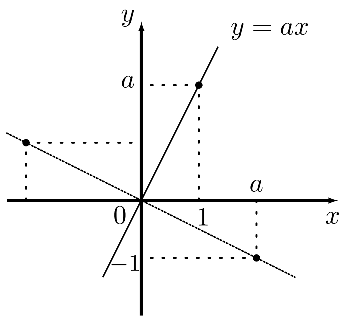
**定理 (直線 $y = ax$ に関する対称移動)**

平面上の点 $(x, y)$ を直線 $y = ax$ に関して対称に移動する一次変換は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。

(証明) 図を描いて考えると、直線上の点 $(1, a)$ は変わらず、$(a, -1)$ は $(-a, 1)$ に移る。




そこで、求める一次変換の表現行列を $A$ とすれば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで (行列と縦ベクトルの演算の定義を思い出して)、2 つの式をまとめると

$$\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。よって、表現行列 $A$ は

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{-1-a^2} \begin{pmatrix} -1 & -a \\ -a & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

♣ **補足**　直線と $x$ 軸とのなす角を $\theta$ とすると、$a = \tan\theta$ なので、$y = \tan\theta x$ に関する対称移動の表現行列を三角関数を用いて表すことも出来る。(参照 演習問題)

### 4.1.7　空間内の一次変換

空間 ($\mathbb{R}^3$) においても一次変換は 平面 ($\mathbb{R}^2$) と同様に定義できる。

**定義 (空間内の一次変換)**

空間における一次変換は、空間上の点 $(x, y, z)$ を $(x', y', z')$ に移す変換で

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって定められる。

そして、$\mathbb{R}^2$ で成り立った命題 (線型性) も成り立つ。

また、空間内でもよく知られた変換も一次変換となっている。以下に少し掲載しておく。

例 **4.1.2.** $x$-$y$ 平面に関する折返しは、空間内の点 $(x, y, z)$ は $(x, y, -z)$ に移る。この変換は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。$y$-$z$ 平面、$z$-$x$ 平面に関する折返しも同様に考えられる。

例 **4.1.3.** $z$ 軸の周りの角 $\theta$ 回転 (正の方向は $+\infty$ から見て反時計回り) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。$x$ 軸, $y$ 軸に関する回転も同様に考えられる。(各自求めよ。)

例 **4.1.4.** $x$-$y$ 平面への射影は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。$y$-$z$ 平面、$z$-$x$ 平面への射影も同様に考えられる。(各自求めよ。)

♣ **補足**　平面内も同様であるが、空間内においても、平行移動は写像 (変換) であるが、線型写像 (一次変換) ではない。明らかに性質 (0) を満たさない。

◇ **発展**　さらには、

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_3(x, y, z) = (x - 2y, x + 3z)$$

のような線型写像 (変換ではない）も考えられる。

### 4.1.8　演習問題 X

**問題 4.1.1.** 平面上の点 A(2, 1), B(0, −2), C(3, −1), D(−2, 1) に対して以下の座標を答えよ。

(1) 点 A を $x$ 軸に関して折返して得られる点 A'.

(2) 点 B を $y$ 軸に関して折返して得られる点 B'.

(3) 点 C を原点中心に反時計回りで角度 $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる点 C'.

(4) 点 D を $x$ 軸方向に 5 倍、$y$ 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍して得られる点 D'.

(5) (3) の点 C' を原点中心に反時計回りで角度 $\frac{3}{4}\pi$ 回転して得られる点 C".

**問題 4.1.2.** 次の写像 ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) は一次変換か否か答え、一次変換の場合は表現行列を求めよ。

(1) $f_1(x, y) = (x + y, x - y)$

(2) $f_2(x, y) = (x + y, xy)$

(3) $f_3(x, y) = (x + 1, y + 1)$

(4) $f_4(x, y) = (\sin x, \cos y)$

(5) $f_5(x, y) = (2x, 2y)$

(6) $f_6(x, y) = (x, 0)$

**問題 4.1.3.** $x$ 軸となす角が $\theta$ である直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する折返しに対応する一次変換の表現行列が

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

となることを示せ。

**問題 4.1.4.** ある日、Y.M さんは埋められた宝の位置を示す紙を見つけた。その紙には、

> 庭に梅の木、桃の木、桜の木が一本ずつ立っている。
> 梅から桜に向って歩数を数えならが歩き、桜の木に着いたら右に 90 度向きを変えて、同じ歩数だけ歩け。そこに棒 1 を立てよ。
> また、梅から桃に向かって歩数を数えながら歩き、桃の木に着いたら左に 90 度向きを変え、同じ歩数だけ歩け。そこに棒 2 を立てよ。この 2 本の棒を結ぶ線の中点に宝が有る。

と書かれていた。

しかし、今では庭の梅の木は枯れてしまい、跡形も無くなっている。(T_T)

桃の木と桜の木の位置から、宝が埋められている場所を Y.M さんに教えてあげよ。

### 4.1.9　演習問題 X の略解

**略解 4.1.1.** (1) $x$ 軸に関する折返しで、平面上の点 $(x, y)$ は $(x, -y)$ に移る。実際に一次変換の式に代入してみると、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる。問題文が横書きなので、A'$(2, -1)$.

(2) $y$ 軸に関して折返しの表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。よって、点 B$(0, -2)$ を $y$ 軸に関して折返して得られる点 B'$(x', y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる。問題文が横書きなので、B'$(0, -2)$.

(3) 原点中心に反時計回りで角度 $\dfrac{\pi}{4}$ 回転の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ である。よって、点 C$(3, -1)$ を原点中心に反時計回りで角度 $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られる点 C'$(x', y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる。よって、C'$(x', y')$ は、C'$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ となる。

(4) $x$ 軸方向に 5 倍、$y$ 軸方向に $\dfrac{1}{3}$ 倍する一次変換に、点 D を当てはめると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

となり、D'$(x', y')$ の座標は D'$\left(-10, \dfrac{1}{3}\right)$ となる。

(5) 原点中心に反時計回りで角度 $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転の表現行列は $\begin{pmatrix} \cos\frac{3}{4}\pi & -\sin\frac{3}{4}\pi \\ \sin\frac{3}{4}\pi & \cos\frac{3}{4}\pi \end{pmatrix}$ なので、点 C'$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を原点中心に反時計回りで角度 $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転して得られる点 C"$(x', y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって、C"$(x', y')$ は、 C"$(-3, 1)$ となる。

[注] 角度 $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し、さらに角度 $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転することは、角度 $\pi$ 回転するのと同じである。

**略解 4.1.2.** 一次変換の命題 (線型性) (0), (1), (2) をみたしているか確かめればよい。

(1) 一次変換であり、表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である。

(2) 一次変換でない。　(3) 一次変換でない。　(4) 一次変換でない。

(5) 一次変換であり、表現行列は $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である。

(6) 一次変換であり、表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。

**略解 4.1.3.** $a = \tan\theta$ なので、代入して計算して行く。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} -a^2+1 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\tan^2\theta+1}\begin{pmatrix} -\tan^2\theta+1 & 2\tan\theta \\ 2\tan\theta & \tan^2\theta-1 \end{pmatrix} \\
&= \cos^2\theta \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+1 & 2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ 2\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} & \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin^2\theta+\cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**略解 4.1.4.** まず、反時計回りに 90 度回転する一次変換を $f$ とする。このとき、時計回りに 90 度回転する一次変換 $f^{-1}$ は、$-f$ であることに注意する。

梅の木が無くなったので、桜の木を基準にそれぞれのベクトルを考える。問題文より、

$$\overrightarrow{\text{梅桃}} = \overrightarrow{\text{桜桃}} - \overrightarrow{\text{桜梅}}, \quad \overrightarrow{\text{桜棒}_1} = f^{-1}(\overrightarrow{\text{梅桜}}) = -f(\overrightarrow{\text{梅桜}}) = f(\overrightarrow{\text{桜梅}})$$

