

目次

第 1 章	不定積分と諸定理	1
1.1	不定積分の基本公式	1
1.1.1	原始関数と不定積分	1
1.1.2	不定積分の公式	3
1.1.3	演習問題	4
1.1.4	演習問題 略解	6
1.2	不定積分の線型性と諸定理	7
1.2.1	不定積分の線型性	7
1.2.2	不定積分の諸定理	8
1.2.3	演習問題	10
1.2.4	演習問題 略解	11
1.3	置換積分法 I	15
1.3.1	C^1 級関数	15
1.3.2	置換積分法の定理	17
1.3.3	置換積分法の例	18
1.3.4	演習問題	20
1.3.5	演習問題 略解	21
1.4	置換積分法 II	26
1.4.1	置換積分法の考え方	26
1.4.2	特殊な置換積分法	27
1.4.3	置換積分のまとめ	30
1.4.4	演習問題	31
1.4.5	演習問題 略解	32
1.5	部分積分法	42

1.5.1	部分積分法の定理	42
1.5.2	演習問題	45
1.5.3	演習問題 略解	46
1.6	演習 I	54
1.6.1	演習問題	54
1.6.2	演習問題略解	56
1.7	有理関数の不定積分	69
1.7.1	有理関数と部分分数分解	69
1.7.2	有理関数の不定積分	71
1.7.3	演習問題	72
1.7.4	演習問題 略解	73
1.8	ヘビサイドの展開定理	83
1.8.1	ヘビサイドの展開定理を使うために	83
1.8.2	ヘビサイドの展開定理 I	83
1.8.3	ヘビサイドの展開定理 II	84
1.8.4	ヘビサイドの展開定理 I+II	85
1.8.5	ヘビサイドの展開定理を利用するために	86
1.8.6	演習問題	87
1.8.7	演習問題 略解	88
第 2 章	定積分と基本定理	97
2.1	面積と積分法	97
2.1.1	面積	97
2.1.2	リーマン和	98
2.1.3	練習問題	100
2.1.4	練習問題 略解	101
2.2	区分求積法	102
2.2.1	リーマン和から区分求積法	102
2.2.2	区分求積法とは	103
2.2.3	演習問題	105
2.2.4	演習問題 略解	106

2.3	定積分の性質	109
2.3.1	定積分の性質	109
2.3.2	演習問題	111
2.3.3	演習問題 略解	112
2.4	積分の平均値の定理	114
2.4.1	積分の平均値の定理	114
2.4.2	演習問題	116
2.4.3	演習問題 略解	117
2.5	微分積分の基本定理、基本公式	120
2.5.1	微分積分の基本定理	120
2.5.2	演習問題	122
2.5.3	演習問題 略解	123
2.6	演習 II	126
2.6.1	演習問題	126
2.6.2	演習問題 略解	127
2.7	まとめ	133
2.7.1	まとめのテスト MA	133
2.7.2	まとめのテスト MB	134
2.7.3	まとめのテスト MA 略解	135
2.7.4	まとめのテスト MB 略解	137
2.7.5	まとめのテスト 再	139
2.7.6	まとめのテスト 再 略解	140

第1章

不定積分と諸定理

1.1 不定積分の基本公式

1.1.1 原始関数と不定積分

関数 $f(x)$ に対し、

$$F'(x) = f(x)$$

をみたす $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数という。

※ ここで、' は “プライム”、 F は “キャピタル (エフ)” と読む。

例 1.1.1. 例えば

$$(x^3)' = 3x^2, (x^3 + 1)' = 3x^2$$

より、 x^3 や、 $x^3 + 1$ は $3x^2$ の原始関数である。

♠ 注意! 原始関数は1つではない。

また、

$$F(x) = x^3, G(x) = x^3 + 1$$

とおくとき、 $G(x) = F(x) + 1$ となっている。

実は、次の定理が成り立つ。

定理 1.1.1.

$F(x), G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、

$$G(x) = F(x) + C$$

となる定数 C が存在する。

証明 1.1.1. 定理を示すには、

$$\{G(x) - F(x)\}' = 0$$

を示せばよい^{*1}。

ここで、 $F(x), G(x)$ は $f(x)$ の原始関数より ($F(x), G(x)$ は微分可能)、

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

となる。したがって、

$$G(x) - F(x) = C : \text{定数}$$

である。 □

証明終了の意味↑

この定理より、 $F(x)$ を $f(x)$ のある原始関数とすると、 $f(x)$ のすべての原始関数は

$$F(x) + C$$

で表される。これを、 $f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と表す。このとき、 C を**積分定数**とよぶ。

♠ **注意!** 教科書は”積分定数を省略する”となっている。

例 1.1.2.

$$(1) \int 3x^2 dx = F(x) + C = x^3 + C \quad (C : \text{積分定数})$$

$$(2) \int 3x^2 dx = G(x) + C_1 = x^3 + \underbrace{1}_{\nearrow} + C_1 \quad (C_1 : \text{積分定数})$$

↗ 1 は定数なので、 $C = C_1 + 1$ と置けば、(1), (2) は同じ式となる。

不定積分を求めることを**積分する**という。

例題 1.1.1. 以下の積分をせよ (不定積分を求めよ)。

$$(1) \int 4x^3 dx$$

$$(2) \int 6x^2 dx$$

$$(3) \int x^2 dx$$

$$(4) \int 1 dx$$

^{*1} 微分して 0 になるのは、定数のみである

1.1.2 不定積分の公式

微分の公式から、以下の不定積分の公式が得られる。

公式 1.1.1. 以下の公式が成り立つ。(ただし、各公式の C は積分定数とする)

$$(1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$$

$$(2) \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C$$

$$(3) \int e^x dx = e^x + C$$

$$(4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

※ ここで、 $a = e$ とすると、(3) が求まる。

$$(5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(7) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$(8) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$(9) \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$$

$$(10) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \quad (\text{ただし、} f(x) \text{ は微分可能な関数})$$

証明 1.1.2. 証明は演習問題とする。

公式 1.1.2. 以下の公式も成り立つ。(ただし、各公式の C は積分定数とする)

$$(11) \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$(12) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 + A}| + C \quad (A \neq 0)$$

$$(13) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$(14) \int \tan x dx = -\log |\cos x| + C$$

$$(15) \int \log x dx = x \log x - x + C$$

証明 1.1.3. 証明は利用する定理, 公理を紹介したとき、随時行う。

1.1.3 演習問題

問題 1.1.1. 上記公式の (2) から (10) を示すために、以下の下線部に適切な数や式を当てはめよ。ただし、積分定数 C および $\alpha \neq -1, a > 0$ などの条件は省略する。

(例) 教科書の 17 ページの式 (3.1) を用いると、 $x^{\alpha+1}$ を微分すると $(\alpha+1)x^{\alpha}$ となる。ここで、両方に $\frac{1}{\alpha+1}$ をかけて考えると、 $\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$ を微分すると x^{α} となるので、 x^{α} を積分すると $\frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1}$ になる。

(2) 教科書の (ア) ページの式 (イ) を用いる。

(ウ) を微分すると (エ) となるので、

(エ) を積分すると (ウ) になる。

(3) 教科書の (オ) ページの式 (カ) を用いる。

(キ) を微分すると (ク) となるので、

(ク) を積分すると (キ) になる。

(4) 教科書の (ケ) ページの式 (コ) を用いる。

(サ) を微分すると (シ) となる。

ここで、両方に定数 $\frac{1}{\log a}$ をかけて考えてみると、

(ス) を微分すると (セ) となるので、

(セ) を積分すると (ス) になる。

(5) 教科書の (ソ) ページの式 (タ) を用いる。

(チ) を微分すると (ツ) となるので、

(ツ) を積分すると (チ) になる。

(6) 教科書の (テ) ページの式 (ト) を用いる。

(ナ) を微分すると (ニ) となるので、

(ニ) を積分すると (ナ) になる。

(7) 教科書の (ヌ) ページの式 (ネ) を用いる。

(ノ) を微分すると (ハ) となるので、

(ハ) を積分すると (ノ) になる。

(8) 教科書の (ヒ) ページの式 (フ) を用いる。 $\left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}$ より、

(ヘ) を微分すると (ホ) となるので、

(ホ) を積分すると (ヘ) になる。

(9) 教科書の (マ) ページの式 (ミ) を用いる。

(ム) を微分すると (メ) となる。

ここで、両方に定数 $\frac{1}{a}$ をかけて考えてみると、

(モ) を微分すると (ヤ) となるので、

(ヤ) を積分すると (モ) になる。

(10) 教科書の (ユ) ページの式 (ヨ) を用いる。

(ワ) を微分すると (ヲ) となるので、

(ヲ) を積分すると (ワ) になる。

1.1.4 演習問題 略解

略解 1.1.1. (2) 教科書の 45 ページの式 (6.8) を用いる。 $\log|x|$ を微分すると $\frac{1}{x}$ となるので、 $\frac{1}{x}$ を積分すると $\log|x|$ になる。

(3) 教科書の 47 ページの式 (6.14) を用いる。 e^x を微分すると e^x となるので、 e^x を積分すると e^x になる。

(4) 教科書の 46 ページの式 (6.12) を用いる。 a^x を微分すると $a^x \log a$ となる。よって、両方に定数 $\frac{1}{\log a}$ をかけて考えると、 $\frac{1}{\log a} \cdot a^x$ を微分すると a^x となるので、 a^x を積分すると $\frac{1}{\log a} \cdot a^x$ になる。

(5) 教科書の 27 ページの式 (4.9) を用いる。 $\cos x$ を微分すると $-\sin x$ となるので、 $\sin x$ を積分すると $-\cos x$ になる。

