

第 4 章

Geogebra

GeoGebra とは、GeoGebra = Geometry (幾何) + Algebra (代数) を意味し、対話的なグラフィックスで直感的に操作が出来、代数, 幾何, 解析を統合的に扱える数学ソフトウェアである。

4.1 GeoGebra の起動と入力

4.1.1 インストール版と web 版

GeoGebra を起動するには、web 上で行う方法と、アプリをインストールして起動する方法がある。インストールされた環境では、 で起動させられる。

GeoGebra のホームページ <https://www.geogebra.org/> を表示すると



の画面が表示される。このまま **アプリの開始** をクリックすると GeoGebra を使うことが可能になる。

自分のパソコンにインストールする場合、画面右上の 三 (上図の 卍) をクリックし、[計算機] から、[アプリのダウンロード]、[すべてのダウンロードオプション] からアプリを選ぶ。全ての機能が必要なら [GeoGebra Classic 6] から GeoGebra Classic 6 Installer for Windows を選択する。

後は、ダウンロードされたファイルを実行する。

また、複数のパソコン (スマホ) で作業したい場合はアカウントを作ると便利である。

[GeoGebra アカウント] の作成をする場合は、GeoGebra のホームページの [アプリ開始] から、開いたウィンドウの右上の [ログイン] を押すと、



上左図の画面が表示され、[アカウントを作成] を選ぶと、上右図が表示される。

メールアドレスとユーザー名を入力し、パスワードを作成する。後、14 歳以上であることのチェックをする。

このとき、ユーザー名は面倒で、既に使われているユーザー名は使えない。ドットやスペースは使えないが、数字は使える。

4.1.2 GeoGebra の入力方法

GeoGebra に関数、グラフ、図形等を入力する方法は大きく分けて 2 通りある。1 つは、キーボードから式をテキストで入力する方法、もう 1 つは、作画ツールを用いてマウスやタッチで入力する方法である。

これ以降、パソコンで [アプリ開始] から始めた場合を例に紹介する。スマホで利用する場合に大きく異なる場合にのみ、個別の注釈を入れる。



上図の画面、左側にある 入力フィールド (矢印部分) をクリックすると、カーソルが点滅している $+$ に変わる。

ここに $y=2x$ と入力すると、グラフが右側の 作画領域 に表示される。その他、座標、方程式、コマンドや関数を直接入力することが出来る。

★ 数式入力

和、差の $+$, $-$ はそのまま入力すれば良いが、 x^2 は x^2 と入力し、以下 x^3 は x^3 と入力する。また、掛け算 $a \times b$ は $a*b$ で、割算 $\frac{a}{b}$ は a/b と入力する。

下付は $_$ を使い、 $\log_3 x$ は、 $\log_3 x$ のように入力する。

実際の入力では少し注意が必要で、例えば $y = x^2 + 3x + 1$ を入力するとき、 $y=x^2+3x+1$ と入力すると、 $y = x^{2+3x+1}$ になってしまう。この場合、 $y=x^2 \rightarrow +3x+1$ と入力する。

($\rightarrow$) はキーボードの $\rightarrow$ キー

同様に、 $\frac{1}{2}x$ はキーボードから $1/2 \rightarrow x$ と入力し、 $\log_3 x$ は、 $\log_3 \rightarrow x$ と入力する。

♠ 注意! 数式を入力するとき、上付き、下付き、分数など一区切り終わったら $\rightarrow$ を押す。

♠ 注意! 数と変数の掛け算の場合、 $*$ は省略可能である ($2a$ など)。しかし、 ab は ab とい変数か、 $a \times b$ か解らないため、省略できない。

♠ 注意! コマンドの大文字、小文字は区別されないが、変数は区別されるので注意。

例) $A=(1,1)$ は点 $A(1,1)$ となり、 $a=(1,1)$ はベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。

★ テキスト入力の補助 1

テキスト入力の補助として、画面下の入力キーボードがある。



このキーボードを用いて、数式や関数を入力することが出来る。例えば、 $y = x^2 + 3x + 1$ を入力する場合は、



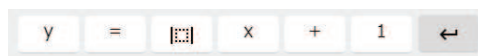
と入力しする。

また、 $y = \sqrt{x+1}$ は、テキスト入力の場合 $y=\text{sqrt}(x+1)$ と入力が必要であるが、画面下の入力キーボードでは



と入力することで出来る。

さらに、 $y = |x + 1|$ は、テキスト入力の場合 $y=abs(x+1)$ と入力が必要であるが、画面下の入力キーボードでは



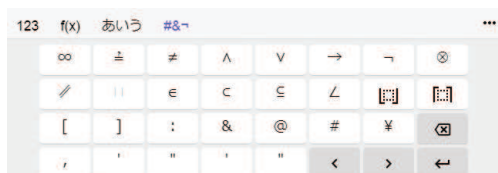
と入力することで出来る。

♠ 注意! $y = |x + 1| + 1$ を画面下キーボードで入力する場合は



としなければ、ならない。

このキーボードには、いろいろな関数の入力の補助や論理演算子などの入力も可能となっている。



高校までの数学を学習していると表示を見ると想像がつくと思うので詳細はここでは省略する。論理演算については、使用するときの説明を行う。

入力練習 以下の関数を入力してみる。

(i) $y = \sin x + \cos x$

(ii) $y = \frac{\sin x}{x}$

(iii) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

(iv) $y = \frac{1}{2} \log_{10} x$

(v) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

(vi) $(x^2 + y^2 - 1)^3 = x^2 y^3$

例 4.1.1. 3次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 1$ に対して $f(x) = 0$ の解、 $y = f(x)$ の極値と変曲点を求める。

入力フィールドに以下を入力する (# 以降はコメントである。入力しない)。

$f(x)=x^3-3x^2-x+1$

$r=root(f)$

根

$s=extremum(f)$

極値

$t=inflectionpoint(f)$

変曲点

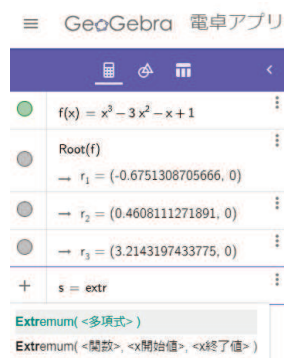
3次関数のグラフと、 x 軸との交点, 極大, 極小の点, 変曲点が表示される。

この $root(f)$ は $\sqrt{f(x)}$ でなく、 $f(x) = 0$ を満たす x の値 (根) という意味である。 $\sqrt{\quad}$ は、 $sqrt()$ (square root の略) を使う。