である。また、$\overrightarrow{\text{桃棒}_2} = f(\overrightarrow{\text{梅桃}})$ なので、

$$\overrightarrow{\text{桜棒}_2} = \overrightarrow{\text{桜桃}} + \overrightarrow{\text{桃棒}_2} = \overrightarrow{\text{桜桃}} + f(\overrightarrow{\text{梅桃}}) = \overrightarrow{\text{桜桃}} + f(\overrightarrow{\text{桜桃}} - \overrightarrow{\text{桜梅}}) = \overrightarrow{\text{桜桃}} + f(\overrightarrow{\text{桜桃}}) - f(\overrightarrow{\text{桜梅}})$$

となる。よって、

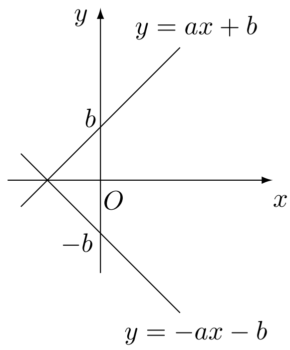
$$\overrightarrow{\text{桜宝}} = \frac{\overrightarrow{\text{桜棒}_1} + \overrightarrow{\text{桜棒}_2}}{1+1} = \frac{f(\overrightarrow{\text{桜梅}}) + \overrightarrow{\text{桜桃}} + f(\overrightarrow{\text{桜桃}}) - f(\overrightarrow{\text{桜梅}})}{2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{桜桃}} + f(\overrightarrow{\text{桜桃}})\right)$$

となる。

以上より、桜から桃に向って歩数を数えならが歩き、桃の木に着いたら左に 90 度向きを変えて、同じ歩数だけ歩く。そこに棒 3 を立て、棒 3 と桜の木を結ぶ線分の中点に宝があるよ。

# 4.2　図形の一次変換と面積変化

## 4.2.1　直線の一次変換




直線を一次変換するには、まず、直線を平面上の点の集合

$$\text{"直線 } y = ax + b\text{"} = \{(t, at + b) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

と思い、直線上の点を全て一次変換して得られる点の集まりを考えればよい。

例 **4.2.1.** 直線上の点を $x$ 軸に関する折返しをして得られる点は

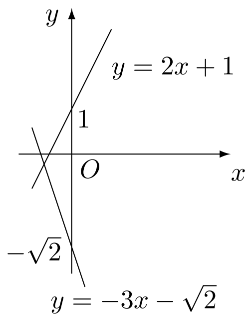
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -at - b \end{pmatrix}$$

である。

このベクトル方程式から $t$ を消去すると直線の方程式 $y = -ax - b$ になる。

よって、直線 $y = ax + b$ を $x$ 軸に関して折返すと直線 $y = -ax - b$ になる。

例 **4.2.2.** 直線 $y = 2x + 1$ を原点中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られる集合 (図形) を考える。




まず、この回転移動の表現行列は $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ である。

よって、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}(t + 1) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(3t + 1) \end{pmatrix}$$

から、

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t + 1) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(3t + 1) \end{cases}$$

となる。

第 1 式を 3 倍して足し合わせてパラメーター $t$ を消去すると $3x + y = -\sqrt{2}$ となり、直線の方程式をえる。

### 4.2.2　直線, 線分の一次変換

例 4.2.1, 4.2.1 で、直線は一次変換により、直線に移った。一般に、直線を一次変換すると 直線 か 1 点 に移される。(線分は線分か、1 点に移る。)

まず、ある直線に対し、直線上の任意の点はベクトルを用いて表すと $\mathbf{x} = \mathbf{b} + t\mathbf{a}$ である。この点を一次変換 $f$ で移すと

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{b} + t\mathbf{a}) \\ &= f(\mathbf{b}) + tf(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

である。ここで、$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{b}' = f(\mathbf{b}),\ \mathbf{a}' = f(\mathbf{a})$ と思えば

$$\mathbf{x}' = \mathbf{b}' + t\mathbf{a}'$$

と書き換えられる。

もし $\mathbf{a}' \neq \mathbf{o}$ なら、点 $\mathbf{b}'$ を通り, 方向ベクトルが $\mathbf{a}'$ の直線であり、$\mathbf{a}' = \mathbf{o}$ なら、1 点 $\mathbf{b}'$ である。

このとき、パラメーター $t$ に範囲指定が有れば、線分や半直線になる。

### 4.2.3　図形の面積

**例 4.2.3.** 4 点 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ を頂点とする正方形は一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって、4 点 $(0,0)$, $(\lambda,1)$, $(\lambda+1,1)$, $(1,0)$ を頂点とする平行四辺形に移る。

ここで、元々 $(0,0)$ と $(0,1)$ を結ぶ辺 (線分) は、一次変換によって $(0,0)$ と $(\lambda,1)$ を結ぶ辺 (線分) に移ることに注意する。

平面上に描かれた図形を一次変換すると面積はどのように変わるかを考える。

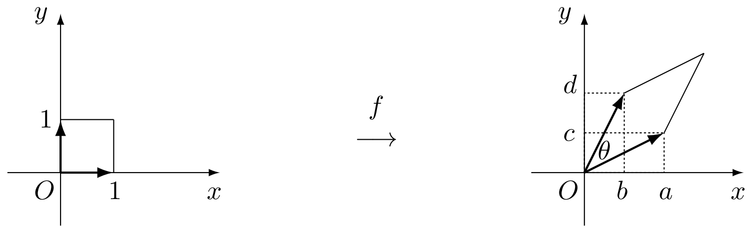
まず、どんな図形も小さな正方形の集まりで近似できる (詳しくは微分積分学、区分求積法)。そのため、これらの正方形がどのように移されるか考えれば良いのだが、実際、線分は一次変換で線分または 1 点に移るので、正方形の各頂点の移る先を考えればよい。

1 つの (面積 1 の) 正方形として、4 点 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$ を頂点とする図形を一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で移し、移った先の各頂点の座標を求める。

実際計算すると、4 点 $(0,0)$, $(a,c)$, $(a+b, c+d)$, $(b,d)$ を頂点とする平行四辺形に移る。もとの正方形の面積は 1 であるので、この平行四辺形の面積が解れば、この一次変換によって面積の変化量が解る。




まず始めに、$\mathbf{a} = (a,c)$, $\mathbf{b} = (b,d)$ とし、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を $\theta$ とする。このとき、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ で出来る平行四辺形の面積 $S$ は三角形 $(0,0),(a,c),(b,d)$ の面積の 2 倍だから、

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \\ &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a},\mathbf{b})^2} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)-(ab+cd)^2} \\ &= \sqrt{a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2} \\ &= |ad-bc| \end{aligned}$$

となる。以上より、図形の面積は、

$$\text{表現行列を} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{とする一次変換によって、} |ad-bc| \text{ 倍}$$

される。

♡ **注意!!!!!!** 面積が $|ad-bc|$ になるのではなく、$|ad-bc|$ 倍されることを忘れない。

**例 4.2.4.** 各頂点の座標が $(0,0),(2,0),(2,4)$ の三角形を、一次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で移すとき、移った先の図形の面積を考える。

まず、元の三角形の面積は 4 である。また、この一次変換の表現行列の行列式の値は、$1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$ である。従って、一次変換によって面積は $|-5|$ 倍されるので、移った先の図形の面積は $4 \times |-5| = 20$ となる。

### 4.2.4　演習問題 XI

**問題 4.2.1.** 以下の問いに答えよ。

(1) 点 $(2,1)$ を、直線 $y=3x$ に関して 対称に移動して得られる点の座標を答えよ。

(2) 点 $(2,1)$ を、直線 $y=-2x$ に関して 対称に移動して得られる点の座標を答えよ。

(3) 点 $(7,1)$ を、直線 $y=ax$ に関して 対称に移動して得られる点の座標が $(5,5)$ であった。

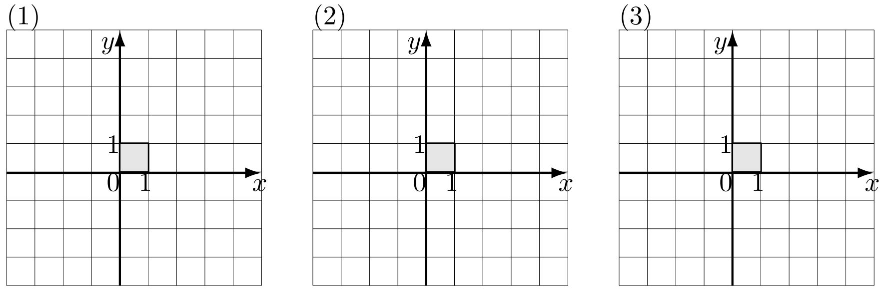
このとき、$a$ の値を答えよ。

**問題 4.2.2.** 平面上の 4 点 A$(0,0)$,B$(1,0)$,C$(1,1)$,D$(0,1)$ に対して、四角形 ABCD を考える。次の一次変換でこの四角形はどのような図形に移るか図示し、その面積も答えよ。

(1) $f_1(x,y)=(x+y,x-y)$　　(2) $f_2(x,y)=(2x+y,-2x-y)$

(3) $f_3(x,y)=(2x-y,-x+2y)$

(1)　(2)　(3)