(6) 教科書の 27 ページの式 (4.8) を用いる。 $\sin x$ を微分すると $\cos x$ となるので、 $\cos x$ を積分すると $\sin x$ になる。

(7) 教科書の 27 ページの式 (4.10) を用いる。 $\tan x$ を微分すると $\frac{1}{\cos^2 x}$ となるので、 $\frac{1}{\cos^2 x}$ を積分すると $\tan x$ になる。

(8) 教科書の 38 ページの式 (5.11) を用いる。 $\left(\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{a}$ より、 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分すると $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}$ となるので、 $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ を積分すると $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ になる。

(9) 教科書の 38 ページの式 (5.13) を用いる。 $\tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分すると $\frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{a}$ となる。よって、両方に定数 $\frac{1}{a}$ をかけて考えると、 $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \cdot \frac{1}{a}$ を積分すると $\frac{1}{a} \cdot \tan^{-1} \frac{x}{a}$ になる。

(10) 教科書の 45 ページの式 (6.9) を用いる。 $\log|f(x)|$ を微分すると $\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$ となるので、 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ を積分すると $\log|f(x)|$ になる。

1.2 不定積分の線型性と諸定理

1.2.1 不定積分の線型性

微分の線型性

$$\begin{aligned} & \cdot \{kf(x)\}' = kf'(x) \\ & \cdot \{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x) \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{R})$$

と同様に、次が成り立つ。

不定積分の線型性

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \\ (2) \quad & \int kf(x) dx = k \int f(x) dx \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{R})$$

例 1.2.1. 以下の不定積分を考える。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int (2x^2 + 3) dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx \\ & = 2 \int x^2 dx + 3 \int 1 dx \\ & = \frac{2}{3} x^3 + 3x + C \end{aligned} \quad (C : \text{積分定数})$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ & = \int x dx + \int \frac{1}{x} dx \\ & = \frac{1}{2} x^2 + \log |x| + C \end{aligned} \quad (C : \text{積分定数})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int e^{x+2} dx = \int e^2 \cdot e^x dx \\ & = e^2 \int e^x dx \\ & = e^2 \cdot (e^x + C') \\ & = e^{x+2} + C \end{aligned} \quad (C : \text{積分定数})$$

♡ **確認** 教科書の例も確認すること。

1.2.2 不定積分の諸定理

定理 1.2.1. 不定積分に対して、以下が成り立つ。

$$(1) \int \{f(x)\}^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{1}{\alpha+1} \{f(x)\}^{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, C: \text{積分定数})$$

$$(2) \int \{f(x)\}^{-1} \cdot f'(x) dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C \quad (C: \text{積分定数})$$

(3) $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とし、 $a \neq 0$ のとき、

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (C: \text{積分定数})$$

である。

証明 1.2.1. 合成関数の微分より以下は示すことができる。

(1) $\alpha \neq -1$ すなわち、 $\alpha+1 \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\alpha+1} \{f(x)\}^{\alpha+1} + C \right]' &= \frac{\alpha+1}{\alpha+1} \{f(x)\}^\alpha \cdot f'(x) \\ &= \{f(x)\}^\alpha \cdot f'(x). \end{aligned}$$

(2) 44 ページの式 (6.7) より、

$$\begin{aligned} \{\log |f(x)| + C\}' &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \{f(x)\}^{-1} \cdot f'(x). \end{aligned}$$

(3) 14 ページの (2.12) より、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right\}' &= \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot (ax+b)' \\ &= f(ax+b). \end{aligned}$$

□

(3) は 132 ページの式 (14.14) である。よって、(14.1)' から (14.9)' も示すことができる。

♠ **注意!** 公式 (定理) を使うとき、“何が $f(x)$ か” に注意する!

$$(1) \boxed{f^\circ \cdot f' \text{ のタイプ}} \quad (2) \boxed{f^{-1} \cdot f' \text{ のタイプ}} \quad (3) \boxed{f(ax+b) \text{ のタイプ}}$$

例題 1.2.1.

(1) のタイプの例 $\int \sin^2 x \cos x dx$

まず、 $f(x) = \sin x$ とおくと、 $f'(x) = \cos x$ であるので、

$$\sin^2 x \cos x = \{\sin x\}^2 (\sin x)' = \{f(x)\}^2 f'(x)$$

である。よって、

$$\int \underbrace{\sin^2 x}_{\uparrow \{f(x)\}^2} \underbrace{\cos x}_{\uparrow f'(x)} dx = \int \{f(x)\}^2 f'(x) dx = \frac{1}{3} \{f(x)\}^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C \quad (C : \text{積分定数})$$

↑ 今後は省略可。

となる。

(2) のタイプの例 $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

まず、 $f(x) = x^2 + 1$ とおくと、 $f'(x) = 2x$ であるので、

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \left(= \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \right) = \frac{1}{2} \log |x^2+1| + C \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

(3) のタイプの例 $\int e^{2x+1} dx$

まず、 $f(X) = e^X$ とすると、 $f(2x+1) = e^{2x+1}$ である。また、

$$F(X) = \int f(X) dX = e^X + C$$

である。すなわち、 $F(2x+1) = e^{2x+1}$ である。よって、

$$\int e^{2x+1} dx = \int f(2x+1) dx = \frac{1}{2} F(2x+1) + C = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C \quad (C : \text{積分定数})$$

↑ 今後は省略可。

となる。

1.2.3 演習問題

問題 1.2.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | | |
|--|--|-------------------------------|
| (1) $5x^4$ | (2) $x^2 + 2x$ | (3) $\frac{4}{\sqrt{x}}$ |
| (4) $3e^x + 4^x$ | (5) $2\sin x + \frac{1}{3}\cos x$ | (6) $(2x+1)^5$ |
| (7) $\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ | (8) $\frac{1}{5x-3}$ | (9) $(2x+3)(x-4)$ |
| (10) $\frac{2x^2-5x-12}{x-4}$ | (11) $\frac{x-4}{2x^2-5x-12}$ | (12) $\frac{1}{x^2-1}$ |
| (13) e^{-2x} | (14) $\sqrt{e^x}$ | (15) 5^x |
| (16) $\sqrt{\frac{1}{3}x}$ | (17) $\frac{1}{\sqrt{x-6}}$ | (18) $\sin 2x$ |
| (19) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ | (20) $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$ | (21) $\frac{x}{2\sqrt{x}}$ |
| (22) $\frac{1}{\sqrt{4-8x}}$ | (23) $\frac{1}{x^2+6x+9}$ | (24) $\frac{1}{(2x+1)^2+9}$ |
| (25) $\frac{3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ | (26) $(3x^2-5x+2)^2(6x-5)$ | (27) $\frac{6x-5}{3x^2-5x+2}$ |
| (28) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ | (29) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ | (30) $\sin x \cos x$ |

問題 1.2.2. 積和の公式を用いて、以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| (1) $\sin 3x \cos 5x$ | (2) $\sin 3x \sin 5x$ | (3) $\cos 3x \cos 5x$ |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|

問題 1.2.3. 不定積分

$$\int \sin^3 x \, dx$$

を以下の方法で求めよ。

- (1) 関係式 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と 定理 1.2.1. (1) を用いる。
- (2) 半角の公式と積和の公式を用いる。
- (3) 3 倍角の公式を用いる。

1.2.4 演習問題 略解

略解 1.2.1. 不定積分の線型性 と 公式 1.1.1. および 定理 1.2.1. を用いる。また、以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \int 5x^4 dx = 5 \int x^4 dx = 5 \cdot \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = x^5 + C$$

$$(2) \int (x^2 + 2x) dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$

$$(3) \int \frac{4}{\sqrt{x}} dx = 4 \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4 \int \sqrt{x}^{-1} dx = 4 \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ = 4 \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 4 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + C = 8\sqrt{x} + C$$

$$(4) \int (3e^x + 4^x) dx = 3 \int e^x dx + \int 4^x dx = 3e^x + \frac{4^x}{\log 4} + C$$

$$(5) \int \left(2 \sin x + \frac{1}{3} \cos x \right) dx = 2 \int \sin x dx + \frac{1}{3} \int \cos x dx = -2 \cos x + \frac{1}{3} \sin x + C$$

$$(6) \int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{12} (2x+1)^6 + C$$

$$(7) \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{3} + C$$

$$(8) \int \frac{1}{5x-3} dx = \int \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{5x-3} dx = \frac{1}{5} \cdot \int \frac{(5x-3)'}{5x-3} dx = \frac{1}{5} \log |5x-3| + C$$

$$(9) \int (2x+3)(x-4) dx = \int (2x^2 - 5x - 12) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 12x + C$$

$$(10) \int \frac{2x^2 - 5x - 12}{x-4} dx = \int \frac{(2x+3)(x-4)}{x-4} dx = \int (2x+3) dx = x^2 + 3x + C$$

$$(11) \int \frac{x-4}{2x^2-5x-12} dx = \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \log |2x+3| + C$$

$$(12) \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)} dx = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} \log |x-1| + \frac{1}{2} \log |x+1| + C \\ = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

$$(13) \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \quad (\text{定理 1.2.1.(3)})$$

$$(14) \int \sqrt{e^x} dx = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C = 2\sqrt{e^x} + C$$