★ テキスト入力の補助 2

コマンドを入力中に、入力候補がいくつか表示される補完機能がある。長いコマンドの場合、途中まで入力し、この補完機能を使うとよい。

例えば $s=\text{extremum}(f)$ を入力している途中で、候補が表示される。この中から目的のものを選択すれば、そのコマンドの続きを打つ必要がなくなる。() なども補完されるので、自分で入力するとミスになることがある。少し慣れが必要となる。



♠ 補足 いくつかの関数で、 x 軸との交点、極大、極小の点、変曲点を求めたいと思った場合、続けて同じように入力するのではなく、新たに

$$f(x)=x^3-3x^2$$

と入力する。3 次関数のグラフが変わり、それに伴って各点も変化する。

このように、他のオブジェクトに従属するオブジェクトは、主のオブジェクトを変更すると自動的に変更される。

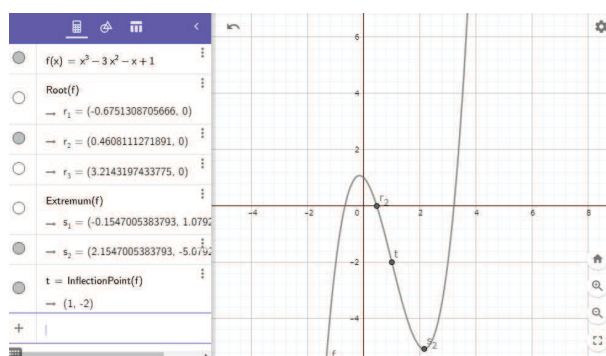
♠ 補足 マウスのホイールを使うとズームイン、ズームアウトが可能である。また、ドラッグすることで座標軸をスライドさせられる。(ただし、後述の作画ツールを使用している場合、“移動”にしなければ、スライドできない)

♠ 補足 グラフが沢山表示されて見辛くなったら、入力した履歴から表示させたくないオブジェクトの○印をクリックすると表示の ON/OFF が切り替えられる。



左が ON、右が OFF.

例 非表示とする例



上図の場合、根の点 r_1, r_3 と、極値の s_2 の点を非表示としている。

例題. 以下の不等式を解け。

$$|x - 1| + |x + 3| \leq 5$$

絶対値が2つもあり、嫌がる問題かもしれませんが、GeoGebra を用いると目で見て答えを導くことが出来る。

新たなファイルを作成し、入力フィールドに

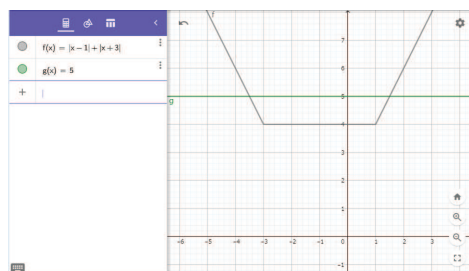
$$f(x) = \text{abs}(x-1) + \text{abs}(x+3)$$

$$g(x) = 5$$

と入力する。

ここで、 $y = f(x)$ のグラフ (不等式の左辺) が、 $y = g(x)$ のグラフ (不等式の右辺) より下となる場所を探す。

実際グラフを見ると、答が -3.5 から 1.5 の範囲だと解る (ズームインも使う)。



答え $\underline{-3.5 \leq x \leq 1.5}$

♡ point もちろん、目視で見ているため正確な答えとは言えないが、自分の答えの確認や、習い始めた生徒に教えるときのイメージとして使うことは出来る。

課題 4.1.1. GeoGebra を用いて、次の 2 つのグラフの交点を観察し、その値を答えよ。

$$(1) y = \sqrt{2x+2}, y = -x + 3$$

$$(2) y = ||x| - 2|, y = \sqrt{|x^2 - 4x| + 4}$$

$$(3) y = 3 \sin x, y = \frac{x^2}{2}$$

課題 4.1.2. 次の 2 次関数のグラフを GeoGebra を用いて描き、最大値または最小値の観察した値を答えよ。またそのときの x の値も観察し、答えよ。

$$(1) y = 2x^2 + 8x + 7$$

$$(2) y = -x^2 + 2x + 1$$

課題 4.1.3. 次の関数のグラフを GeoGebra を用いて描き、最大値と最小値の観察した値を答えよ。またそのときの x の値も観察し、答えよ。

$$(1) y = -2x^2 - 4x + 1 \quad (-2 \leq x \leq 1)$$

$$(2) y = x^2 - 8x + 12 \quad (5 \leq x \leq 6)$$

$$(3) y = x \cdot \sin x \quad (0 \leq x \leq 6)$$

4.2 GeoGebra 作画ツール群を用いた入力の方法

4.2.1 作画ツール

作画ツールは、マウスやタッチ操作によって図形を簡単に描くことが出来る。それらツール群は、左端にある  ツール を押すとで

くる。右にそれらツール群の簡易版を載せている。この一番下にある、[もっと他のツール] を押すと*1、さらに多くのツールが表示され、使用出来る。

1つ1つの説明は行わないが、アイコンを見てもらえば内容はが解る。

例 4.2.1. (三角形の作図)

簡易版作画ツールが表示されている場合は 一番下の [もっと他のツール] を押して、スクロールさせると、中ほどに



がある。この左端の [多角形] を選択し、作画領域内で異なる場所を3ヶ所クリックし、3点 A , B , C を作成する。

その後、三角形を完成させるため最初の場所 (点 A) をクリックする。

点 A と異なる点をクリックし、点 D が作画されたら、一度多角形を完成させ、その後削除する。



から [削除] を選び多角形をクリックすると削除される。ただし、点が残るので、点もクリックして削除して行く。

三角形や辺の色や辺の太さは、図を右クリックして設定から変えらる。

また、正三角形 (正多角形) を書きたい場合は、別のツールがあるので、そちらを使用する。

三角形の作図が出来たら、この三角形をもと別のツールも紹介する。

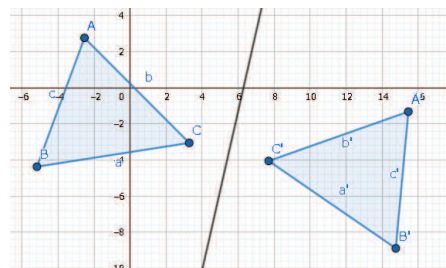


*1 スマホにアプリをインストールした場合は、別アプリで GeoGebra 幾何が必要となる

例 4.2.2. (直線に関する折り返し)

ツール群の [基本ツール] にある、[点] を選び、相異なる 2 点 D, E を作図する。次に、ツール群の [線] にある、[2 点を通る直線] を選び、先ほど作成した点 D, E をクリックする。