**問題 4.2.3.** 平面上の 3 点 $A(0,0),B(1,0),C(1,1)$ に対して、三角形 $ABC$ を考える。次の一次変換でこの三角形を移し、得られる図形の面積を答えよ。

(1) $f_1(x,y)=(x+y,x-y)$

(2) $f_3(x,y)=(x-y,-x+y)$

(3) $f_3(x,y)=(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta),\ \ (0<\theta<\pi)$

**問題 4.2.4.** 平面上の直線 $l:y=2x-3$ に対して以下の直線の方程式を答えよ。

(1) 直線 $l$ を $x$ 軸に関して折返して得られる直線 $l_1$.

(2) 直線 $l$ を $y$ 軸に関して折返して得られる直線 $l_2$.

(3) 直線 $l$ を原点中心に反時計回りで角度 $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる直線 $l_3$.

(4) 直線 $l$ を $x$ 軸方向に 5 倍、$y$ 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍して得られる直線 $l_4$.

**問題 4.2.5.** $\mathbb{R}^2$ 上の任意の一次変換 $f$ を 1 つ固定し、平面上の 2 つの平行な直線をそれぞれ $f$ で移す。このとき、移された結果はそれぞれが点になるか、平行な直線になることを示せ。

### 4.2.5　演習問題 XI の略解

**略解 4.2.1.** (1) まず、この一次変換の表現行列を求める。

$$\frac{1}{3^2+1}\begin{pmatrix}-3^2+1 & 2\cdot 3\\ 2\cdot 3 & 3^2-1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-8 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

この表現行列を持つ一次変換 $f$ で $(2,1)$ を移すと

$$f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

となり、$(-1,2)$ に移る。

(2) (1) と同様にし、計算すると $(-2,-1)$ を得る。

(3) それぞれの座標を代入し、

$$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix}-a^2+1 & 2a\\ 2a & a^2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

を計算すると

$$6a^2-a-1=0,\quad 2a^2-7a+3=0$$

を得る。それぞれの解が $a=\frac{1}{2},-\frac{1}{3}$ と、$a=3,\frac{1}{2}$ であり、両式を満たすのは $a=\frac{1}{2}$ である。

**略解 4.2.2.** まず、それぞれの表現行列を求めるために、一次変換を行列を用いて表す。

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

一次変換 $f_i$ の表現行列を $A_i$ とする。それぞれの行列式の値を求めると、$|A_1|=-2$, $|A_2|=0$, $|A_3|=3$ となる。元の四角形の面積は 1 だったので、それぞれ移った先の図形の面積は (1) 2, (2) 0, (3) 3 となる。

次に、4 点の行き先を調べ、4 点がどのように移ったか考える。

(1) $f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

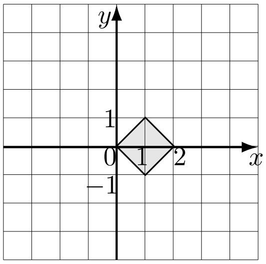
(2) $f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

この場合は、原点と点 $(3,-3)$ を結ぶ線分に移されることが解る。

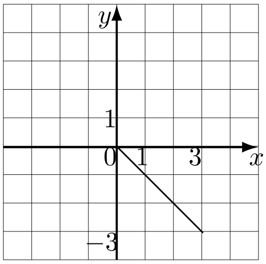
(3) $f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

それぞれを図示すると、以下のようになる。

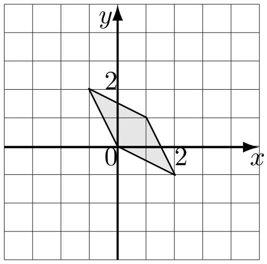
(1)




(2)




(3)




**略解 4.2.3.** それぞれ表現行列の行列式の値を計算すればよい。ただし、三角形の面積が $\dfrac{1}{2}$ であることの注意する。

(1) $|A| = -2$ より、面積は $\dfrac{1}{2} \times |-2| = 1$

(2) $|A| = 0$ より、面積は 0

(3) $|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より、面積は $\dfrac{1}{2} \times |1| = \dfrac{1}{2}$

**略解 4.2.4.** 直線 $y = 2x - 3$ 上の点は集合で $\{(t, 2t-3) | t \in \mathbb{R}\}$ と表わすことが出来る。後は、一次変換を用いて移すと以下の答えが得られる。

(1) $l_1 : y = -2x + 3$

(2) $l_2 : y = -2x - 3$

(3) $l_3 : y = -3x + 3\sqrt{2}$

(4) $l_4 : y = \dfrac{2}{15}x - 1$

**略解 4.2.5.** 2 つの直線のベクトル方程式は $\mathbf{x} = \mathbf{b} + s\mathbf{a}$, $\mathbf{x}' = \mathbf{c} + t\mathbf{a}$ $(s, t \in \mathbb{R})$ である。ただし、$\mathbf{a}$ は直線の方向ベクトルである。

それぞれの直線を一次変換 $f$ で移すと

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{b} + s\mathbf{a}) \\ &= f(\mathbf{b}) + sf(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}') &= f(\mathbf{c} + t\mathbf{a}) \\ &= f(\mathbf{c}) + tf(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

である。

ここで、$\mathbf{a}' = f(\mathbf{a})$ とすると、もし $\mathbf{a}' = \mathbf{o}$ なら、移された結果はそれぞれ 1 点となり、もし $\mathbf{a}' \neq \mathbf{o}$ なら、移された結果は同じ傾き（同じ方向ベクトル $\mathbf{a}'$）をもつ、すなわち平行な直線となる。

## 4.3　2 次曲線の一次変換

### 4.3.1　円の一次変換

ここまで直線や正方形を一次変換したが、それ以外の図形も一次変換してみる。

まず、円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ であり、円のベクトル方程式は

$$(x,y)=(a,b)+r(\cos\theta,\sin\theta) \tag{$*$}$$

($\theta$：パラメーター) であることに注意し、一次変換を行う。

**例 4.3.1.** 円 $(*)$ に対し $x$ 軸に関する折返しを考える。一次変換の式 例 4.1.2. を使うと

$$(x',y')=(a,-b)+r(\cos\theta',\sin\theta')$$

と変換される。(ただし $\theta'=-\theta$.)