- (15) $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\log 5} + C$ (公式 1.1.1.(4))
- (16) $\int \sqrt{\frac{1}{3}x} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2\sqrt{3}}{9} x\sqrt{x} + C$
- (17) $\int \frac{1}{\sqrt{x-6}} dx = 2\sqrt{x-6} + C \quad \left(f(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} = X^{-\frac{1}{2}}, \Rightarrow F(X) = 2X^{\frac{1}{2}} \right)$
- (18) $\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C \quad (f(X) = \sin X, \Rightarrow F(X) = -\cos X)$
- (19) $\int \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx = -\sin x + C \quad \left(\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos x \right)$
- (20) $\int \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} dx = -\frac{2}{x} + \log |x| + C$
- (21) $\int \frac{x}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{2} \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} x\sqrt{x} + C$
- (22) $\int \frac{1}{\sqrt{4-8x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x} + C \quad (a = -2 \text{ に注意})$
- (23) $\int \frac{1}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = -\frac{1}{x+3} + C$
- (24) $\int \frac{1}{(2x+1)^2+9} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{X}{3} + C = \frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{2x+1}{3} + C$
 $\left(f(X) = \frac{1}{X^2+\alpha^2}, \Rightarrow F(X) = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \frac{X}{\alpha}, \text{ また } X = 2x+1 \text{ なので } a = 2 \right)$
- (25) $\int \frac{3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \int \frac{3(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)} dx = \frac{3}{2} \int (\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}) dx$
 $= (x+1)\sqrt{x+1} + (x-1)\sqrt{x-1} + C$
- (26) $\int (3x^2-5x+2)^2(6x-5) dx = \frac{1}{3}(3x^2-5x+2)^3 + C$
 $(f(x) = 3x^2-5x+2 \text{ と思うと、} f^2(x)f'(x) \text{ の形をしている。})$
- (27) $\int \frac{6x-5}{3x^2-5x+2} dx = \log |(3x-2)(x-1)| + C = \log |3x-2| + \log |x-1| + C$
 $\left(f(x) = 3x^2-5x+2 \text{ と思うと、} \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ の形をしている。} \right)$
- (28) $\int \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx = -\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + C$
- (29) $\int \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + C$
- (30) $\int \sin x \cos x dx = \int \sin x (\sin x)' dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$
 $= \int \cos x (-\cos x)' dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C \quad (\leftarrow \uparrow \text{ どちらの答えも正しい。})$

略解 1.2.2. 積和の公式

$$\begin{aligned}\sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \} \\ \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}\end{aligned}$$

を用いる。

$$\begin{aligned}(1) \quad \int \sin 3x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} \{ \sin 8x + \sin(-2x) \} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 8x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \quad (C : \text{積分定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \int \sin 3x \sin 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} \{ \cos 8x - \cos(-2x) \} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 8x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (C : \text{積分定数})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \int \cos 3x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2} \{ \cos 8x + \cos(-2x) \} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 8x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (C : \text{積分定数})\end{aligned}$$

♠ **注意!** 三角関数の性質を忘れないように。

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

♠ **注意!** 三角関数の微分、積分も忘れないように。

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\sin x = \int \cos x \, dx, \quad \cos x = -\int \sin x \, dx$$

(+C 省略)

略解 1.2.3. 半角の公式は

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

であり、3 倍角の公式は

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

である。また、3 倍角の公式から

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

が得られる。

$$\begin{aligned} (1) \quad \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x \, dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x \, dx - \frac{1}{2} \int \sin x \cdot \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin x \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \{ \sin 3x + \sin(-x) \} \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\cos 3x) + \frac{1}{4} \cdot (-\cos x) + C \\ &= -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int \sin^3 x \, dx &= \int \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \, dx \\ &= -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C \quad (C: \text{積分定数}) \end{aligned}$$

♣ 補足 $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ なので、(2), (3) の答えと (1) の答えは一致する。

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x + C &= -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{12} (4 \cos^3 x - 3 \cos x) + C \\ &= -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{1}{4} \cos x + C \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C \end{aligned}$$

1.3 置換積分法 I

1.3.1 C^1 級関数

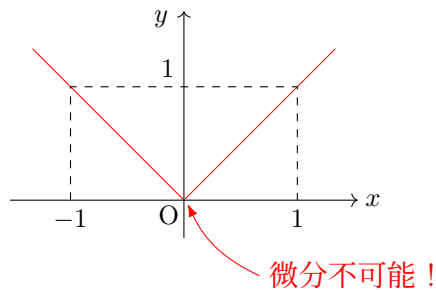
定義 1.3.1. 関数 $f(x)$ について、次を定める。

$$f(x) \text{ が } C^1 \text{ 級 (連続微分可能)} \stackrel{\text{def}}{\iff} f(x) \text{ が微分可能かつ } f'(x) \text{ が連続}$$

♠ 注意!

$$f(x) : \text{微分可能} \begin{matrix} \implies \\ \nleftarrow \end{matrix} f(x) : \text{連続}$$

例 1.3.1. $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続であるが、微分不可能。



この関数は $x < 0, x > 0$ において、連続であることは明らかである。また、 $x = 0$ において、左からの極限と右からの極限

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} |x| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} x = 0$$

が $f(0)$ と一致するので、連続である。

次に、微分の定義に従って、この関数の $x = 0$ における左極限と右極限は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ \text{h} < 0 \text{ なら } |h| = -h \rightarrow &= \lim_{h \rightarrow 0-0} \left(\frac{-h}{h} \right) \\ &= -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \left(\frac{h}{h} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

となり、一致していない。よって、この関数は微分可能ではない。

例題 1.3.1. 以下の関数は C^1 級であるか、確認せよ。

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & (x < 0) \\ \frac{1}{2}x^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

微分の定義に従って考える。

まず、 $f(x)$ は $x < 0$ において、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(x+h)^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-x - \frac{h}{2}\right) \\ &= -x \end{aligned}$$

であり、 $x > 0$ においては、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= x \end{aligned}$$

である。また、 $x = 0$ においても、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-0} \frac{-\frac{1}{2}(0+h)^2 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-0} \left(-\frac{h}{2}\right) \\ &= 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{2}(0+h)^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+0} \left(\frac{h}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、左極限の値と右極限の値が一致する。以上より、この関数 $f(x)$ は微分可能である。

また、 $f'(x)$ を求めると例 1.3.1. の関数であり、連続であった。

以上より、この関数は微分可能であり、その導関数は実数全体で連続であることが解った。よって、 C^1 級である。

1.3.2 置換積分法の定理

そのままでは積分が困難なとき、変数変換 (x の関数を別の変数に変換) を行うことによって積分が容易になることがある。

定理 1.3.1. (置換積分法)

単調な C^1 級関数 $g(x)$ により変数変換 $t = g(x)$ を行くと、

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

x の式 $\longrightarrow$ t の式

が成り立つ。

証明 1.3.1. $F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とする。合成関数の微分法より、

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{d}{dx} F(\underbrace{g(x)}) & = & \frac{dF(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} & = & f(t) \cdot \frac{dt}{dx} & = & f(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx} \\ \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \\ t & & \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} & & t = g(x) & & \end{array}$$

となる。

よって、

$$f(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx} F(g(x))$$

の両辺に $\int$ と dx をつけると、

$$\begin{aligned} \int f(g(x)) \cdot \frac{dg(x)}{dx} dx &= \int \frac{d}{dx} F(g(x)) dx \\ &= F(g(x)) + C \\ &= F(t) + C \\ &= \int f(t) dt \end{aligned}$$

となる。 □

♡ **point** 変数変換の方法は 1 通りとは限らないことも多々ある。まずは、例を見て感覚を身に着けよう。

1.3.3 置換積分法の例

例 1.3.2.

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

まず $t = \sin x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ である♡。よって、

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x &= \int t^2 \boxed{\cos x dx}^\heartsuit = \int t^2 \boxed{dt} \\ &= \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} + C \end{aligned} \quad (C : \text{積分定数})$$

⌞ x に戻すのを忘れない!

♡ point $dt = \cos x dx$ と形式的に考える。

例 1.3.3.

$$\int \tan x dx$$

まず、

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

なので、 $t = \cos x$ とおく。このとき、 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ となるので、 $dx = -\frac{1}{\sin x} dt$ とすることによって、

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{t} \left(-\frac{1}{\sin x} \right) dt \\ &= - \int \frac{1}{t} dt \\ &= -\log |t| + C \\ &= -\log |\cos x| + C \end{aligned}$$

を得る。

例 1.3.4.

$$\int x\sqrt{x+1}dx$$

まず、 $t = \sqrt{x+1}$ とおき、両辺を 2 乗すると、 $t^2 = x+1$ より、 $x = t^2 - 1$ である。

両辺を t で微分すると、 $\frac{dx}{dt} = 2t$ となるので、 $dx = 2tdt$ とすることによって、

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1} \boxed{dx} &= \int \underbrace{x}_{\substack{\text{ } \\ \leftarrow x \text{ が残らないように}}} \underbrace{t}_{\substack{\text{ } \\ \leftarrow x \text{ が残らないように}}} \boxed{2tdt} \\ &= \int (t^2 - 1) \cdot 2t^2 dt \\ &= 2 \int (t^4 - t^2) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + C \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C \quad (C: \text{積分定数})\end{aligned}$$

を得る。

例 1.3.5.

$$\int \frac{2x^3}{x^2+1} dx$$

まず、 $t = x^2 + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x$ となるので、 $dx = \frac{1}{2x} dt$ である。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3}{x^2+1} dx &= \int \frac{2x^3}{t} \cdot \frac{1}{2x} dt \\ &= \int \frac{x^2}{t} dt \\ &= \int \frac{t-1}{t} dt \\ &= \int 1 dt - \int \frac{1}{t} dt \\ &= t - \log |t| + C \\ &= x^2 + 1 - \log(x^2 + 1) + C' \quad (C': \text{積分定数}) \\ &= x^2 - \log(x^2 + 1) + C \quad (C: \text{積分定数})\end{aligned}$$