今度は、ツール群の [移動・変換] にある、[直線に関する鏡映] を選択し、三角形をクリックした後に直線をクリックする。上手く行けば、直線に関し折り返された三角形が表示される。この後、ツール群の [基本ツール] から [移動] を選択し、点 A, B, C, D, E を移動させてみる。



点対称移動の場合は、ツール群の [移動・変換] にある [角度を指定して点の回りに] を選び、三角形をクリックした後に点 D をクリックし、出てきたウィンドウの角度を好みの値にして [OK] を押す。

課題 4.2.1. 三角形を 1 つ描き、その三角形の 5 心の作図をせよ。

ユークリッド空間内の 三角形の 5 心

- ・ 外心 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。
- ・ 重心 三角形の辺の midpoint と向かい側の頂点を結ぶ線分 (3 つ) は 1 点で交わる。
- ・ 垂心 三角形の 3 つの頂点から対辺に下ろした垂線は 1 点で交わる。
- ・ 内心 三角形の 3 つの内角の二等分線の交点は 1 点で交わる。
- ・ 傍心 三角形の 1 つの内角と他の 2 つの外角の二等分線 (3 つ) は 1 点で交わる。

4.2.2 真偽値演算子

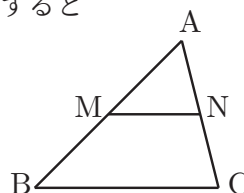
入力キーボードの中に見慣れない演算子がある。そこで、次の定理の確認を例に、紹介する。

中点連結定理

$\triangle ABC$ の 2 辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とすると

$$MN \parallel BC, \quad MN = \frac{1}{2}BC$$

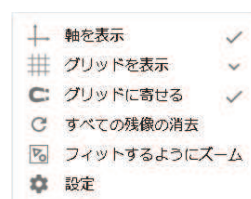
が成り立つ。



今回は座標を気にしないので、作画領域を右クリックし、右図のようなメニューを開く。そして、軸の表示のチェックを外し、グリッドを表示からグリッドなしを選ぶ。

スマホの場合は、右上の歯車ボタンから選ぶ。

まず、先ほどと同じように三角形を作図する。三角形が出来たら、辺 AB, AC の中点を作画す



るためにツール群の [作図] にある、[中点または中心] をえらぶ。その後、辺 AB をクリックすると中点 D が作画される。同様に辺 AC をクリックすると、中点 E が作図される。

中点 D, E が作図されたら、作画ツール群の [線] から [2 点を結ぶ線分] を選び、点 D と E をクリックして線分 DE を作図する。

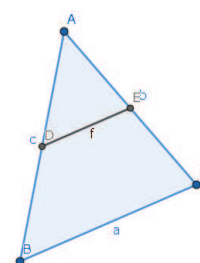
次は、入力フィールドを使うので、左端にある  をクリックして入力フィールドを表示させる。

このとき、作画ツールで描いた図の代数的値が表示されている。

画面下の入力キーボードが表示されていない場合は、画面の左下に  があるので、このアイコンをクリックする。

入力キーボードが表示されたら、上段にある  を選択する。

右図のように、辺 BC が a、辺 DE が f と表示されていると仮定して (異なる場合は読み替えて)、入力フィールドに



a  f

と入力し、エンターキーを押す。このとき、画面表示は、// が || に変わるが、正しい。

♡ point この  は、平行を意味する真偽値演算子であり、上で入力したものは、

“a と f が平行ですか？”

という意味である。

入力すると、下に “= true” と表示されたはずである。これは線分 a と f が平行なとき true と表示され、平行でないとき false と表示される。

次に、入力フィールドに

a  2*f

と入力し、エンターキーを押す。

♡ point この  は、等しいか否かの真偽値演算子であり、左辺と右辺が等しければ true 等しくなければ、false と表示される。

どちらも true と表示されたら、作画ツール群に移り、[基本ツール] の [移動] を選び、再び入力フィールドを表示させる。そして、点 A, B, C の 1 点をドラッグすると三角形の形が変わるが、平行と等しい真偽値演算子の値は常に true を表示している。

以上で、どのような三角形でも中点連結定理が成り立つことが確認できた。

課題 4.2.2. 三角形を描き、チェバの定理、メネラウスの定理が成り立つことを確認せよ。

(ヒント) 辺 AB 上に点 P, 辺 BC 上に点 Q をとる。次に、辺 CP と辺 AQ の交点を K とするとき、直線 BK と辺 AC の交点を R とする。

線分の長さを公式の形 (分数の形) で表し、1 に等しいか確かめる。

4.2.3 定規とコンパスによる作図

定規とコンパスによる作図とは

定規とコンパスだけを有限回使って図形を描くことを指す。(Wikipedia より)

作画ツール群にはさまざまなツールがあるが、定規とコンパスによる作図問題で使えないものがある。ツール群の中には、[中点または中心] や、[垂線]、[3 点を通る円] などがあるが、すべてが定規とコンパスだけを用いて、1 作業で行えるとは限らない。

1 作業で行うこととは、

[点]、[2 つのオブジェクトの交点]、[2 点を結ぶ線分, 直線, 半直線]

などである。

また、[多角形] は可能であるが、[正多角形] は不可能である。作画ツール群 [円] に関しては、[中心と円周上の 1 点で決まる]、[コンパス]、[中心と半径で決まる円] が該当する。

例 3.2.3. 正五角形を定規とコンパスで作図する方法で作図せよ。

まず、2 点 A,B を作図し、線分 AB を 1 辺 (長さ a) とする正五角形を作図する。

円の書き方を工夫し、円が多くなり見難くなったら、不要になったオブジェの表示を OFF にして見やすくする。

- (1) 線分 AB の垂直二等分線 l を引き、AB との交点を C とする。
- (2) 点 C を中心に半径 AB の円^{*2}を描き、直線 l との交点の一方を D とする。^{*3}
- (3) 2 点 A,D を通る直線 m を引き、点 D を中心に AB の半分の長さ ($a/2$) の円を描き、直線 m との 2 つの交点に対し、ADE の順となるように交点 E をとる。
- (4) 点 A を中心に半径 AE の円を描き、直線 l との交点を F とする。
- (5) 点 F が正五角形の一番上の頂点であるが、点 F, 点 A, 点 B を中心に半径 AB の円 $O(F)$, $O(A)$, $O(B)$ を描き、円 $O(F)$, $O(A)$ の交点を G とし、円 $O(F)$, $O(B)$ の交点を H とする。