**例 4.3.2.** 原点を中心とする半径 1 の円は $x^2+y^2=1$ である。この円を $x$ 軸方向に $a$ 倍, $y$ 軸方向に $b$ 倍 $(a,b>0)$ 拡大 (縮小) すると、変換後のベクトル方程式は

$$(x',y')=(a\cos\theta,b\sin\theta)$$

となる。よって、$\dfrac{x'}{a}=\cos\theta$, $\dfrac{y'}{b}=\sin\theta$ より $\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$ となる。これが**楕円の方程式**である。

### 4.3.2　放物線の一次変換

次に、円, 楕円以外の曲線として、一般の放物線 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ を平行移動した放物線 $y=ax^2$ を考える。ここで、$x=t$ とすれば $(x,y)=(t,at^2)$ である。

**例 4.3.3.** 放物線 $(x,y)=(t,at^2)$ を原点の周りに角度 $\dfrac{\pi}{4}$ だけ反時計回りに回転すると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}at^2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}at^2 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ここからまず $t^2$ を消去し、$x'+y'=\sqrt{2}t$ となり、$t=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}$ を代入すると

$$x'=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\cdot\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

から

$$\sqrt{2}ax^2+2\sqrt{2}axy+\sqrt{2}ay^2+2x-2y=0$$

を得る。

### 4.3.3　双曲線の一次変換

(標準形の) 双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

である。双曲線のパラメーター表示は、$(a\cosh t, b\sinh t)$ や $\left(a\cdot\dfrac{t+t^{-1}}{2}, b\cdot\dfrac{t-t^{-1}}{2}\right)$ が用いられる。

しかし、このようなパラメーター表示を一次変換し、後に $t$ を消去するのは大変である。そこで、次の方法を考える。

**例 4.3.4.** 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を原点の周りに角度 $\dfrac{\pi}{4}$ だけ反時計回りに回転させて得られる図形を考える。

まず、平面上に $x^2 - y^2 = 2$ をみたす点 $(x, y)$ の集合を考える。次に、この集合の要素を原点の周りに角度 $\dfrac{\pi}{4}$ だけ反時計回りに回転させ、得られた点の集合を考えればよい。

移った先の点を $(x', y')$ とすると、$(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で移される。ここで、行列 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ の逆行列 $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ を上式の両辺の左からかけると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

を得る。この

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{pmatrix}$$

は元の双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ 上の点なので[*1]、これらを $x^2 - y^2 = 2$ に代入すると

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 2$$

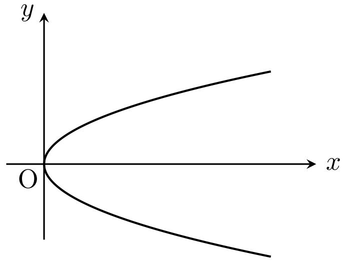
となり、計算すると新たな方程式 (一次変換後の図形の方程式) $y'x' = 1$ を得る。これは、$y = \dfrac{1}{x}$ のグラフの方程式である。

---

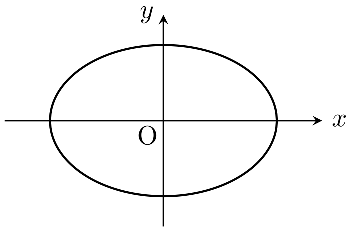
[*1] $(x', y')$ は一次変換後の図形上の点である。

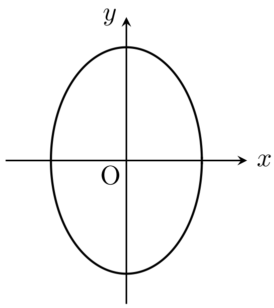
### 4.3.4　放物線、楕円、双曲線の標準形

$y^2 = 4px$ $(p \neq 0)$ を放物線の方程式の標準形という。

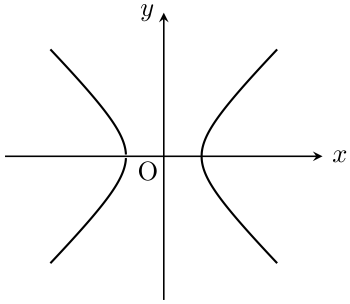


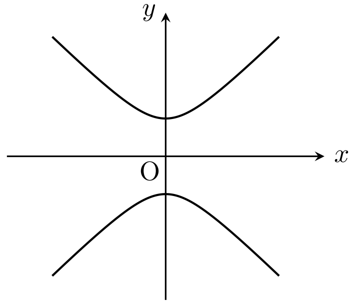

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を楕円の方程式の標準形という。ただし、左図は $a > b > 0$、右図は $b > a > 0$ の場合である。




$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad (a > 0, b > 0)$ を双曲線の方程式の標準形という。




$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$　　　$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$

### 4.3.5　演習問題 XII

**問題 4.3.1.** 一次変換 $f$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) 直線 $y = 2x - 1$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ。

(2) 直線 $l$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式が $y = 2x - 1$ であった。$l$ の方程式を求めよ。

(3) 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ。

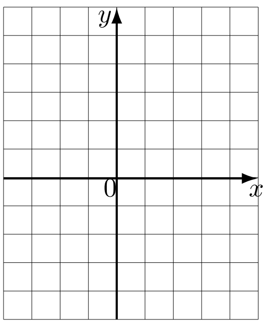
**問題 4.3.2.** 以下の 2 次曲線を原点の周りに角度 $\dfrac{\pi}{3}$ だけ反時計回りに回転して得られる曲線の方程式を答えよ。

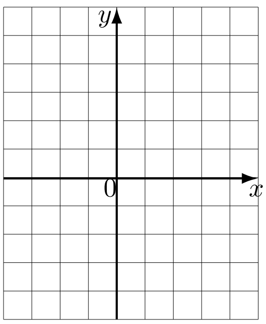
(1) 放物線 $y = 2x^2$

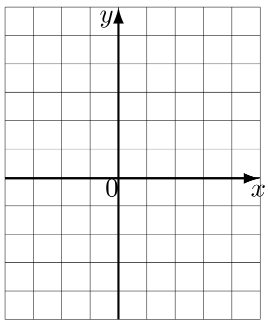
(2) 楕円 $4x^2 + 9y^2 = 16$

(3) 双曲線 $4x^2 - 9y^2 = 16$

**問題 4.3.3.** 上の問題で求めた 2 次曲線のグラフの概形をそれぞれ描け。ただし、目盛は自由に設定して良い。








**問題 4.3.4.** 一次変換 $f$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) $(1, 2)$ を $f$ で変換して得られる点を求めよ。

(2) 直線 $y = 2x - 1$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 放物線 $y = 2x^2$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ。

(4) 双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ を $f$ で変換して得られる図形の方程式を求めよ。

### 4.3.6　演習問題 XII の略解

**略解 4.3.1.** 一次変換 $f:(x,y)\mapsto(x',y')$ に対して、$(x,y)$ と $(x',y')$ の関係を表す関係式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の両辺に、表現行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を得る。従って、一次変換 $f$ によって $(x,y)$ を移したとき、移った先の点 $(x',y')$ との関係式 $x=x'+y', y=x'+2y'$ を得る。

(1) $y=2x-1$ に上で求めた関係式を代入すると、

$$x'+2y'=2(x'+y')-1$$

であり、計算すると答えは

$$x=1$$

となる。(最後に $x'$ を $x$ に書き直している)

(2) 移った先の方程式が $y=2x-1$ なので、$(x',y')=(x',2x'-1)$ を上の関係式に代入すると、

$$x=x'+2x'-1, y=x'+2(2x'-1)$$

を得る。

ここから、$x'$ を消去すると、答えは

$$5x-3y=1$$

となる。

(3) $x^2-y^2=2$ に上で求めた関係式を代入すると、

$$(x'+y')^2-(x'+2y')^2=2$$

であり、計算すると答えは、

$$2xy+3y^2+2=0$$

となる。

**略解 4.3.2.** この一次変換は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であり、先ほどの問いと同じように表現行列の逆行列を用いて書き換えると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

を得る。よって、関係式

$$x = \frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right),\ y = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x' + y'\right) \quad \cdots \quad (*)$$

を得る。

(1) $y = 2x^2$ に $(*)$ を代入すると、$\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x' + y'\right) = 2\left(\frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)\right)^2$ となる。

これを計算すると、

$$x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + \sqrt{3}x - y = 0$$

となる。

(2) $4x^2 + 9y^2 = 16$ に $(*)$ を代入すると、$4\left(\frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)\right)^2 + 9\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x' + y'\right)\right)^2 = 16.$

これを計算すると、

$$31x^2 - 10\sqrt{3}xy + 21y^2 = 64$$

となる。

(3) $4x^2 - 9y^2 = 16$ に $(*)$ を代入すると、$4\left(\frac{1}{2}\left(x' + \sqrt{3}y'\right)\right)^2 - 9\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}x' + y'\right)\right)^2 = 16.$

これを計算すると、

$$-23x^2 + 26\sqrt{3}xy + 3y^2 = 64$$

となる。

**略解 4.3.3.** 略.

**略解 4.3.4.** (1) $(-2, 0)$　　(2) $y = -1$

(3),(4) 与えられた一次変換の表現行列の逆行列 $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ を用いると関係式