を得る。

1.3.4 演習問題

問題 1.3.1. (復習) 以下の関数 (1)～(6) において、 C^1 級関数をすべて選べ。

$$(1) f(x) = e^x$$

$$(2) f(x) = x|x|$$

$$(3) f(x) = \sin x$$

$$(4) f(x) = |\sin x|$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$$

問題 1.3.2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) (1+x)^3$$

$$(2) (2-x)^4$$

$$(3) (2x-1)^4$$

$$(4) \left(\frac{x+1}{3}\right)^5$$

$$(5) \left(\frac{2-2x}{3}\right)^5$$

$$(6) \frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$(7) \cos(2x+1)$$

$$(8) \sin(3x+1)$$

$$(9) \tan(4x+1)$$

$$(10) \sin(5x+1) \cos(5x+1)$$

問題 1.3.3. 以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、 $\underline{a \neq 0}$ とする。

$$(1) \frac{x^5}{1+2x^6}$$

$$(2) \frac{4x}{\sqrt{3+5x^2}}$$

$$(3) \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$$

$$(4) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(5) \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(6) \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(7) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(8) \frac{1}{\sqrt{ax+b}}$$

問題 1.3.4. 定理 1.2.1. を置換積分の方法で証明せよ。

1.3.5 演習問題 略解

略解 1.3.1. 微分の定義 10 ページの式 (2.3) に従うと、(4) 以外は微分可能であるが、(5) は導関数が連続で無いので、 C^1 級は (1), (2), (3), (6) である。

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|\sin(0+h)| - |\sin(0)|}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|\sin h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{|\sin(0+h)| - |\sin(0)|}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|\sin h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{-h} = -1$$

(5) [ア] 微分可能であることの確認

i) まず、 $x = 0$ で微分係数を考える。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 = f'(0)$$

※ 最後は、 $-1 \leq \sin \frac{1}{h} \leq 1$ なので、はさみうちの原理より。

ii) $x \neq 0$ においては、

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

である。

[イ] 導関数が連続でないことの確認

上記 i) より、 $f'(0) = 0$ である。

また、ii) より

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(2h \sin \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h} \right)$$

である。このとき、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos \frac{1}{h}$$

は振動するため、連続ではない。

略解 1.3.2. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = 1 + x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dt$ となる。よって、

$$\int (1+x)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(1+x)^4 + C$$

である。

(2) $t = 2 - x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -1dt$ となる。よって、

$$\int (2-x)^4 dx = \int t^4 \cdot (-1) dt = -\frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{5}(2-x)^5 + C$$

である。

(3) $t = 2x - 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ となる。よって、

$$\int (2x-1)^4 dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{10}(2x-1)^5 + C$$

である。

(4) $t = \frac{x+1}{3}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \Rightarrow dx = 3dt$ となる。よって、

$$\int \left(\frac{x+1}{3}\right)^5 dx = \int t^5 \cdot 3dt = 3 \cdot \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{3}\right)^6 + C$$

である。

(5) $t = \frac{2-2x}{3}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{3} \Rightarrow dx = -\frac{3}{2} dt$ となる。よって、

$$\int \left(\frac{2-2x}{3}\right)^5 dx = \int t^5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) dt = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} t^6 + C = -\frac{1}{4} \left(\frac{2-2x}{3}\right)^6 + C$$

である。

(6) $t = 2x + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ となる。よって、

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot (-1)t^{-1} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1} + C$$

である。

(7) $t = 2x + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$ となる。よって、

$$\int \cos(2x+1) dx = \int (\cos t) \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C$$

である。

(8) $t = 3x + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$ となる。よって、

$$\int \sin(3x+1) dx = \int (\sin t) \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot (-\cos t) + C = -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C$$

である。

(9) $t = 4x + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \tan(4x + 1) dx &= \int (\tan t) \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} (-\log |\cos t|) + C \\ &= -\frac{1}{4} \log |\cos(4x + 1)| + C\end{aligned}$$

である。

(10) 2 倍角の公式 $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ を使う。

$$\sin(5x + 1) \cos(5x + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin(5x + 1) \cos(5x + 1) = \frac{1}{2} \sin(2(5x + 1))$$

ここで $t = 10x + 2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 10 \Rightarrow dx = \frac{1}{10} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \sin(5x + 1) \cos(5x + 1) dx &= \int \frac{1}{20} \sin t dt = \frac{1}{20} (-\cos t) + C \\ &= -\frac{1}{20} \cos(10x + 2) + C\end{aligned}$$

である。

略解 1.3.3. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = 1 + 2x^6$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 12x^5 \Rightarrow dx = \frac{1}{12x^5} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{1 + 2x^6} dx &= \int \frac{x^5}{t} \cdot \frac{1}{12x^5} dt = \frac{1}{12} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{12} \log |t| + C \\ &= \frac{1}{12} \log(1 + 2x^6) + C\end{aligned}$$

である。

(2) $t = 3 + 5x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 10x \Rightarrow dx = \frac{1}{10x} dt$ となる。よって、

$$\int \frac{4x}{\sqrt{3 + 5x^2}} dx = \int \frac{4x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{10x} dt = \frac{2}{5} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{4}{5} \sqrt{3 + 5x^2} + C$$

である。

(3) $t = x + 2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dt$ となる。また、 $x + 1 = t - 1$ より、

$$\begin{aligned}\int \frac{x + 1}{\sqrt{x + 2}} dx &= \int \frac{t - 1}{\sqrt{t}} dt = \int \sqrt{t} dt - \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} (x + 2) \sqrt{x + 2} - 2\sqrt{x + 2} + C = \frac{2}{3} (x - 1) \sqrt{x + 2} + C\end{aligned}$$

である。

(4) $t = 1 - x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{1}{2x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot (-2t^{\frac{1}{2}}) + C = -\sqrt{t} + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

である。

(5) $t = 1 - x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{1}{2x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x^3}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1-t}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}\sqrt{t}(t-3) + C \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

である。

(6) $t = 1 - x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{1}{2x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{x^5}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{x^4}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2-2t+1}{\sqrt{t}} dt = -\frac{1}{2} \int t^{\frac{3}{2}} dt + \int t^{\frac{1}{2}} dt - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= -\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} \left\{ -\frac{1}{5}t^2 + \frac{2}{3}t - 1 \right\} + C \\ &= -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2} \{3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\} + C\end{aligned}$$

である。

(7) まず、 $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ であり、 $t = 1 - x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = -\frac{1}{2x} dt$ となる。よって、

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

となり、前者は公式より求まる。よって、

$$(\text{与式}) = \sin^{-1} x - \sqrt{t} + C = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

である。

(8) $t = ax + b$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = a \Rightarrow dx = \frac{1}{a} dt$ となる。よって、

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{a} dt = \frac{2}{a} \sqrt{t} + C = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + C$$

である。

略解 1.3.4. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = f(x)$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = f'(x) \Rightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \int \{f(x)\}^\alpha \cdot f'(x) dx &= \int t^\alpha \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} dt \\ &= \int t^\alpha dt \\ &= \frac{1}{\alpha+1} \{f(x)\}^{\alpha+1} + C \end{aligned}$$

である。

(2) $t = f(x)$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = f'(x) \Rightarrow dx = \frac{1}{f'(x)} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \int \{f(x)\}^{-1} \cdot f'(x) dx &= \int t^{-1} \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} dt \\ &= \int t^{-1} dt \\ &= \log |f(x)| + C \end{aligned}$$

である。

(3) $t = ax + b$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = a \Rightarrow dx = \frac{1}{a} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \int f(ax+b) dx &= \int f(t) \cdot \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{1}{a} \int f(t) dt \\ &= \frac{1}{a} F(t) + C \\ &= \frac{1}{a} F(ax+b) + C \end{aligned}$$

である。

1.4 置換積分法Ⅱ

1.4.1 置換積分法の考え方

♠ 重要 『置換積分法の変数変換は一通りではない』ので、覚えるだけでなく、試してみることも大事。

例 1.4.1. 次の積分を2通りの置換積分で考える。

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-x}} dx$$

(i) まず、 $t = 5 - x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -1$ であり、 $dx = (-1)dt$, $x = 5 - t$ より、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{5-t}{\sqrt{t}} \cdot (-1) dt \\ &= \int \left(\sqrt{t} - \frac{5}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \int \left(t^{\frac{1}{2}} - 5t^{-\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 5 \cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} (5-x)\sqrt{5-x} - 10\sqrt{5-x} + C. \end{aligned} \quad (C: \text{積分定数})$$

である。

(ii) 今度は、 $t = \sqrt{5-x}$ とおくと、 $x = 5 - t^2$ であり、

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5-x}} = -\frac{1}{2t}$$

となり、 $dx = -2t dt$ である。よって、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{5-t^2}{t} \cdot (-2t) dt \\ &= \int (2t^2 - 10) dt \\ &= \frac{2}{3} t^3 - 10t + C \\ &= \frac{2}{3} (5-x)\sqrt{5-x} - 10\sqrt{5-x} + C. \end{aligned} \quad (C: \text{積分定数})$$

である。

※ いずれの場合も、 $-\frac{2}{3}(x+10)\sqrt{5-x} + C$ と、まとめてもよい。

1.4.2 特殊な置換積分法

例 1.4.2.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

まず $x = a \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき $\frac{dx}{dt} = a \cos t$ ($dx = a \cos t dt$) より

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \boxed{dx} = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \boxed{a \cos t dt}$$

である。ここで $\sqrt{x^2} = |x|$ に注意して計算すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\ &= |a| \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t} \\ &= a |\cos t| \\ (*) &= a \cos t \end{aligned}$$