注) G,H はそれぞれ 2 点あるが、五角形 ABHFG が正五角形になるように選ぶ。

以上の作図で五角形 ABHFG は正五角形となる。ちなみに、点 A または B を移動させても、正五角形は保たれている。

課題 4.2.3. 定規とコンパスで作図する方法で、三角形の 5 心を作図せよ。

^{*2} 線分 AB を作成し、長さが a だとする。“中心と半径で決まる円”を選び、中心を選んだ後 半径を a と入力。

^{*3} これ以降の点はすべて直線 AB に対し D 側に点を取るとする。

4.3 スライダー

4.3.1 軌跡

GeoGebra では軌跡を表すことが出来る。そこで次の例題をを考える。

例題. (軌跡)

点 $A(4,4)$ に対して、点 P が円 $x^2 + y^2 = 4$ の周上を動くとき、次の点の軌跡を求めよ。(東京書籍 数学 II)

(1) 線分 AP の中点 M

(2) 線分 AP を 1:2 に内分する点 Q

ここでは、問題文の点や円を正しく入力するために入力フィールドを使う。

まず、入力フィールドに

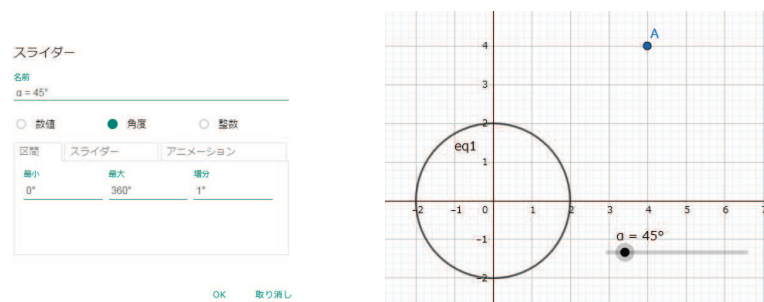
$$A=(4,4)$$

$$x^2+y^2=4$$

と入力する。A は必ず、大文字にすること。

次に、作画ツール群の [基本ツール] から [スライダー] を選択する。選択後、作画領域内をクリックするとスライダーの設定画面が表示される。

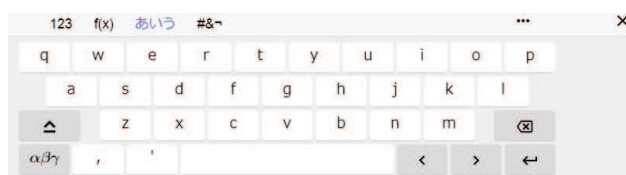
ここで、“数値”に入っているチェックを“角度”に変えて“OK”を押す。



次に、入力フィールドに戻り、

$$P=(2\cos(\alpha), 2\sin(\alpha))$$

と入力する。この α は、画面下の入力キーボード



から、上段にある“あいう”を選び、左下の $\alpha\beta\gamma$ を選択する。そして、 α を入力する。

続けて

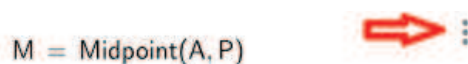
<code>segment(A,P)</code>	# 線分
<code>M=midpoint(A,P)</code>	# 中点
<code>Q=2*A/3+P/3</code>	# AP を 1:2 に内分する点

と入力する (分数表記の入力には注意)。

入力が終わったら、入力フィールドを表示する画面にもどり、



の右端、再生ボタンを押してみる。アニメーションされるが、この動きだけでは、観察しづらいので、入力フィールドの上に表示された、 $M = \text{Midpoint}(A,P)$ の右端の



をクリックして、[設定] から [基本] の、残像を表示 にチェックを入れる。これにより、残像が表示されるので、観察しやすくなる。(Q も同様)

課題 4.3.1. 3 次関数の係数の変化による、関数のグラフの変化を観察するために、スライダーを 3 つ (a , b , c を) 作成する。

次に、入力バーに

$$f(x)=x^3+a*x^2+b*x+c$$

と入力する。

入力後、スライダーの値を変化させてみて、グラフの形が変わることを確認する。

その後、入力フィールドに

```
s=root[f]
t=extremum[f]
u=inflectionpoint[f]
```

を追加する。(例 4.1.1. 参照)

場合によっては、値が存在せず、未定義と表示されることもある。

以上の準備を踏まえて、以下の (1)~(3) を予想せよ。

(1) 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ の極値が存在するのは、係数 (a, b, c) がどのような場合か。

(2) 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ の変曲点が y 軸上に存在するのは、係数 (a, b, c) がどのような場合か。

(3) 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ の極大値、極小値が存在し、極大値となる点が第 2 象限、極小値となる点が第 4 象限に存在するのは係数 (a, b, c) がどのような場合か。

4.3.2 ある区間での最大値最小値

例題. (最大値、最小値)

a を実数とする。関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の区間 $a \leq x \leq a + 1$ のおける最大値と最小値を求めよ。

まず、関数を入力フィールドに書く。

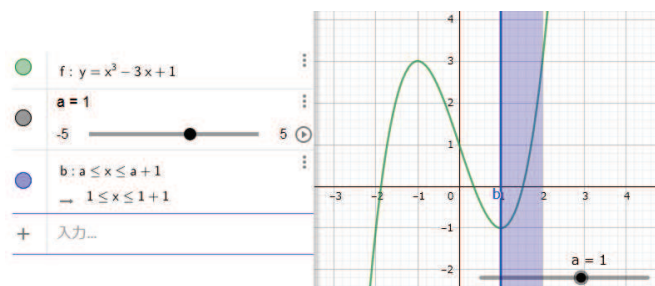
$$y = x^3 - 3x + 1$$

次に、先ほどと同様にスライダーを作成する。今回は、“数値”のままで作成する。スライダーが出来たら、入力フィールドに戻り、

$$a \leq x \leq a + 1$$

と入力する。このとき、 $\leq$ は $< =$ と入力するか、入力キーボードを用いて入力する。

ここまで出来たら、アニメーションをさせてみる。色が変わっている領域内の最大値と最小値を観察することが出来る。



こちらも観察は少ししづらいので、次のコマンドを入力する。

`Max(f,a,a+1)`

`Min(f,a,a+1)`

これらは、それぞれ、関数 $f(x)$ の区間 $a \leq x \leq a + 1$ での最大値、最小値をとる点を表すコマンドである。

これにより、区間内での最大値と最小値をとる関数上の点が表示される (最大値と最小値は、 y 成分を見ればよい)。

♡ 注意! `Max`, `Min` にはバグがある。

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

`Max(f,1,2)`

と入力すると、 $(1.6180339887499, -1.2360679774998)$ のような値が表示される。これは、この区間で最大値となる点が2箇所あり、処理が正しく行われないと予想される。