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x' + 3y' \\ 2x' + 4y' \end{pmatrix}$$

を得る。これを (3) $y = 2x^2$, (4) $x^2 - y^2 = 2$ に代入し、整理すると、以下となる。

(3) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 2x + 4y = 0$　　(4) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 8 = 0$

# 4.4　合成変換と逆変換

## 4.4.1　合成変換

ここでは §1.2.6, §1.2.7 で述べた合成写像、逆写像について、一次変換 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に限った場合を考える。すなわち、$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の一次変換の合成変換と逆変換を扱い、一次変換の表現行列を用いて考える。

**定義 (合成変換)**

2 つの一次変換 $f$,$g$ がそれぞれ以下で与えられているとする。

$$f\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad g\ :\ \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

これは、平面上の点 $(x,y)$ が $f$ で、$(x',y')$ に移り、$(x',y')$ は $g$ で $(x'',y'')$ に移る。式を代入してみると、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。これは、点 $(x,y)$ から点 $(x'',y'')$ への一次変換である。この変換を $f$ と $g$ の**合成変換**といい、$g \circ f$ とかく。合成変換 $g \circ f$ の表現行列は $BA$ である。

♠ **注意!**　$f$,$g$ の順序と $g \circ f$ の順序に注意する。[ $g\left(f(\mathbf{x})\right) = g \circ f(\mathbf{x})$ ]

**例 4.4.1.** 平面において、一次変換 $f, g$ を以下で定める。このとき、合成変換 $g \circ f$ と $f \circ g$ を求めよ。また、それぞれの合成写像で $(1,1)$ を移したとき、移る点の座標を求めよ。

$$f\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad g\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g \circ f\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, f \circ g\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$g \circ f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, f \circ g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

♠ **注意!**　明らかに $g \circ f \neq f \circ g$ が解る。

ちなみに、

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ g\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix},\ g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である。

### 4.4.2　逆変換、正則変換

**定義 (逆変換)**

写像 $f : X \to Y$ が全単射のとき、$X$ の要素 $\mathbf{x}$ に対応する $Y$ の要素を $\mathbf{x}$' とすると、$\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ を満たす $\mathbf{x}$ はただ 1 つに決まる。
従って、この $Y$ の要素 $\mathbf{x}$' から $X$ の要素 $\mathbf{x}$ への対応は写像と考えることができる。
この写像を $f$ の**逆変換**といい、$f^{-1}$ で表す。

**例 4.4.2.** 以下の一次変換 $f$ は全単射でなく、$g$ は全単射である。従って、$f$ は逆変換が無く、$g$ は逆変換が存在する。

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad g \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**疑問** では、どのような場合に逆変換は存在し、どのような場合に逆変換は存在しないのか、すなわち、どのような一次変換が全単射となるのか。

逆変換の存在

一次変換 $f$

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

において、表現行列の行列式の値が 0 でないとき、$f$ は逆変換を持ち、その逆変換 $f^{-1}$ は

$$f^{-1} \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

となる。

式からも解るように、$f^{-1}$ の表現行列は、$f$ の表現行列の逆行列である。

**正則変換, 正則行列**

逆変換が存在する一次変換を**正則変換**といい、正則変換の表現行列を**正則行列**という。

♣ **補足** 一般の行列, 変換で考えれば、以下が成り立つ。

(1) $det(A) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ A$ に逆行列が存在 $\Leftrightarrow \ A$ は正則行列

(2) 変換 $f$ が全単射 $\Leftrightarrow \ f$ に逆変換が存在 $\Leftrightarrow \ f$ は正則変換

一般の行列において、正則行列の定義は (1) で行うことが多い。

**例 4.4.3.** 一次変換 $f$ を

$$f\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定めるとき、逆変換 $f^{-1}$ を考える。また、$f({}^t(1,1))$ と $f^{-1}({}^t(3,7))$ を計算し、移り合っていることが解る。

$$f^{-1}\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad f^{-1}\ :\ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>逆行列の性質</u> 正則行列 $A$,$B$ に対して、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。

<u>逆変換の性質</u> 正則変換 $f$,$g$ に対して、

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

が成り立つ。

<u>行列式の性質</u> 正方行列 $A$,$B$ に対して、

$$|AB| = |A||B|$$

が成り立つ。(証明は少し難しいので、 2 次正方行列での確認を各自にゆだねる。)

**例 4.4.4.** 例 4.4.1 の一次変換 $f, g$ において、合成変換 $g \circ f$ で点 $(a,b)$ を移したとき、移った先が $(1,1)$ であった。点 $(a,b)$ を求めよ。

合成変換 $g \circ f$ は、

$$g \circ f\ :\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

であった。この表現行列の行列式の値は $-1$ なので、逆行列が存在する。逆行列を求めると、$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ なので、逆変換を表す式は

$$(g \circ f)^{-1}\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

となる。ここで、$(x,y) = (a,b)$、$(x',y') = (1,1)$ とすると、

$$(g \circ f)^{-1}\ :\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

となり、$(a,b) = (5,-8)$ である。

### 4.4.3　演習問題 XIII

**問題 4.4.1.** $f_1, f_2, f_3, f_4, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする。このとき、$f_1, f_2, f_3, f_4$ は正則変換か、否か答えよ。

(1) $f_1 : f_1(x, y) = (3x - 5y, 2x + 3y)$

(2) $f_2 : f_2(x, y) = (2x - y, -4x + 2y)$

(3) $f_3 = f_2 \circ f_1$

(4) $f_4 = g \circ h$ ただし、$g(x, y) = (x + y, -x + 2y)$, $h(x, y) = (3x - y, x + 2y)$.

**問題 4.4.2.** $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ とする。このとき、以下の一次変換の表現行列を求めよ。
(注意) 一次変換を表す式では無く、表現行列を求める。

(1) $f_1 : f_1(x, y) = (x, x + 3y)$

(2) $f_2 : f_2(x, y) = (x - y, x + y)$

(3) $f_1 \circ f_2$

(4) $(f_2 \circ f_1)^{-1}$

**問題 4.4.3.** 平面において、一次変換 $f$ を $y$ 軸に関する折返しとし、一次変換 $g$ を原点中心に角度 $\dfrac{3}{4}\pi$ 回転とする。このとき次の問に答えよ。

(1) 合成変換 $f \circ g$ と $g \circ f$ を求めよ。

(2) $f \circ g \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $g \circ f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を求めよ。

(3) 合成変換 $g \circ g \circ g$ を求めよ。

(4) 一次変換 $g$ によって直線 $l$ は $y = 2x$ となった。$l$ の方程式を求めよ。

**問題 4.4.4.** 平面において、以下の一次変換 $f, g$ に対して、(1) から (3) に答えよ。

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad g \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(1) $f$ と $g$ は、正則変換か否か、正則変換なら逆変換を求めよ。

(2) $f$ で $(1, 2)$ に移る点を求めよ。　(ヒント：1 点に移るものが 1 点とは限らない)

(3) (2) で求めた点を $(s, t)$ とする。$g$ で $(s, t)$ に移る点を求めよ。

### 4.4.4　演習問題 XIII の略解

**略解 4.4.1.** $f_1, f_2, f_3, f_4, g, h$ の表現行列を $A_1, A_2, A_3, A_4, A_g, A_h$ とする。

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ より、$|A_1| = 19 \neq 0$ なので、$f_1$ は正則変換。

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ より、$|A_2| = 0$ なので、$f_1$ は正則変換でない。

(3) $f_2$ が正則変換でないので、$f_3$ も正則変換出ない。($|A_1A_2| = |A_1||A_2|$)

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ より、$|A_4| = 19 \neq 0$ なので、$f_4$ は正則変換。

**略解 4.4.2.** (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$

**略解 4.4.3.** (1) $f$ と $g$ の行列表現はそれぞれ、

$$f \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad g \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。よって、それぞれの合成変換は

$$f \circ g \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ g \circ f \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。