となる。

(*) t の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $\cos t \geq 0$ より。

よって、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ \text{半角の公式} \rightarrow &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\ \text{倍角の公式} \rightarrow &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \cdot 2 \sin t \cos t \right) + C \\ \sin t = \frac{x}{a} \rightarrow &= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \sin^2 t} \right) + C \\ (**) &= \frac{a^2}{2} \left(\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \left(a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2} \right) + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

(**) t の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ なので、 $t = \sin^{-1} \frac{x}{a}$ である。

例 1.4.3.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx$$

まず $x = a \tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき $\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$ より、 $dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt$ である。

よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx &= \int \frac{1}{a^2 \tan^2 t + 1} dx \\ &= \int \frac{1}{a^2} \cos^2 t dx \\ &= \int \frac{1}{a^2} \cos^2 t \frac{a}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{t}{a} + C \\ &= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

である。

例 1.4.4.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx \quad (a \neq 0)$$

まず、 $t = x + \sqrt{x^2 + a}$ とおく (なぜこうおくか、各自で)。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= 1 + \frac{1}{2}(x^2 + a)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{x^2 + a}} \end{aligned}$$

であり、 $dx = \frac{\sqrt{x^2 + a}}{t} dt$ である。よって、

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} \frac{\sqrt{x^2 + a}}{t} dt = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| + C \\ &= \log |x + \sqrt{x^2 + a}| + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

である。

例 1.4.5.

$$\int \frac{1}{\cos x} dx$$

ここでは、 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおく。また、2 倍角の公式を用いて、 $\cos x$ を計算すると、

$$\cos x = \cos 2 \cdot \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

と表すことが出来る。さらに、

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} &= \cos^2 \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right) \\ \tan \frac{x}{2} = t &\rightarrow = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \left(\tan \frac{x}{2} \right)' = \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + t^2) \end{aligned}$$

となることより、 $dt = \frac{1+t^2}{2} dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ である。

以上より、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ u = 1-t \text{ とおいて考える} &\rightarrow = \log |1+t| + (-1) \log |1-t| + C \\ &= \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

1.4.3 置換積分のまとめ

三角関数、無理関数を含む関数の積分を行うと、き、置換法をまとめて表にする。
表の $f([X, Y])$ は、2 変数関数ではなく、 X と Y を含む関数を意味している。

	被積分関数	置換法
三角関数	(1) $f(\sin x) \cos x$	$t = \sin x$
	(2) $f(\cos x) \sin x$	$t = \cos x$
	(3) $f([\sin^2 x, \cos^2 x])$	$t = \tan x, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$
	(4) $f([\sin x, \cos x])$	$t = \tan \frac{x}{2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$
無理関数	(5) $f([x, \sqrt[n]{ax+b}]) \quad (a \neq 0)$	$t = \sqrt[n]{ax+b}$
	(6) $f\left(\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right]\right)$ $(ad-bc \neq 0)$	$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$
	(7) $f([x, \sqrt{ax^2+bx+c}])$ $(a \neq 0, D = b^2 - 4ac \neq 0)$	(i) $a > 0$ のとき $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{ax}$ (ii) $a < 0, D > 0$ のとき $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $t = \sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}, \quad (\alpha < \beta)$
	(8) $f([x, \sqrt{a^2-x^2}]) \quad (a > 0)$	$x = a \sin \theta, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$
	(9) $f([x, \sqrt{x^2+a^2}]) \quad (a > 0)$	$x = a \tan \theta, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$
	(10) $f([x, \sqrt{x^2-a^2}]) \quad (a > 0)$	$x = a \sec \theta, \quad \left(0 \leq \theta \leq \pi, \theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$
指数関数	(11) $f(e^x)e^x$	$t = e^x$
対数関数	(12) $f(a \log x + b) \frac{1}{x}$	$t = a \log x + b$

1.4.4 演習問題

問題 1.4.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | |
|---|--|
| (1) $(2-3x)^n \quad (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$ | (2) $\frac{1}{x^2 - 2x + 5}$ |
| (3) $\frac{1}{\sqrt{5x - x^2}}$ | (4) $\frac{1}{\sqrt{7x - 3}}$ |
| (5) xe^{-x^2} | (6) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$ |
| (7) $x(x^2 - 3)^5$ | (8) $(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)^4$ |
| (9) $\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ | (10) $\frac{3x}{\sqrt{1 - x^4}} \quad (\text{ヒント: } t = x^2)$ |
| (11) $\frac{x^2}{x^6 - 1} \quad (\text{ヒント: } t = x^3)$ | (12) $\frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{ヒント: } x = \tan t)$ |

問題 1.4.2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | |
|--|---|
| (1) $\frac{1}{1 + \cos x}$ | (2) $\frac{1}{2 + \cos x}$ |
| (3) $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$ | (4) $\frac{1}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}$ |
| (5) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$ | (6) $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$ |
| (7) $\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2 - 4x - 2}}$ | (8) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |
| (9) $\frac{\sqrt{1 + \log x}}{x}$ | (10) $\frac{1}{\sqrt{e^{3x} + 4}}$ |

問題 1.4.3. 以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $\frac{2x+5}{x^2 - 2x + 4}$ | (2) $\frac{3x+5}{\sqrt{1-x-2x^2}}$ |
| (3) $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$ | (4) $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ |

問題 1.4.4. 例 1.4.5 の値は、以下と同じであることを確認せよ。

$$\log \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right| + C, \quad \log \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} + C \quad \text{や} \quad \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) + C$$

ちなみに、最後の式は、 $\cos x \neq 0$ より、 $-1 < \sin x < 1$ であり、絶対値が外れる。

1.4.5 演習問題 略解

略解 1.4.1. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = 2 - 3x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -3 \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int (2 - 3x)^n dx &= \int t^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) dt \\ n \neq -1 \text{ より } \rightarrow &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C \\ &= -\frac{1}{3(n+1)} \cdot (2 - 3x)^{n+1} + C\end{aligned}$$

となる。

(2) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2 + 2^2} dx$ となる。ここで、 $t = x - 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dt$ となる。よって、公式を用いると、

$$\int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} dx = \int \frac{1}{t^2 + 2^2} dt = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x-1}{2} + C$$

となる。

$$(3) \int \frac{1}{\sqrt{5x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5x - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}} dx$$

となる。 $t = x - \frac{5}{2}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 1 \Rightarrow dx = dt$ となる。よって、公式を用いると、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{5x - x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - t^2}} dt = \sin^{-1} \frac{t}{\frac{5}{2}} + C = \sin^{-1} \frac{2}{5} t + C \\ &= \sin^{-1} \left(\frac{2}{5} x - 1 \right) + C\end{aligned}$$

となる。

♣ 補足 $\sin^{-1}(-\theta) = -\sin^{-1} \theta$ なので、 $t = \frac{5}{2} - x$ においても同じ結果になる。

(4) $t = 7x - 3$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 7 \Rightarrow dx = \frac{1}{7}dt$ となる。よって、

$$\int \frac{1}{\sqrt{7x - 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{7} dt = \frac{1}{7} \cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{7} \sqrt{7x - 3} + C$$

となる。

(5) $t = -x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{1}{-2x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int x e^{-x^2} dx &= \int x e^t \cdot \frac{1}{-2x} dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

となる。

(6) $t = e^x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x} dt = \frac{1}{t} dt$ となる。よって、

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} dt \quad (*)$$

となる。ここで再び、 $u = 1 + t^2$ とおくと、 $\frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{1}{2t} du$ となる。従って、

$$\begin{aligned} (*) &= \int \frac{t}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2t} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+t^2} + C \\ &= \sqrt{1+e^{2x}} + C\end{aligned}$$

となる。

♣ 補足 ちなみに、 $t = 1 + e^{2x}$ においても同じ結果になる。2段階の例としての紹介。

(7) $t = x^2 - 3$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int x(x^2 - 3)^5 dx &= \int x t^5 \cdot \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int t^5 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} t^6 + C \\ &= \frac{1}{12} (x^2 - 3)^6 + C\end{aligned}$$

となる。

(8) $t = x^3 + 2x + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 3x^2 + 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2 + 2} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int (3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)^4 dx &= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C \\ &= \frac{1}{5} (x^3 + 2x + 1)^5 + C\end{aligned}$$

となる。

(9) $x = \sin \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta \Rightarrow dx = \cos \theta d\theta$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta \\
 &= \int \frac{\sin^2 \theta}{|\cos \theta|} \cdot \cos \theta d\theta \\
 \textcolor{red}{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}} \rightarrow &= \int \sin^2 \theta d\theta = \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta + C \\
 &= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta + C \\
 \textcolor{red}{\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \rightarrow &= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \\
 &= \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C
 \end{aligned}$$

となる。

(10) $t = x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx &= \int \frac{3x}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2x} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= \frac{3}{2} \sin^{-1} t + C \\
 &= \frac{3}{2} \sin^{-1} x^2 + C
 \end{aligned}$$

となる。

(11) $t = x^3$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{x^6-1} dx &= \int \frac{x^2}{t^2-1} \cdot \frac{1}{3x^2} dt \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{t^2-1} dt \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \log \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right| + C \\
 &= \frac{1}{6} \log \left| \frac{x^3-1}{x^3+1} \right| + C
 \end{aligned}$$

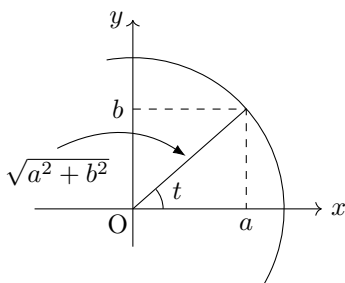
となる。

(12) $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$) とおくと、 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} dt$ となる。
よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \left(1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t)^{-\frac{3}{2}} dx \\ &= \int (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} dt = \int \sqrt{\cos^2 t} dt = \int \cos t dt \\ &= \sin t + C \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t > 0$.
 $\dots (*)$