この他にもバグがありそうなので、このようなソフトを使う場合は全てを信じるのではなく、知識をもって使う必要がある。

4.3.3 関数の接線

関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ のグラフ、そのグラフ上の点における接線を表示する。

まず、スライダーを作成し、次に

```
f(x)=x^3-3*x+1
A=(a,f(a))           # グラフ f 上の点
t=tangent(A,f)         # 点 A における f の接線
s=slope(t)             # t の傾き
```

と入力フィールドに入力する。

ここで、スライダーをアニメーションさせると、関数 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ の各点における接線の傾き (の値 s) が表示される。各点での傾きを見るため、

```
B=(x(A),s)           # x(A) は点 A の x 座標の値
```

と入力フィールドに入力し、先ほどと同様にスライダーをアニメーションさせ、点 A を動かしてみる。

B の動きを見るには、B に残像をつければ解りやすい。この B の軌跡は、もちろん.....。

課題 4.3.2. 次の軌跡を表示させ、それぞれの方程式、座標を目視で考察し解答せよ。

(1) 点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ と円 $x^2 + y^2 = 4$ がある。点 C がこの円上を動くとき、3 点 A,B,C が三角形を成したときの重心の軌跡を表示し、軌跡の方程式のおおよそを答えよ。

(2) 放物線 $y = x^2 + 2(a - 2)x + a$ の頂点の軌跡を表示し、その軌跡の描く曲線と x 軸、 y 軸との交点を予想し答えよ。

課題 4.3.3. 次のパラメーター表示 (媒介変数表示) された関数のグラフを、点の軌跡を用いて表示させよ。

(1) $x = \sin \theta + 2, y = \cos \theta - 1$. ただし、 θ はパラメーター。

(2) $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta$. ただし、 θ はパラメーター。

(3) $x = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$. ただし、 t はパラメーター。

(4) $x = \sin(a\theta), y = \sin(b\theta)$. ただし、 θ はパラメーター、 a, b は任意の自然数。

発展課題. 点 $P(2, 1)$ から曲線 $C: y = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ に引ける接線の本数を観察せよ。

また、点 P を $P(2, l)$ とした場合、曲線 C に引ける接線の本数を観察せよ。

同様に、点 P を $P(k, l)$ とした場合も観察せよ。

4.4 空間図形

4.4.1 点の作図

空間図形を扱う場合は、GeoGebra を起動したあと、画面の右上にあるメニュー（図 1 の赤○）から空間図形を選択する。

スマホの場合は、新たにアプリをインストールする必要がある。GeoGebra を起動後メニュー（図 2 の赤□）から空間図形を選択してインストールを行う。

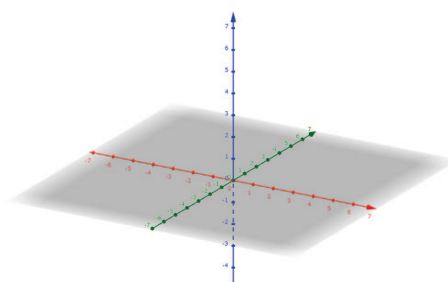
それぞれの場合、起動させると下図のような画面が表示される。



図 1



図 2



空間図形では、作画ツール群に空間内の図形の作画ツールや、それら図形に対する変換のツールが追加されている。

まずは、点の作図をするため、[基本ツール] から [点] をえらび、入力してみる。



図 3



図 4



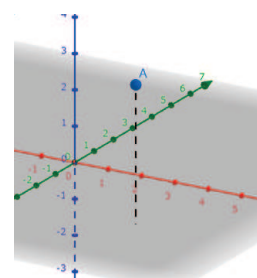
図 5

平面上に 十字 (図 3) が表示されるので、クリックすると点が作図される。

その後、点をクリックする毎に z 軸方向への移動 (図 4) か、 $x-y$ 平面の移動 (図 5) か変わる。

そして、ドラッグすることによって、点を移動させることが出来る。例えば、 z 軸方向への移動を行った場合が右図である。

このとき、入力フィールドを表示させておくと、座標をその都度表示してくれる。もちろん入力フィールドから座標を指定して入力することも出来る。



4.4.2 直線と平面

空間内に直線を描くために、少し復習をする。空間内に直線を描く場合、直線を一意的に決めなければならない。そのために、直線のベクトル方程式

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \quad (t \in \mathbb{R})$$

を思い出す。GeoGebra で扱うため、以下の例のように (a, b, c) はベクトル, (x_0, y_0, z_0) は点として入力する。

例 4.4.1. 点 $(0, 2, 1)$ を通り、方向ベクトルが $(2, 1, -3)$ の直線の作図と直線のベクトル方程式を考える。

まず、入力フィールドに

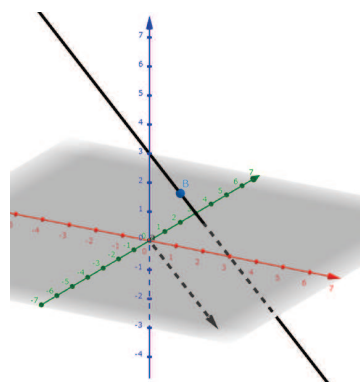
$$a = (2, 1, -3)$$

$$B = (0, 2, 1)$$

と入力する。

次に、作画ツール群の [直線と多角形] から、[平行線] を選び、作画領域内に描かれたベクトルと点をクリックすると、直線が表示される。

また、代数ウィンドウ (入力フィールドの上、入力されたコマンドの代数的な式を表示する場所) で確認すると、



$$f : \text{Line}(B, a)$$

$$\rightarrow X = (0, 2, 1) + \lambda (2, 1, -3)$$

と直線のベクトル方程式が表示されている。 $(\lambda : \text{パラメーター})$

♣ **補足** 残念ながら、空間図形の場合、直線の方程式を表示する方法は不明。誰か知っていたら教えてください。

直線の方程式を入力することは可能なので、入力フィールドに $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z - 1}{-3}$ と入力すると正しく直線を表示してくれる。

ただし、代数ウィンドウの表示は

$$g : \left(\frac{x}{2} + 0z = y - 2, \frac{x}{2} = \frac{z - 1}{-3} \right)$$

$$\rightarrow X = (0.33, 2.17, 0.5) + \lambda (-0.33, -0.17, 0.5)$$

と表示される。

例題. 以下の直線を作図せよ。

- (1) 点 $(-1, 2, 1)$ を通り、方向ベクトルが $(0, -1, 3)$ の直線
- (2) 2 点 $(-2, 3, 1), (-2, -2, 1)$ を通る直線
- (3) 原点を通り平行移動すると直線 $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{-3}$ と一致する直線