(2) (1) で求めた合成変換に代入すると、

$$f \circ g \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

$$g \circ f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

である。

(3) $g \circ g \circ g$ は、原点中心に反時計回りで角度 $\left(\dfrac{3}{4}\pi \times 3\right)$ だけ回転した一次変換である。したがって、角度 $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転したものと同じである。

$$g \circ g \circ g \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(4) $g$ で移った先が $y' = 2x'$ なので、

$$\begin{pmatrix} x' \\ 2x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。よって、

$$x' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y,\ 2x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

なので、$x'$ を消去すると　$y = -3x$ となる。

**略解 4.4.4.** (1) $f$ は正則変換でない。$g$ は正則変換である。

$g$ の逆変換は

$$g^{-1} \ : \ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である。

(2) 一次変換 $f$ で、$(1, 2)$ に移る点 $(x, y)$ を求めるには

$$f \ : \ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす $(x, y)$ を考える。これは、

$$2x - y = 1, \quad 4x - 2y = 2$$

なので、両方の式を満たす点 $(x, y)$ は、直線 $2x - y = 1$ 上の点である。

(3) (2) で求めた点は、直線 $2x - y = 1$ 上の点なので、$(s, t) = (s, 2s - 1)$ と表すことができる。また、(1) の解より、求めたい点を $(x, y)$ とすると、

$$g^{-1} \ : \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 2s - 1 \end{pmatrix}$$

から、

$$x = -2s + 1, \quad y = s$$

である。

よって、パラメーター $s$ を消去すると、直線 $x + 2y = 1$ 上の点となる。

## 4.5　付録

### 4.5.1　$f$-不変部分集合

**例題.** 直線 $y = ax$ が一次変換 $f$

$$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

によって自分自身に移る ($f$ の像が直線 $y = ax$ に一致する) とき、$a$ の値を求めよ。これは、

$$\{ f(x,y) \mid (x,y) \text{ は直線 } y = ax \text{ 上の点 } \} = \{ (x,y) \mid (x,y) \text{ は直線 } y = ax \text{ 上の点 } \}$$

を満たすとき、$a$ の値を求めることと同義である。

**$f$-不変部分集合**

写像 $f : X \to Y$ と、$X$ のある部分集合 $S$ に対して、像 $f(S)$ が、$f(S) = S$ を満たすとき、集合 $S$ を **$f$-不変部分集合** または、$S$ は $f$ に関して**不変**という。

例 **4.5.1.** どんな一次変換 $f$ に対しても、$\{\mathbf{o}\}$ は $f$-不変部分集合である。

### 4.5.2　固有値、固有ベクトル

**定義 (固有値、固有ベクトル)**

正方行列 $A$ に対して、

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

をみたす<u>零ベクトルでない</u>ベクトル $\mathbf{v}$ を $A$ の **固有ベクトル**といい、$\lambda$ を $A$ の **固有値**という。

♡ **注意!**　固有値、固有ベクトルはセットであり、

”固有値 $\lambda$ に対する (属する) 固有ベクトル $\mathbf{v}$”

という表現を使う。

♡ **注意!**　固有ベクトルは (実ベクトルとして) 必ず存在するとは限らない。また、存在する場合も 1 種類とは限らない。

**例 4.5.2.** 行列 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ において、$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおき、$\lambda\mathbf{v} = \lambda E\mathbf{v}$ と思うと、$A\mathbf{v} = \lambda E\mathbf{v}$ は

$$(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。これは連立方程式

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + 2y &= 0, \\ x + (4-\lambda)y &= 0 \end{cases}$$

に書き換えられるので、第 2 式より $x = -(4-\lambda)y$ となるので第 1 式に代入すると

$$-(3-\lambda)(4-\lambda)y + 2y = 0$$

すなわち

$$\{(3-\lambda)(4-\lambda) - 2\}\, y = 0$$

である。$y = 0$ なら $x = 0$ となり固有ベクトルとならないため $y \neq 0$ を考える。

よって、

$$(3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 0 \qquad \cdots (*)$$

を解くと、$\lambda = 2, 5$ を得る。

$\underline{\lambda = 2 \text{ のとき}}$ $x = -(4-\lambda)y$ に代入すれば $x = -2y$ となり、連立 1 次方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

$\underline{\lambda = 5 \text{ のとき}}$ $x = y$ となるので、連立 1 次方程式の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)$$

となる。

以上より、行列 $A$ の固有値は 2 と 5 で、固有値 2 に対する固有ベクトル(の 1 つ)は $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、固有値 5 に対する固有ベクトル(の 1 つ)は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、固有値 5 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここで行列 $A$ と式 $(*)$ を見比べると、$(*)$ は行列 $A-\lambda E$ の行列式 $|A-\lambda E| = (3-\lambda)(4-\lambda)-2\cdot 1$ が 0 となる $\lambda$ を求めている。すなわち、

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda)-2\cdot 1 = 0$$

で与えられている。

この $\det(A-\lambda E)=0$ を行列 $A$ の **固有方程式**という[*2]。固有方程式を解いて得た固有値に対して、固有ベクトルを求める。

**練習問題 4.5.1.** 以下の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>(1) $\lambda=-4, \mathbf{v}=(1,-5)$, $\lambda=2, \mathbf{v}=(1,1)$</u>　　<u>(2) $\lambda=3, \mathbf{v}=(1,1)$</u>

♡ **注意!**　(2) のように固有値が 1 つしか無く、固有ベクトルが 1 種類しかないこともある。厳密には、3 が 2 つあると考え、 **重複度**が 2 であるという。

<u>ここで、最初の例題の考え方。</u>

直線 $y=ax$ 上の点を直線 $y=ax$ 上の点に移す　$\Rightarrow$　$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}$ に移す

$\Rightarrow$　$f\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix}$ を満たす　$\Rightarrow$　$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ を満たす

$\Rightarrow$　$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ の固有ベクトルである。

$\Rightarrow$　練習問題 (1) より、$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

1 次変換 $f$ の表現行列を $A$ とすると、$A$ の固有値 $\lambda$ と $\lambda$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v}$ は $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ を満たす。すなわち、

$$f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$$

であり、これは、ベクトル $\mathbf{v}$ を 1 次変換するとそのベクトルの定数 $(\lambda)$ 倍されたと読み取れる。このことより、固有ベクトルを方向ベクトルとする直線上の点は、1 次変換 $f$ によってこの直線上の点に移る。

従って、例題の答えは 練習問題 4.5.1.(1) より、<u>答え. $a=-5,1$　　$(y=-5x$ と $y=x)$</u>

---

[*2] $\det(\lambda E - A)=0$ と定める書籍もある。

### 4.5.3　行列の対角化

行列 $A$ の固有ベクトルを並べて正則行列 $P$ が出来るとき、行列 $P$ によって $A$ は対角行列に変形できる。これを行列 $A$ の **対角化**という。次の問で具体例を考える。

**例 4.5.3.** 行列 $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ の $n$ 乗 $A^n$ を求める。

$A$ の固有値、固有ベクトルは 例 4.5.2 で求めた通り、固有値は $2,5$ で、固有値 $2$ に対する固有ベクトルは $(-2,1)$ で、固有値 $5$ に対する固有ベクトルは $(1,1)$ である。よって、

$$A\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

である。これをまとめると、

$$\left(A\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\ \ A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)=\left(2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\ \ 5\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

となる。(注: 右辺左辺とも $2\times 2$ の行列である。) さらに、この両辺は

$$A\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

と変形出来る (行列とベクトルの積の定義を思い出す)。

ここで固有値、固有ベクトル $\lambda_1=2,\ \lambda_2=5,\ \mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix},\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ を用いて、行列 $P,D$ を

$$P=(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

と置く。このときこの $D$ が対角行列であることに注意する。

この $P,D$ を用いて式 (4.1) を書き表すと、

$$AP=PD \tag{4.2}$$

となる。ここで、$P$ の逆行列を求めると、$P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ であり、この $P^{-1}$ を (4.2) の両辺の左からかけると

$$P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

となる。以上で行列 $A$ は行列 $P$ によって行列 $D$ に**対角化**されたことになる。

逆に (4.2) の両辺の右から $P^{-1}$ をかけると $A = PDP^{-1}$ となる。この両辺を $n$ 乗すると

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1}$$

となる。よって $A^n$ は、値を代入して計算すると

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### 4.5.4 対角化可能

前節で” 正則行列 $P$ が出来るとき” と述べた。これは、別の言い方をすると、

**対角化可能**

2 次正方行列 $A$ が**対角化可能である**のは、**平行でない** 2 つ (以上) の固有ベクトルをもつときである。

♡ **注意!** 固有値が 2 種類ではない。1 つの場合でも対角化可能である場合はある。

**例 4.5.4.** 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを考える。

明らかに固有値は 1 のみであり、さらに対角化可能である。(すでに対角化済み!?)