である。 $x = \tan t$ とおいたので、下図より



$\tan t = \frac{b}{a} = x \Rightarrow b = ax$ と表すことが出来る。ただし、 $a > 0$ である。

よって、 $\sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + a^2 x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ であり、

$$(*) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C$$

となる。 $(b < 0$ の場合も同様)

略解 1.4.2. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) 三角関数 (4) を使う。 $t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと、 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$ である。よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int 1 dt \\ &= t + C \\ &= \tan \frac{x}{2} + C \end{aligned}$$

となる。

(2) (1) と同様に考えると、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\
 &= \frac{2}{2(1+t^2) + 1 - t^2} dt \\
 &= \int \frac{2}{3+t^2} dt \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{3}} + C \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C
 \end{aligned}$$

となる。

(3) 三角関数 (1) を使う。 $t = \sin x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos x} dt$ となる。
よって、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int \frac{\cos x}{1 + t^2} \cdot \frac{1}{\cos x} dt \\
 &= \int \frac{1}{1 + t^2} dt \\
 &= \tan^{-1} t + C \\
 &= \tan^{-1} \sin x + C
 \end{aligned}$$

となる。

(4) 三角関数 (3) を使う。 $t = \tan x$ とおくと、 $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$ となる。 よって、

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{\frac{1}{1+t^2} + \frac{4t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \int \frac{1}{1+4t^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \tan^{-1} 2t + C
 \end{aligned}$$

となる。

(5) 無理関数 (5) を使う。 $t = \sqrt[3]{x+1}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ となる。 よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx &= \int \frac{1}{1+t} \cdot 3t^2 dt = 3 \int \left\{ t - 1 + \frac{1}{1+t} \right\} dt \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} t^2 - t + \log |1+t| \right) + C \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3 \log |1 + \sqrt[3]{x+1}| + C \end{aligned}$$

となる。

(6) $(x-1)(2-x) = -(x-1)(x-2)$ であり、無理関数 (7) (ii) に当てはめると、
 $a = -1$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ となる。 よって、 $t = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}$ とおくと、

$$t^2 = \frac{x-1}{2-x} \Rightarrow x = \frac{2t^2+1}{t^2+1} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

である。また、 x を消去するために、 $2-x$ を t で表すと、 $2-x = \frac{1}{t^2+1}$ となるので、それぞれ代入して計算すると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}} dx &= \int \frac{1}{(2-x)\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{1}{t^2+1} \cdot t} \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2 \tan^{-1} t + C \\ &= 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} + C \end{aligned}$$

となる。

(7) 無理関数 (7) (i) に当てはめる。まず、 $t = \sqrt{x^2-4x-2} + \sqrt{1}x$ とおき、 $t-x = \sqrt{x^2-4x-2}$ の両辺を 2 乗して考えると、

$$t^2 - 2tx + x^2 = x^2 - 4x - 2 \Rightarrow x = \frac{t^2+2}{2t-4}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2-4t-2}{(t-2)^2}$$

となる。

また、 x を消去するために、 $\sqrt{x^2 - 4x - 2}$ と $x - 1$ を計算すると

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4x - 2} &= t - x = t - \frac{t^2 + 2}{2t - 4} \\ &= \frac{t^2 - 4t - 2}{2(t - 2)}, \\ x - 1 &= \frac{t^2 - 2t + 6}{2(t - 2)}\end{aligned}$$

をえる。したがって、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x - 1)\sqrt{x^2 - 4x - 2}} dx &= \int \frac{2(t - 2)}{t^2 - 2t + 6} \cdot \frac{2(t - 2)}{t^2 - 4t - 2} \cdot \frac{t^2 - 4t - 2}{2(t - 2)^2} dt \\ &= \int \frac{2}{t^2 - 2t + 6} dt \\ &= \int \frac{2}{(t - 1)^2 + 5} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{t - 1}{\sqrt{5}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 4x - 2} + x - 1}{\sqrt{5}} + C\end{aligned}$$

となる。

(8) $t = e^x$ とおく。より、 $t = e^x + e^{-x}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = e^x - e^{-1} \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x - e^{-x}} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{e^x - e^{-x}}{t} \cdot \frac{1}{e^x - e^{-x}} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| + C \\ &= \log(e^x + e^{-x}) + C\end{aligned}$$

となる。

(9) $t = \log x + 1$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1 + \log x}}{x} dx &= \int \frac{\sqrt{t}}{x} \cdot x dt \\ &= \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} (\log x + 1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

となる。

(10) $t = \sqrt{e^{3x} + 4}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x} + 4}} \Rightarrow dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{e^{3x} + 4}}{e^{3x}} dt$ となる。

よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{e^{3x} + 4}} dx &= \int \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{e^{3x}} dt \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{1}{t^2 - 4} dt \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \log \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C \\ &= \frac{1}{6} \log \frac{\sqrt{e^{3x} + 4} - 2}{\sqrt{e^{3x} + 4} + 2} + C \end{aligned}$$

となる。

略解 1.4.3. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) まず、 $t = x^2 - 2x + 4$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x - 2$ となる。そこで、

$$\int \frac{2x+5}{x^2-2x+4} dx = \underbrace{\int \frac{2x-2}{x^2-2x+4} dx}_{(\text{ア})} + \underbrace{\int \frac{7}{x^2-2x+4} dx}_{(\text{イ})}$$

と分ける。

このとき、

$$\begin{aligned} (\text{ア}) &= \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4} dx = \int \frac{2x-2}{t} \cdot \frac{1}{2x-2} dt = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| + C_1 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} (\text{イ}) &= \int \frac{7}{x^2-2x+4} dx = 7 \int \frac{1}{(x-1)^2+3} dx \\ &= \frac{7}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C_2 \end{aligned}$$

となるので、合わせると、

$$\int \frac{2x+5}{x^2-2x+4} dx = \log |x^2-2x+4| + \frac{7}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C$$

である。

(2) まず、 $t = 1 - x - 2x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -1 - 4x$ となる。そこで、

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx = -\frac{3}{4} \int \frac{-1-4x}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx + \frac{17}{4} \int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx$$

と分けると、前者は

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} \int \frac{-1-4x}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx &= -\frac{3}{4} \int \frac{-1-4x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{-1-4x} dt = -\frac{3}{4} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= -\frac{3}{2} \sqrt{t} + C_1 \end{aligned}$$

であり、後者は

$$\begin{aligned} \frac{17}{4} \int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx &= \frac{17}{4} \int \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{16} - \left(\frac{1}{4} + x\right)^2}} dx \\ &= \frac{17}{4\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{1+4x}{3} \right) + C_2 \end{aligned}$$

である。以上より、

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{1-x-2x^2}} dx = -\frac{3}{2} \sqrt{1-x-2x^2} + \frac{17}{4\sqrt{2}} \sin^{-1} \left(\frac{1+4x}{3} \right) + C$$

となる。

(3) まず、 $t = x^2 - 2x + 3$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x - 2$ となる。そこで、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$$

と分けると、前者は

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2x-2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} + C_1$$

であり、後者は

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2}} dx = \log \left| x-1 + \sqrt{x^2-2x+3} \right| + C_2$$

である。以上より、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx = \sqrt{x^2-2x+3} + \log \left| x-1 + \sqrt{x^2-2x+3} \right| + C$$

である。

(4) $t = 1 - x^2$ においても良いが、一気に $t = \sqrt{1 - x^2}$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ であり、 $dx = -\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x} dt \\ &= -\int \frac{1}{x^2} dt \\ &= -\int \frac{1}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1} \right| + C \end{aligned}$$

となる。

略解 1.4.4. 積分定数は省略して計算をする。

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| &= \log \left| \frac{1 + \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} \right| = \log \left| \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right| \\ &= \log \left| \left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \right) \cdot \left(\frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}} \right) \right| \\ &= \log \left| \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} \right| \quad (*) \end{aligned}$$

ここで、 $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ を用いると、

$$(*) = \log \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| = \log \frac{1 + \sin x}{|\cos x|} \quad (**)$$

また、 $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$ より、

$$\begin{aligned} (**) &= \log \frac{1 + \sin x}{\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x}} \\ &= \log \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \end{aligned}$$

となる。

1.5 部分積分法

1.5.1 部分積分法の定理

定理 1.5.1. (部分積分法)

$f(x)$ を連続関数、 $g(x)$ を C^1 級関数とし、 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。このとき、

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx + C \quad (C : \text{積分定数})$$

が成り立つ。

証明 1.5.1. 積の微分の公式より

$$\begin{aligned} \{F(x)g(x)\}' &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x) \\ &= f(x)g(x) + F(x)g'(x) \end{aligned}$$

である。よって、

$$\int \{f(x)g(x) + F(x)g'(x)\} dx = F(x)g(x) + C$$

である。この左辺は

$$\text{左辺} = \int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx$$

より、

$$\int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x) + C$$

なので、

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx + C$$

である。 □

♡ point <覚え方> ユー積ブイ、マイン、ユー積ブイ、ピー！

$$\int uvdx = (u \text{ 積})v - \int (u \text{ 積})v'dx$$

♣ 補足 書籍によっては部分積分を

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

と表している場合もある。混乱する場合は、どちらか一方のみ覚える。

例 1.5.1. 以下を計算せよ。

$$(1) \int x \cos x \, dx$$

$$(2) \int \log x \, dx$$

$$(3) \int x \log x \, dx$$

(1) 微分して 1 となる方を v とおくとよい!

$$\int \underbrace{(\cos x)}_u \cdot \underbrace{x}_v \, dx = \underbrace{(\sin x)}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{x}_v - \int \underbrace{(\sin x)}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{1}_{v'} \, dx$$