次は、平面の作図を考える。平面の方程式が解っていれば、入力フィールドに入力すれば作図される。例えば、

$$3x - 2y + 5z = 1$$

と入力してみる。作画領域内に平面が作図されたら、作画ツール群の [基本ツール] から [移動] を選び、作画領域内をドラッグするといろいろな角度から見る事が出来る。

例 4.4.2. $(1, -2, 0)$ を通り、法線ベクトルが $(2, -1, 2)$ の平面の作図と方程式を考える。

直線の場合と同様に、まず、入力フィールドに

$$a = (2, -1, 2)$$

$$B = (1, -2, 0)$$

と入力する。点とベクトルが作図されたら、作画ツール群の [平面] から、[直交平面] を選び、点とベクトルをクリックすると平面が作図される。正しく作図されているか確かめるために、代数ウィンドウを確認すると、 $2x - y + 2z = 4$ が表示されている。

例題. 以下の直線を作図せよ。

- (1) 3 点 $(-1, 1, 1), (2, -2, 3), (2, 0, -2)$ を通る平面
- (2) 直線 $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{-3}$ と直交し、原点を通る平面

4.4.3 スライダーと線型変換

空間図形ではスライダーがツール群に無いが、使うことはできる。入力フィールドに

$$a = \text{slider}(0, 1)$$

と入力すると、0 と 1 の間を動くスライダー a が作成できる。これを用いて、点 A, B を結ぶ線分を残像で表示してみる。

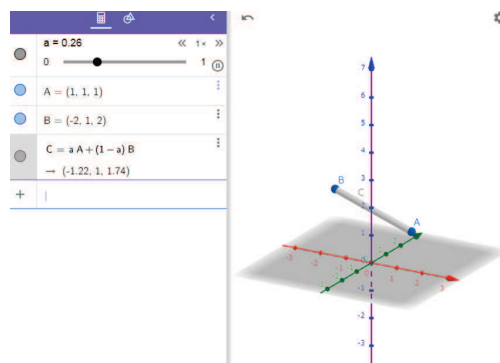
スライダー a の作成後、次を入力する。

$$A = (1, 1, 1)$$

$$B = (-2, 1, 2)$$

$$C = a \cdot A + (1-a) \cdot B$$

点 C の残像表示を on にして、スライダー a をアニメーションさせると、残像によって線分 AB を表示させることができる。



スライダーの“角度”を使う例として、次の例題を考える。

例題. 半径2で原点を中心とする球と、平面 $x + y - z = 0$ の交わりを表すベクトル方程式を答えよ。

まず、入力フィールドに

$$x^2+y^2+z^2=4$$

$$x+y-z=0$$

IntersectionPaths(eq2,eq1) ← [基本ツール] の [2 曲面の交線] でも可

と入力する。すると、 $X = \dots$ の形でベクトル方程式が表示される。次に、空間図形ではスライダーがツール群の中に無いが、使うことはできる。

入力フィールドに

$$a=\text{slider}(0,2*\pi,0.01*\pi,1,100,\text{true})$$

と入力し、先ほどの $X = \dots$ の部分を見ながら

$$A=(-1.41*\cos(a)-0.82*\sin(a),1.41*\cos(a)-0.82*\sin(a),-1.63*\sin(a))$$

と入力する。スライダー a を動かすと、球面と平面の交わりを動いていることが解る。

また、行列 $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ は、次のように入力する。

$$M = \{\{0, 0, 2\}, \{0, 2, 0\}, \{2, 0, 0\}\}$$

行列が表示されたら、

$$M*A$$

と入力することによって、 M を表現行列とする線型変換によって、点 A を移した先の点が表示される。

課題 4.4.1. 3点 $A(1, 1, 1), B(-2, 2, 1), C(1, -3, 2)$ を作図し、“残像を用いて”三角形 ABC を作図せよ。

また、作図した三角形 ABC を表現行列

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

をもつ線型変換で移した先の図を“残像を用いて”作図せよ。

課題 4.4.2. 半径2で原点を中心とする球と、平面 $2x - y - 3z = 0$ の交わりを表す図を、“残像を用いて”作図せよ。

また、作図して出来た図形を課題 4.4.1 の線型変換で移した先の図を“残像を用いて”作図せよ。

4.4.4 回転体

2次曲線 $y = x^2 - x$ と、直線 $y = x + 3$ で囲まれた図形を x 軸の周りに回転してみる。

まずは、曲線と直線のグラフを入力する。

$$f(x) = x^2 - x$$

$$g(x) = x + 3$$

このとき、 $y = x^2 - x$ と入力すると曲面になるので、 $f(x) = x^2 - x$ と入力すること。

次に、この2つのグラフの交点を考える。方程式を解く等で $(-1, 2), (3, 6)$ を求める。この x の区間 $[-1, 3]$ に限ったグラフを表示する。

$$h(x) = \text{If}(-1 \leq x \leq 3, f(x))$$

$$i(x) = \text{If}(-1 \leq x \leq 3, g(x))$$

回転したいグラフ $(h(x), i(x))$ が分かりづらいので、 $f(x), g(x)$ は非表示にしておく。

そして、 $h(x), i(x)$ を x 軸の周りに回転させる。

ツールの[立体]にある、[回転面]を選択し、それぞれのグラフをクリックする。この後、設定 () で表示される[平面を表示]のチェックを外しておくで見やすかもしれない。

回転面をアニメーションで表示させるためにスライダーを使う。入力フィールドに

$$s = \text{slider}(0, 6.3, 0.1)$$

と入力する。これは、パラメーター s を 0 から $6.3 (= 2\pi)$ まで 0.1 刻みで変化させている。

次に、代数ウィンドウにある

$$a = \text{Surface}(h, 360^\circ, x\text{軸})$$

の 360° の部分を s に変える。

$$a = \text{Surface}(h, s, x\text{軸})$$

同様に $b = \text{Surface}(i, 360^\circ, x\text{軸})$ に対しても行う。

この後、スライダー s を動かすと回転面が表示される。視点の変更やズームも出来るが、ズームしすぎると描画範囲が狭まり回転体としての形が変わることがある。



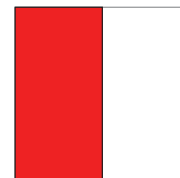
4.5 面積

4.5.1 面積と確率

2次元平面に話を戻して、面積を考える。

例えば、面積比が1:1で、赤と白に塗り分けられた紙がある。無作為にこの紙に針を落としたとき、必ず赤の部分か白の部分に刺さるとする。

10回この試行を行ったとき、赤に刺さる回数は何回は、4,5,6回ぐらいと予想される。100回この試行を行った場合は、45回から55回の間と思われる。(正確には、境界線上を考えなければならないが、ここでは無視する。)