実際に固有ベクトルを求めてみると

$$(A - 1E)\mathbf{v} = \mathbf{o} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。これを満たす固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は、平面上のどんなベクトルでも構わない。例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルであり、平行でない。

♡ **注意!** 固有値が (実数の範囲で) 存在しない場合もある。

**例 4.5.5.** 行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(0 < \theta < \pi)$ の固有値と固有ベクトルを考える。

まず、

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

であり、$\det(A-\lambda E)=0$ を解くと、

$$\lambda = \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta}$$

となる。よって、固有値は複素数となる。もちろん固有ベクトルも複素ベクトルとなる。

これは幾何学的に考えれば、$\theta$ 度 $(0<\theta<\pi)$ の回転によって実数倍されるような点は (原点を除く) 実平面上に存在しないとも読み取れる。

### 4.5.5　演習問題 XIV

**問題 4.5.1.** 行列

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -2 & -1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$$

に対して、以下の問いに答えよ。

(1)$A,B,C,D$ の各行列に対して、固有値とその固有値に属する固有ベクトル (の 1 つ) をすべて求めよ。

(2) 一次変換 $f:\mathbf{x}'=M\mathbf{x}$ によって、直線 $y=ax$ を移すと、$f$ の像が直線 $y=ax$ となる。$M$ が $A,B,C,D$ のそれぞれのとき $a$ の値を求めよ。

**問題 4.5.2.** $A$ を 2 次正方行列とするとき、以下を答えよ。

(1) ベクトル $\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$ が $A$ の 0 でない固有値に対する固有ベクトルになることが、$A$ を表現行列とする 1 次変換 $f$ が直線 $y=kx$ を直線 $y=kx$ にうつすための必要十分条件であることを示せ。

(2) $\lambda$ が $A$ の固有値ならば、$A-\lambda E$ が表現行列である 1 次変換は単射 (1 対 1 写像) ではないことを示せ。

**問題 4.5.3.** 以下の行列に対して、対角するための正則行列 $P$ を求め、正則行列 $P$ が存在する場合は、対角化せよ。

(i) $A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -4\end{pmatrix}$,　(ii) $A_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$,　(iii) $A_3=\begin{pmatrix}-1 & 9\\ -1 & 5\end{pmatrix}$,

(iv) $A_4=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}$,　(v) $A_5=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$,　(vi) $A_6=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 2\end{pmatrix}$

**問題 4.5.4.** $\lambda$ が $A$ の固有値であるとき、$A-\lambda E$ を表現行列に持つ 1 次変換は単写でないことを示せ。

### 4.5.6 演習問題 XIV の略解

**略解 4.5.1.** (1) $A$ の固有値を求めるには、$|A-\lambda E|=0$ となる $\lambda$ を求める。

$$\left|\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(4-\lambda)-10=(\lambda-6)(\lambda+1).$$

したがって $A$ の固有値は $-1, 6$ である。

まず、固有値 $-1$ に対する固有ベクトル〔$(A-E)\mathbf{x}=\mathbf{o}$ を満たす $\mathbf{x}$〕を求める。

$$A-(-1)E=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

より、$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ を満たす $x, y$ は $x+y=0$ である。$y=t$ と置いて考えると $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}t \quad (t\in\mathbb{R})$ となり、固有値 $-1$ に対する固有ベクトル (の 1 つ) は $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ である。

同様にして固有値 6 に対する固有ベクトル (の 1 つ) は $\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\ 1\end{pmatrix}$ や $\begin{pmatrix}2\\ 5\end{pmatrix}$ となる。

$B$ の固有値を求めると、$0, 2$ であり、固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, 固有値 0 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ である。

$C$ の固有値を求めると固有値は $2, 3$ であり、固有値 2 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\ 1\end{pmatrix}$, 固有値 3 に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ である。

$D$ の固有値を求めると $-3, -3$ であり、固有ベクトルは $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ である。

(2) $M=A$ のとき、$a=-1, \dfrac{5}{2}$ で、直線は $y=-x, y=\dfrac{5}{2}x$,
$M=B$ のとき、$a=1$ で、直線は $y=x$,
$M=C$ のとき、$a=-\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}$ で、直線は $y=-\dfrac{2}{3}x, y=-\dfrac{1}{2}x$,
$M=D$ のとき、$a=\dfrac{1}{2}$ で、直線は $y=\dfrac{1}{2}x$

(注意) $M=B$ のとき、$y=-x$ は当てはまらない。固有値が 0 なので、$f\begin{pmatrix}-t\\ t\end{pmatrix}=\mathbf{o}$ となり、移った先は直線ではない。

**略解 4.5.2.** (1)$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$ は直線 $y=kx$ の方向ベクトルなので、直線 $y=kx$ は、表現行列が $A$ の 1 次変換によって $A\mathbf{x}$ を方向ベクトルに持ち、原点を通る直線に移る。よって、

$$\begin{aligned}\text{1 次変換 } f \text{ が直線 } y=kx \text{ を直線 } y=kx \text{ に移す} &\Leftrightarrow A\mathbf{x} \text{ は } \mathbf{x} \text{ に平行}\\ &\Leftrightarrow A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \text{ を満たす } \lambda\neq 0 \text{ がある}\end{aligned}$$

なお、$\lambda=0$ の時は直線 $y=kx$ は原点 $O$ に移される。

(2) $\lambda$ が $A$ の固有値ならば、$A\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ を満たすベクトル $\mathbf{x}\neq 0$ が存在する。

$$(A-\lambda E)\mathbf{x}=A\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=\mathbf{o}=(A-\lambda E)\mathbf{o}$$

なので $A-\lambda E$ の表す 1 次写像は相異なる二つのベクトル $\mathbf{o},\mathbf{x}$ を同じベクトル $\mathbf{o}$ に移す。よって単射（1 対 1 写像）ではない。

**略解 4.5.3.** 対角化された行列を $D$、対角化に用いる正則行列を $P$ とする。

(i) $P=\begin{pmatrix}3&1\\-2&-1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$

(ii) $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}$

(iii) 対角化不可能

(iv) $P=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

(v) $P=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}4&0\\0&6\end{pmatrix}$

(vi) $P=\begin{pmatrix}1&5\\-1&4\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}-2&0\\0&7\end{pmatrix}$

**略解 4.5.4.** $\lambda$ に対する固有ベクトルを $\mathbf{v}$ とする。固有値、固有ベクトルの定義より

$$(A-\lambda E)\mathbf{v}=\mathbf{o}$$

である。従って、表現行列が $A-\lambda E$ の 1 次変換は $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$ と $\mathbf{o}$ を $\mathbf{o}$ に移す。

このことから、この 1 次変換は単射ではない。

### 4.5.7 ケーリー・ハミルトンの定理

行列の $n$ 乗を求める方法として、行列の対角化以外にケーリー・ハミルトンの定理を用いる方法がある。

**定理 (ケーリー・ハミルトンの定理 [2 次])**

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、次が成り立つ。

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O.$$

定理の行列 $A$ に対して、固有多項式 $\Phi_A(\lambda)$ は $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$ である。
この $\lambda$ を $A$ に変えて、定数項 1 を単位行列 $E$ に変えたものを考える。

[証明] 実際に左辺を計算して零行列になることを確かめればよい。

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+bc-(a^2+ad)+ad-bc & ab+bd-(ab+bd) \\ ac+cd-(ac+cd) & bc+d^2-(ad+d^2)+ad-bc \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} /\!/
\end{aligned}$$