となる (計算途中の積分定数は省略)。よって、

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned} \quad (C: \text{積分定数})$$

となる。

(2) $u = 1, v = \log x$ において、部分積分法を用いると

$$\int \underbrace{1}_u \cdot \underbrace{\log x}_v \, dx = \underbrace{x}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{\log x}_v - \int \underbrace{x}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \, dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= x \log x - \int 1 \, dx \\ &= x \log x - x + C \end{aligned} \quad (C: \text{積分定数})$$

となる。

(3) $u = x, v = \log x$ において、部分積分法を用いると

$$\int \underbrace{x}_u \cdot \underbrace{\log x}_v \, dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{\log x}_v - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \, dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \int x \log x \, dx &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \int \frac{1}{2}x \, dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \log x - \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned} \quad (C: \text{積分定数})$$

となる。

例 1.5.2. 以下を計算せよ。

$$(1) \int x^2 \sin x \, dx \qquad (2) \int e^x \sin x \, dx$$

(1) $u = \sin x$, $v = x^2$ において、部分積分法を用いると

$$\int \underbrace{(\sin x)}_u \cdot \underbrace{x^2}_v \, dx = \underbrace{(-\cos x)}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{x^2}_v - \int \underbrace{(-\cos x)}_{(u \text{ 積})} \cdot \underbrace{(2x)}_{v'} \, dx$$

となる。ここで、右辺の第2項は、例 1.5.1 (1) より

$$2 \int x \cos x \, dx = 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

なので、

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad (C : \text{積分定数})$$

である。

(2) まず、与式を I とおく。

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{\sin x}_v \, dx = \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{\sin x}_v - \int \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{\cos x}_{v'} \, dx + C_1 \\ &= e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{\cos x}_v \, dx + C_1 \quad (\text{新たに } u, v \text{ とおく}) \\ &= e^x \sin x - \left\{ \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{\cos x}_v - \int \underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{(-\sin x)}_{v'} \, dx + C_2 \right\} + C_1 \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \underbrace{\int e^x \sin x \, dx}_{I} + C_1 - C_2 \end{aligned}$$

よって、 $2I = e^x (\sin x - \cos x) + C_1 - C_2$ が得られる。これより、 I は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{C_1 - C_2}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

1.5.2 演習問題

問題 1.5.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (1) $x \sin x$ | (2) $(1-x) \sin x$ |
| (3) $(2x+1) \cos x$ | (4) $x \cos 2x$ |
| (5) xe^{2x} | (6) $x^2 \cos x$ |
| (7) $x^3 \sin x$ | (8) $x^2 \cos 2x$ |
| (9) $x \sin^2 x$ | (10) $x^2 \cos^2 x$ |

問題 1.5.2. 以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。

- | | | |
|----------------------|-------------------|------------------|
| (1) $x^2 e^{ax}$ | (2) $x^3 e^{-ax}$ | (3) $x^4 e^{2x}$ |
| (4) $x^{a-1} \log x$ | (5) $x \log^2 x$ | (6) $x \log^3 x$ |

問題 1.5.3. 以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。

- | | | |
|----------------------------|------------------------------|------------------------|
| (1) $\frac{xe^x}{(1+x)^2}$ | (2) $\frac{\log x}{(1+x)^2}$ | (3) $x^3 \sqrt{1-x^2}$ |
| (4) $\tan^{-1} x$ | (5) $\sin^{-1} x$ | (6) $\cos^{-1} x$ |
| (7) $x \tan^{-1} x$ | (8) $x \sin^{-1} x$ | (9) $x^2 \tan^{-1} x$ |

問題 1.5.4. I_{mn} を以下とすると、(i)~(iv) の漸化式が成り立つことを示せ。

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

- | | |
|--|----------------|
| (i) $I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$ | $(m+n \neq 0)$ |
| (ii) $I_{m,n} = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$ | $(m+n \neq 0)$ |
| (iii) $I_{m,n} = -\frac{1}{n+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2}$ | $(n+1 \neq 0)$ |
| (iv) $I_{m,n} = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x \cos^{n+1} x + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n}$ | $(m+1 \neq 0)$ |

問題 1.5.5. 前問を利用して、つぎの関数の不定積分を求めよ。

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| (1) $\sin^4 x \cos^2 x$ | (2) $\sin^4 x \cos^4 x$ | (3) $\frac{1}{\sin x \cos^2 x}$ | (4) $\frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}$ |
|-------------------------|-------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|

1.5.3 演習問題 略解

略解 1.5.1. 途中計算では積分定数 C を省略して計算する。

(1) $u = \sin x, v = x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x \sin x \, dx = (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot x' \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

(2) $u = \sin x, v = 1 - x$ とおき、部分積分を行うと、((1) を利用するのもよい。)

$$\begin{aligned} \int (1-x) \sin x \, dx &= (-\cos x) \cdot (1-x) - \int (-\cos x) \cdot (1-x)' \, dx \\ &= (x-1) \cos x + \int \cos x \cdot (-1) \, dx \\ &= (x-1) \cos x - \sin x + C \end{aligned}$$

(3) $u = \cos x, v = 2x + 1$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int (2x+1) \cos x \, dx &= (\sin x) \cdot (2x+1) - \int (\sin x) \cdot 2 \, dx \\ &= (2x+1) \sin x + 2 \cos x + C \end{aligned}$$

(4) $u = \cos 2x, v = x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x \, dx &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \cdot x - \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) \cdot 1 \, dx \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \end{aligned}$$

(5) $u = e^{2x}, v = x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x e^{2x} \, dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \cdot x - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

(6) $u = \cos x, v = x^2$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= (\sin x) \cdot x^2 - \int (\sin x) \cdot 2x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \left\{ (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx \right\} \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

(7) $u = \sin x, v = x^3$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin x \, dx &= (-\cos x) \cdot x^3 - \int (-\cos x) \cdot 3x^2 \, dx \\ &= -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x \, dx\end{aligned}$$

下線部は (6) より $\rightarrow -x^3 \cos x + 3 \{x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x\} + C$

(8) $u = \cos 2x, v = x^2$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos 2x \, dx &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) \cdot x^2 - \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) \cdot 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left\{ \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \cdot x - \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x\right) \cdot 1 \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

(9) 高次の三角関数の積分の場合、三角関数の次数を 1 次にする。(参照: 略解 1.2.3)

$$\begin{aligned}\int x \sin^2 x \, dx &= \int x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int x \, dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx\end{aligned}$$

下線部は (4) より $\rightarrow \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$

※ 別の方法で計算した結果の

$$\frac{1}{2} x^2 \sin^2 x + \frac{1}{4} x^2 \cos 2x - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

の下線部は $\frac{1}{4} x^2$ となる。

(10) (9) と同様に、

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos^2 x \, dx &= \int x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int x^2 \, dx + \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x \, dx\end{aligned}$$

下線部は (8) より $\rightarrow \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \cos 2x - \frac{1}{8} \sin 2x + C$

略解 1.5.2. 途中計算では積分定数 C を省略して計算する。

(1) まず、 $u = e^{ax}, v = x^2$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot x^2 - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \underbrace{\int x e^{ax} dx}\end{aligned}\quad (*)$$

となる。ここで、新たに $u = e^{ax}, v = x$ とおき、波線部の部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot x - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot 1 dx \\ &= \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} dx \\ &= \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} e^{ax}\end{aligned}$$

となるので、

$$(*) = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \left\{ \frac{1}{a} x e^{ax} - \frac{1}{a^2} e^{ax} \right\} = \left(\frac{1}{a} x^2 - \frac{2}{a^2} x + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + C$$

である。

(2) まず、 $u = e^{-ax}, v = x^3$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-ax} dx &= \frac{1}{-a} e^{-ax} \cdot x^3 - \int \frac{1}{-a} e^{-ax} \cdot 3x^2 dx \\ &= -\frac{1}{a} x^3 e^{-ax} + \frac{3}{a} \underbrace{\int x^2 e^{-ax} dx}\end{aligned}\quad (*)$$

となる。さらに、 $u = e^{-ax}, v = x^2$ とおきなおし、波線部の部分積分を行うと、

$$(*) = -\frac{1}{a} x^3 e^{-ax} + \frac{3}{a} \left\{ \frac{1}{-a} x^2 e^{-ax} + \frac{2}{a} \int x e^{-ax} dx \right\} \quad (**)$$

となる。再度、 $u = e^{-ax}, v = x$ として、下線部の部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}(**) &= -\frac{1}{a} x^3 e^{-ax} - \frac{3}{a^2} x^2 e^{-ax} + \frac{6}{a^2} \left\{ \frac{1}{-a} x e^{-ax} + \frac{1}{-a^2} e^{-ax} \right\} \\ &= -\frac{1}{a} x^3 e^{-ax} - \frac{3}{a^2} x^2 e^{-ax} - \frac{6}{a^3} x e^{-ax} - \frac{6}{a^4} e^{-ax} \\ &= -\left(\frac{1}{a} x^3 + \frac{3}{a^2} x^2 + \frac{6}{a^3} x + \frac{6}{a^4} \right) e^{-ax} + C\end{aligned}$$

である。

(3) まず、 $u = e^{2x}, v = x^4$ とおき、部分積分を行い、次は $u = e^{2x}, v = x^3$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
 \int x^4 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x^4 - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 4x^3 dx \\
 &= \frac{1}{2} x^4 e^{2x} - 2 \left\{ \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 3x^2 dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2} x^4 e^{2x} - e^{2x} x^3 + 3 \underbrace{\int x^2 e^{2x} dx} \\
 \text{問 (1) の } a=2 \text{ のとき } \rightarrow &= \frac{1}{2} x^4 e^{2x} - x^3 e^{2x} + 3 \underbrace{\left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \right) e^{2x}} \\
 &= \frac{1}{4} (2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 3) e^{2x} + C
 \end{aligned}$$