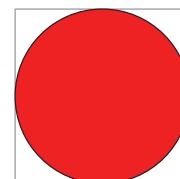


では、逆に面積比が $a:b$ で、赤と白に塗り分けられた紙に対して、同様の試行を行ったとき、1000回行ったら赤に697回刺さった。このとき、 $a:b$ はおそらく7:3ではないかと予想できるであろう。

このように面積と確率の関係をを用いて円周率の近似値を計算することができる。

モンテカルロ法

右図のように半径1の円と、それに外接する正方形(面積は4)を考える。この正方形の中に、ランダムに N 個の点を作図し、円の中に入った点の数を数える。



GeoGebraでは、以下を入力バーに入力する。まず、解りやすくするため半径1、原点中心の円を描くき、作画する点の個数を変えるため、スライダーを用いて N を定める。

$$x^2+y^2=1$$

`N=slider(10,1000)`

つぎに、乱数(`random`)を用いて、点を打つ。

`L=sequence((random(-N,N)/N,random(-N,N)/N),i,1,N)`

このコマンドの中の`random(-N,N)/N`は、 $-N$ から N までの乱数を生成し、それを N で割っている。すなわち、 -1.0 から 1.0 の数を生成している。

`sequence(F,i,1,N)`は、 F を1から N まで作成し、列としたものである。変数として i を使うこともできる。例えば、

`sequence(2*i,i,1,10)`

とすると2から20までの偶数列となる。

作成した点列のなかで、円に入っている点を数え上げる。表示コマンドとしては

`Sum((if(length(element(L,n))<=1,1,0)),(n),(1),(N))`

であるが、`Sum(` まで入力すると $\sum()$ と表示が変わる。その後、`n` を入力し、右移動、`1` を入力し、右移動、`N` を入力して右移動する。下のように入力が出来たらエンターキーを押す。

$$\sum_{n=1}^N (\text{if}(\text{length}(\text{element}(L, n)) \leq 1, 1, 0))$$

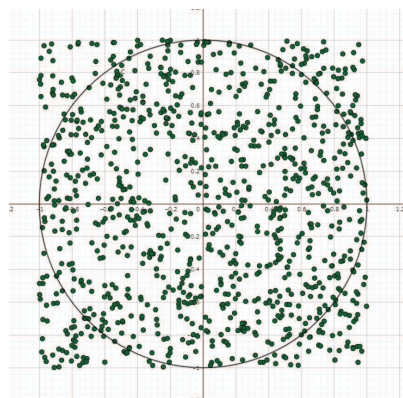
この `element(L,n)` は、`L` の中の `n` 番目の成分という意味である。また、`if(G<=1,1,0)` は `G` が 1 以下なら、1、そうでないならば 0 という意味である。最後に

$$p=4*a/N$$

とすれば、円周率の近似値が表示される。分数で表示されている場合は、 を押せば小数表示してくれる。

$$p = 4 \cdot \frac{a}{N}$$

$$\approx 3.124$$



4.5.2 多角形の面積

多角形の面積を求める場合は、`area` を用いる。紹介のために次の例題を考える。

例題. (面積の最大値)

2 次関数 $f(x) = x^2 + 3x - 3$ に対して、2 次曲線 $y = f(x)$ と、曲線上の点 $A(-3, -3)$, $B(2, 7)$, $C(k, f(k))$ を考える。ただし、 $-3 \leq k \leq 2$ とする。

三角形 ABC の面積が最大となる k の値と、そのときの面積を求めよ。

まずは、入力フィールドに以下を入力する。ただし今回は、観測することにする。

```
f(x)=x^2+3*x-3
A=(-3,-3)
B=(2,7)
k=slider(-3,2)
C=(k,f(k))
p=polygon(A,B,C)
s=area(p)
```

作図が出来たらスライダー k を動かしてみる。この場合はアニメーションより手動で動かした方が解りやすい。三角形を解りやすくするため `polygon` を用いて三角形を作図しているが、`area(p)` は、`area(A,B,C)` としてもよい。

4.5.3 区分求積法

区分求積法については既に知っていると思うのでここでは述べない。ただ、知ってはいるが、実際に計算して求めたことは少ないと思われるので、GeoGebra を用いて計算を試みる。

さっそく以下を入力フィールドに入力して行く。コマンドが長く、`sum` もあり、入力が大変かもしれない。

```
f(x)=x^3+2*x^2-3
n=slider(2,100,1)
Sequence(Polygon((j/n,f(j/n)),(j/n,0),
                  ((j+1)/n,0),((j+1)/n,f(j/n))),j,0,n-1)
Sequence(Polygon((j/n,f((j+1)/n)),(j/n,0),
                  ((j+1)/n,0),((j+1)/n,f((j+1)/n))),j,0,n-1)
a=Sum(Area((j/n,f(j/n)),(j/n,0),
            ((j+1)/n,0),((j+1)/n,f(j/n))),j,0,n-1)
b=Sum(Area((j/n,f((j+1)/n)),(j/n,0),
            ((j+1)/n,0),((j+1)/n,f((j+1)/n))),j,0,n-1)
```

実際の値を求めるには、

```
abs(integral(f(x),0,1))
```

と入力する。

ここで関数 $f(x)$ をいろいろと変えて観察してみるのもよい。

積分が出てきたので、微分、積分のコマンドを紹介しておく。

4.5.4 微分, 積分

GeoGebra は関数の微分, 積分も表すことが出来る。入力フィールドに

```
derivative((x-1)^3)           # 微分
```

と入力すると、 $(x-1)^3$ の微分が求まる。 $\sin x$ や $\log x$ の微分

```
derivative(sin(x))
derivative(log(x))
```

も関数のグラフとして表示させることが出来る。積分も微分と同様に

```
integral((x-1)^3)
```

と入力すると、 $(x-1)^3$ の積分が求まる。 $\int \sin(x)dx$, $\int \log x dx$ も同様に次のように入力する。

```
integral(sin(x))
integral(log(x))
```

積分の場合、区間を入力すると定積分を求めることが出来る。例えば $\int_0^\pi \sin(x)dx$ は

```
integral(sin(x),0,pi)
```

と入力する。通常の GeoGebra では 2.0000000000791 と表示されるが、CAS を使うと 2 と正しく表示される。

♡ 注意! $y = \frac{1}{x}$ の区間 $[0, 1]$ での定積分

```
integral(1/x,0,1)
```

は? と表示される。

課題 4.5.1. モンテカルロ法を用いて、楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ の面積の近似値を求める手順を *GeoGebra* で作成せよ。