♡ **point** この定理を用いて、行列の $n$ 乗を求める方法がある。(必ず可能ではない。)

**例 4.5.6.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ の $n$ 乗 $A^n$ を求める。

多項式の場合、例えば $x^n$ を $x^2 - 7x + 10$ で割った余りは、$ax + b$ となる。すなわち、

$$x^n = P(x)(x^2 - 7x + 10) + ax + b = P(x)(x-2)(x-5) + ax + b \qquad (4.3)$$

と表される (ただし、$P(x)$ は $x$ の多項式)。

この式は任意の $x$ に対して成り立つ恒等式なので $x = 2, 5$ でも成り立つ。すなわち、$2^n = 2a + b,\ 5^n = 5a + b$ である[*3]。

[*3] ケーリー・ハミルトンの定理から得られる 2 次方程式の解が重根や複素数階でない場合はこのように求めることが出来る。

これより、

$$a = \frac{5^n - 2^n}{3}, b = \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}$$

である。この $a, b$ を (4.3) に代入すると、

$$x^n = P(x)(x^2 - 7x + 10) + \frac{5^n - 2^n}{3}x + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}$$

である。ここで、$x$ を $A$ に変えると

$$A^n = P(A)(A^2 - 7A + 10E) + \frac{5^n - 2^n}{3}A + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}E$$

が成り立つことが解る。

ここで、ケーリー・ハミルトンの定理より、$A^2 - 7A + 10E = O$ が成り立つので、

$$A^n = \frac{5^n - 2^n}{3}A + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}E$$

となる。後は行列の値を代入して計算すると、

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{5^n - 2^n}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \frac{5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3(5^n - 2^n) + (5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n) & 2(5^n - 2^n) \\ (5^n - 2^n) & 4(5^n - 2^n) + (5 \cdot 2^n - 2 \cdot 5^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{n+1} + 5^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 5^n \\ -2^n + 5^n & 2^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}$$

である。//

この問題に対して、前回は行列の対角化を用いて解いた。どちらで解くかは人それぞれだと思うが、2 通りの方法の解き方があることは覚えておいてほしい。

♡ **注意!**　ケーリー・ハミルトンの定理の逆は成り立たない!!

**例題.** 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が次の等式を満たすとき、$a + d$ と $ad - bc$ の値を求めよ。

$$A^2 - 7A + 10E = O$$

♡ **注意!**　ケーリー・ハミルトンの定理より

$$a + d = 7, ad - bc = 10$$

である。とするのは、間違い。

**解.** 与式とケーリー・ハミルトンの定理より、

$$\begin{cases} A^2 - 7A + 10E &= O, & \cdots \ (1) \\ A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= O & \cdots \ (2) \end{cases}$$

$(1) - (2)$ より、

$$(a+d-7)A - (ad-bc-10)E = O \qquad \cdots \ (3)$$

である。$A \neq kE$ ならば、$a+d=7,\ ad-bc=10$ である。

$A = kE$ の場合、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ なので $a+d=2k, ad-bc=k^2$ である。(3) より

$$(2k-7)A - (k^2-10)E = O.$$

この $(1,1)$ 成分より $(2k-7)k - k^2 + 10 = 0$ となり、$k^2 - 7k + 10 = 0$ である。よって、$k = 2, 5$ なので、$k=2$ のとき $a+d=4, ad-bc=4$、$k=5$ のとき $a+d=10, ad-bc=25$ である。//

**例 4.5.7.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ の $n$ 乗 $A^n$ を求めよ。

まず、ケーリー・ハミルトンの定理より、$A^2 + A - 2E = O$ が成り立つ。

ここで、$x^n$ を (上式の $A$ を $x$ に、$E$ を 1 に変えた式の左辺) $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ で割ることを考える。

$$x^n = P(x)(x-1)(x+2) + ax + b$$

ここで、$x = 1, -2$ を代入すると、それぞれ

$$1^n = 0 + a \cdot 1 + b,\ (-2)^n = 0 + a \cdot (-2) + b$$

となり、$a+b=1, -2a+b=(-2)^n$ が求まる。よって、$a = \frac{1-(-2)^n}{3}, b = \frac{2+(-2)^n}{3}$ である。以上のことから、

$$A^n = P(A)(A^2+A-2E) + \frac{1-(-2)^n}{3}A + \frac{2+(-2)^n}{3}E$$

となり、$A^2 + A - 2E = O$ が成り立つので、

$$A^n = \frac{1-(-2)^n}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{2+(-2)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^n & 1-(-2)^n \\ 2-2(-2)^n & 1+2(-2)^n \end{pmatrix}$$

となる。

### 4.5.8　行列を用いた 3 項間漸化式の解法

**例 4.5.8.** 以下の 3 項間漸化式を満たす数列に対して、一般項 $a_n$ を考える。

$$a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n, \quad a_1 = -1, a_2 = 3$$

まず、行列 (第 1 行は必ず (0 1)、第 2 行は漸化式の係数から作った行列) を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを確認する。ここで、$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ と置くと

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \underline{\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$$

が成り立つ。例 4.5.7 より、

$$A^{n-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^{n-1} & 1 - (-2)^{n-1} \\ 2 - 2(-2)^{n-1} & 1 + 2(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

なので、下線の式と併せると

$$a_n = \frac{1}{3} \left\{ -(2 + (-2)^{n-1}) + 3(1 - (-2)^{n-1}) \right\} = \frac{1}{3} \{1 + 2(-2)^n\}$$

である。

### 4.5.9　演習問題 XV

**問題 4.5.5.** $a_1 = 8, b_1 = -1$ であるとき、以下の連立漸化式を解け。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases}$$

**問題 4.5.6.** 以下の 3 項間漸化式を満たす数列に対して、一般項 $a_n$ を求めよ。

(1) $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n, \quad a_1 = -1, a_2 = 3$

(2) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_1 = 1, a_2 = 4$

**問題 4.5.7.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) $A^5 - 5A^4 + 6A^3 - A^2 + 5A - 5E$ の値を求めよ。

(2) $A^n$ $(n \geq 1)$ を求めよ。

### 4.5.10　演習問題 XV の略解

**略解 4.5.5.** この連立漸化式の式は、行列を用いると

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

と表せる。よって、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

なので、これらを代入していくと

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

となる。例 4.5.6 より

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{n-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 5^{n-1} & -2^n + 2 \cdot 5^{n-1} \\ -2^{n-1} + 5^{n-1} & 2^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

なので、

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 5^{n-1} & -2^n + 2 \cdot 5^{n-1} \\ -2^{n-1} + 5^{n-1} & 2^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \left\{ 2^n (a_1 - b_1) + 5^{n-1}(a_1 + 2b_1) \right\}, \\ b_n &= \frac{1}{3} \left\{ 2^{n-1}(-a_1 + b_1) + 5^{n-1}(a_1 + 2b_1)) \right\} \end{aligned}$$

となる。

　これに初項 $a_1 = 8, b_1 = -1$ を代入すると

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^{n-1},$$

$$b_n = -3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-1}$$

となる。

**略解 4.5.6.** (1) まず、行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを確認する。ここで、$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ と置くと

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

また $A^{n-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + (-2)^{n-1} & 1 - (-2)^{n-1} \\ 2 - 2(-2)^{n-1} & 1 + 2(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$ なので、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3} \left\{ -(2 + (-2)^{n-1}) + 3(1 - (-2)^{n-1}) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \{1 + 2(-2)^n\} \end{aligned}$$

である。

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$ に対して $A^n = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} & -2^{n+1} + 3^{n+1} \end{pmatrix}$ である。

よって、

$$a_n = -2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}$$

である。

**略解 4.5.7.** (1) ケーリー・ハミルトンの定理より $A^2 - 5A + 6E = O$ なので、

$$\begin{aligned} A^5 - 5A^4 + 6A^3 - A^2 + 5A - 5E &= A^3(A^2 - 5A + 6E) - (A^2 - 5A + 6E) + E \\ &= E \end{aligned}$$

となる。

(2) $A$ の固有値は 2, 3 なので、これを用いて対角化かケーリー・ハミルトンの定理により解くと

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & -2^n + 3^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

を得る。