課題 4.5.2. ある関数を決めて、その微分, 不定積分, 定積分を求めよ。ただし、関数や積分区間などは自由に決めて良い。

4.6 数式の扱い

4.6.1 CAS

CAS とは、Computer Algebra System の頭文字を合わせたもので、数式処理を意味している。

前回少し紹介したが、[アプリの開始] から始めた直ぐの状態 (以下 通常という) では、 $\int_0^\pi \sin(x)dx$ の値が正しく表示されなかった。しかし、数式処理 (CAS) を使うと、正しく表示される。

♠ 補足 $\int_0^\pi 2\sin(x)dx$ はどちらも 4 と表示される。

数式処理 (CAS) は作図より、式の計算に特化している。通常 と CAS との違いを見ることを含めて、幾つかのコマンドを紹介しておく。コマンドの一覧と、簡単な説明は、入力キーボード右上の



(図の赤丸の部分) をクリックすると表示される。数学関数は見慣れたものが並んでいる。また、コマンドは英単語を使っていることが多いので、意味合いは直感的に (もしくは、英和辞典で調べて) 理解することができる。ただ、使い方は少し難しいものが多い。

(1) 平方完成

例. `CompleteSquare(x^2+3*x+2)`

(2) n 個の点を通る $n-1$ 次関数

例. `Polynomial((0,1),(2,-1),(3,1),(5,-2),(6,3))`

(3) テーラー展開

例. `TaylorPolynomial(ln(x),0,5)` (注) $\ln(x)$ は、 $\log_e(x)$ のこと。

(4) 近似分数 (CAS ではエラーになる)

例. `FractionText(pi)`

(5) 最大公約数、最小公倍数

例. `GCD(12345,67890)`

例. `LCM(98765,43210)`

例をあげるときりが無いので、後は各自で楽しんでください。

4.6.2 マクローリン展開

スライダー (パラメーター) を使うことによって、関数の冪級数の近似値を目視で求めてみる。
ここでは、マクローリン展開を考えることにする。すなわち、

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

の $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ を考える。

例題 . 関数 $f(x) = \frac{1}{1-x/2}$ のマクローリン展開の x^3 の項までを GeoGebra を用いて推測せよ。

まず、入力フィールドに

$$f(x) = 1/(1-0.5*x)$$

と入力する。 a_0 は明らかに 1 なので、

$$g(x) = 1$$

とする ($g(x)$ が求めたい近似式)。次に、

$$t(x) = f(x) - g(x)$$

と入力し、プロパティからこの関数の色を (例えば 青に) 変る。次に

$$a = \text{slider}(-3, 3, 0.01)$$

$$h(x) = a*x$$

とする。($h(x)$ の色を例えば黒に変えておく。)

a をアニメーションさせることにより、青色 ($t(x)$) のグラフと黒色 ($h(x)$) のグラフを観察すると a の値が 0.5 の辺りで一番近似されていることが解る (のではないか?)。

このことから、 x の係数は 0.5 と予想されるので、 $g(x)$ を

$$g(x) = 1 + 0.5*x$$

に変更する。

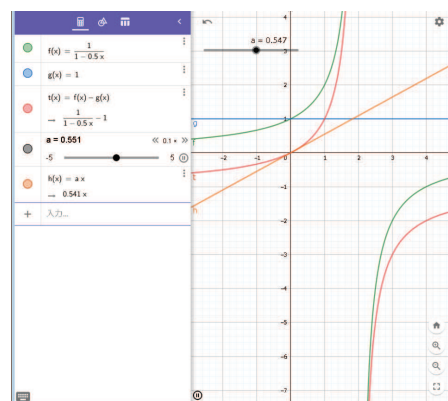
今度は 2 次の項 x^2 の係数を観察するために、 $h(x)$ を

$$h(x) = a*x^2$$

に変更する。

先ほどと同様に、青色 ($t(x)$) のグラフと黒色 ($h(x)$) のグラフを観察すると (見づらくなってくるが)、だいたい 0.25 だと解る。このことから、 $g(x)$ を $g(x) = 1 + 0.5*x + 0.25*x^2$ に変更し、 $h(x)$ を $h(x) = a*x^3$ に変更して再び観察する。

これらによって、3 次までの近似が $g(x) = 1 + 0.5x + 0.25x^2 + 0.125x^3$ だと推測できる。もちろん推測なので、別の答えが出るのも良い。



4.7 Geogebra 課題

課題 4.7.1. 三角形を作成し、その三角形に対して、垂心、重心、傍心を定規とコンパスを用いる方法で作図せよ。

課題 4.7.2. スライダーおよび点の残像を用いて、サイクロイド、内サイクロイド、外サイクロイドの曲線を描け。ただし、定数 $a, b > 0$ は好みで設定してかまわない。

$$\text{サイクロイド} \quad \begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$\text{内サイクロイド} \quad \begin{cases} x = (a - b) \cos \theta + b \cos \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \\ y = (a - b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a - b}{b} \theta \right) \end{cases}$$

$$\text{外サイクロイド} \quad \begin{cases} x = (a + b) \cos \theta - b \cos \left(\frac{a + b}{b} \theta \right) \\ y = (a + b) \sin \theta - b \sin \left(\frac{a + b}{b} \theta \right) \end{cases}$$

♠ 補足 内サイクロイド、外サイクロイドは、特定の定数のときアステロイド、カージオイドという名前がついている。

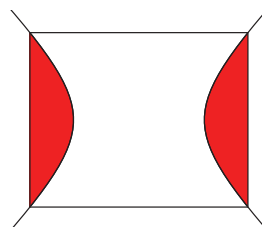
課題 4.7.3. 平面上に異なる 2 点 A, B を入力し、線分 AB を描き、線分 AB を $2:1$ に内分する点を定規とコンパスで作図する方法で作図せよ。

課題 4.7.4. 空間図形をつかって、正二十面体を作図せよ。ただし、定規とコンパスの作図方法にこだわらなくてよい。

課題 4.7.5. 空間図形をつかって、正十二面体を作図せよ。ただし、定規とコンパスの作図方法にこだわらなくてよい。

課題 4.7.6. 右図は双曲線 $x^2 - y^2 = 9$ のグラフと、4 点 $(5, 4), (-5, 4), (-5, -4), (5, -4)$ を頂点とする長方形である。

赤色で塗られた部分の面積の近似値を求めよ。



課題 4.7.7. $y = \sinh x, y = \cosh x$ のマクローリン展開の係数の近似を GeoGebra で目視し 3 次近似まで推測せよ。

課題 4.7.8. $y = \log(x + 2)$ のマクローリン展開の係数の近似を GeoGebra で目視し 3 次近似まで推測せよ。また、その近似を用いて $\log 2, \log 3$ の値を推測せよ。(注意が必要)