(4) $u = x^{a-1}, v = \log x$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
 \int x^{a-1} \log x dx &= \frac{1}{a} x^a \log x - \int \frac{1}{a} x^a \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{1}{a} x^a \log x - \frac{1}{a} \int x^{a-1} dx \\
 &= \frac{1}{a} x^a \log x - \frac{1}{a^2} x^a + C
 \end{aligned}$$

(5) $u = x, v = \log^2 x$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
 \int x \log^2 x dx &= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{2}{x} \log x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \underbrace{\int x \log x dx} \\
 \text{問 (4) の } a=2 \text{ のとき } \rightarrow &= \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \underbrace{\frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{1}{4} x^2} + C
 \end{aligned}$$

(6) $u = x, v = \log^3 x$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
 \int x \log^3 x dx &= \frac{1}{2} x^2 \log^3 x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \left(\frac{3}{x} \log^2 x \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log^3 x - \frac{3}{2} \underbrace{\int x \log^2 x dx} \\
 \text{問 (5) } \rightarrow &= \frac{1}{2} x^2 \log^3 x - \frac{3}{2} \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} x^2 \log^2 x - \frac{1}{2} x^2 \log x + \frac{1}{4} x^2 \right\}} \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \log^3 x - \frac{3}{4} x^2 \log^2 x + \frac{3}{4} x^2 \log x - \frac{3}{8} x^2 + C
 \end{aligned}$$

略解 1.5.3. 途中計算では積分定数 C を省略して計算する。

(1) まず、以下のように式変形を行う。

$$\frac{xe^x}{(1+x)^2} = \frac{(1+x-1)e^x}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)e^x}{(1+x)^2} - \frac{e^x}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} - \frac{e^x}{(1+x)^2}$$

ここで、 $u = e^x$, $v = \frac{1}{1+x}$ とおくと、

$$\int \frac{e^x}{1+x} dx = e^x \cdot \frac{1}{1+x} - \int e^x \cdot \left(-\frac{1}{(1+x)^2} \right) dx = \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

となるので、

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\ &= \frac{e^x}{1+x} + \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx \\ &= \frac{e^x}{1+x} + C \end{aligned}$$

である。※ 最初から部分積分法を用いる場合は、 $u = \frac{1}{(1+x)^2}$, $v = xe^x$ としてもよい。

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{1}{1+x} \cdot xe^x - \int \left(-\frac{1}{1+x} \right) \cdot (xe^x)' dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{xe^x + e^x}{1+x} dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C \end{aligned}$$

(2) $u = \frac{1}{(1+x)^2}$, $v = \log x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{\log x}{1+x} + \int \frac{1}{x(1+x)} dx \\ &= -\frac{\log x}{1+x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= -\frac{\log x}{1+x} + \log |x| - \log |1+x| + C \\ &= -\frac{\log x}{1+x} + \log \left| \frac{x}{1+x} \right| + C \end{aligned}$$

となる。

※ 有理関数の部分分数分解については、後述する (予習)。

(3) まず、 $x^3\sqrt{1-x^2} = x^2 \cdot (x\sqrt{1-x^2})$ と考えて、 $u = x^2, v = x\sqrt{1-x^2}$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \left(\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} \int x^3\sqrt{1-x^2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx\end{aligned}$$

となり、

$$4 \int x^3\sqrt{1-x^2} dx = x^4\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

をえる。ここで、右辺の不定積分は、問題 1.3.3. (6) より

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2} \{3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\} + C$$

なので

$$\begin{aligned}4 \int x^3\sqrt{1-x^2} dx &= x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{15}\sqrt{1-x^2} \{3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\} + C \\ &= -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2} \{-15x^4 + 3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\} + C\end{aligned}$$

となり、計算すると

$$\int x^3\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{15}\sqrt{1-x^2} \{3x^4 - x^2 - 2\} + C$$

である。

※ 実は、置換積分の方が楽。

(4) $u = 1, v = \tan^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

であり、右辺の不定積分は、例題 1.2.1.(2) より

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$$

である。よって、

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C$$

である。

(5) $u = 1, v = \sin^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

である。

ここで、右辺の不定積分は、問題 1.3.3. の (4) より

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

であった。よって、

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

である。

(6) $u = 1, v = \cos^{-1} x$ とおき、(5) を参考に部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int \cos^{-1} x \, dx &= x \cos^{-1} x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \, dx \\ &= x \cos^{-1} x + \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$

である。

(7) $u = x, v = \tan^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int x \tan^{-1} x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \left\{ \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

である。

(8) $u = x, v = \sin^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

である。ここで、右辺の不定積分は、問題 1.4.1. の (9) より

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

であった。よって、

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{4} \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C$$

である。

(9) $u = x, v = \tan^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x^2 \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \quad (*)$$

である。ここで、 $t = 1 + x^2$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = 2x$ となるので

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t} \, dt = \frac{1}{2} \left(\int 1 \, dt - \int \frac{1}{t} \, dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (t - \log |t|) + C = \frac{1}{2} (1 + x^2 - \log(1 + x^2)) + C \end{aligned}$$

である。よって、

$$(*) = \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \log(1 + x^2) + C$$

である。※定数項は積分定数にまとめている。

略解 1.5.4. (略)

略解 1.5.5. (中略)

- (1) $\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{1}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{1}{16} \sin x \cos x + \frac{1}{16} x + C$
- (2) $\frac{1}{8} \sin^5 x \cos^3 x + \frac{1}{16} \sin^5 x \cos x - \frac{1}{64} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{128} \sin x \cos x + \frac{3}{128} x + C$
- (3) $\frac{1}{\cos x} + \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$
- (4) $\frac{1}{\sin^3 x \cos x} - \frac{4 \cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{8}{3 \tan x} + C$

1.6 演習 I

1.6.1 演習問題

問題 1.6.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1) 1

(2) 0

(3) x

(4) $-2x$

(5) $x - 5$

(6) $6x^2$

(7) $12x^3$

(8) $\frac{3}{x}$

(9) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(10) $2\sqrt{x}$

(11) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(12) $x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$

(13) $\frac{x^2 - 1}{x^4}$

(14) $\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$

(15) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

(16) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$

(17) $\frac{2x+3}{\sqrt{x}}$

(18) $\sqrt{x}\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)$

(19) $2\cos x$

(20) $\sin 3x$

(21) $3\cos 2x$

(22) $\cos(1-2x)$

(23) $\frac{1}{\cos^2 2x}$

(24) $\frac{1}{\cos^2(1-x)}$

(25) e^{2x}

(26) e^{-3x}

(27) 3^{-x}

(28) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

(29) $(\sqrt{x} + 1)^3$

(30) $\frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{x}$

問題 1.6.2. 以下の条件をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f'(x) = 3x^2 - x + 1, f(0) = 2$

(2) $f(x) = \int (x^2 - 3x + 5) dx, f(1) = 1$

(3) $f'(x) = \sin x - 2, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(4) $f(x) = \int \frac{1}{2} \cos x dx, f(0) = 1$

(5) $f'(x) = 3\cos 2x + 4\sin 2x, f(0) = 0$

(6) $f''(x) = 3x, f(0) = 1, f(1) = 0$

(7) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f(1) = 3, f(e) = 2e + 1$

問題 1.6.3. 置換積分法を用いて、以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| (1) $(1+x)^3$ | (2) $(2-x)^3$ | (3) $(1-2x)^3$ |
| (4) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ | (5) $\frac{1}{x^2-4}$ | (6) $\sqrt{5-x^2}$ |
| (7) $(\sqrt{2}+x)^3$ | (8) $(ex+1)^3$ | (9) $(1-\sqrt{2}ex)^3$ |
| (10) $\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$ | (11) $\frac{4}{4-x^2}$ | (12) $\sqrt{3-2x^2}$ |
| (13) $\cos(3x-2)$ | (14) $\sin(5-4x)$ | (15) $\tan(2-7x)$ |
| (16) $3x^2e^{-x^3}$ | (17) $\frac{e^x}{e^x+1}$ | (18) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ |
| (19) $\sin^3 x$ | (20) $\cos^3 x \sin x$ | (21) $\sin^4 x \cos^3 x$ |
| (22) $\frac{\sin^3 x}{\cos x}$ | (23) $\tan^3 x$ | (24) $\cos^4 x$ |
| (25) $\sqrt{\sin x} \cos^3 x$ | (26) $\frac{\sin x}{1+2\cos x}$ | (27) $\frac{1}{\tan^2 x}$ |
| (28) e^{1-5x} | (29) $8e^{4x+3}$ | (30) 2^{-3x+2} |

問題 1.6.4. 部分積分法を用いて、以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------------------|
| (1) $x \cos x$ | (2) $(1-x) \sin x$ | (3) $(2x+1) \cos x$ |
| (4) $x \cos 2x$ | (5) $x \sin 3x$ | (6) $x^2 \cos x$ |
| (7) $x^3 \sin x$ | (8) $x^3 \cos x$ | (9) $x \sin^2 x$ |
| (10) $x^2 \sin^2 x$ | (11) $x \sin^{-1} x$ | (12) $e^x \sin x$ |
| (13) $x^3 e^{-ax}$ | (14) xe^{2x} | (15) $x^2 e^{ax}$ |
| (16) $\log x$ | (17) $x \log x$ | (18) $(\log x)^2$ |
| (19) $x^2 \log x$ | (20) $x \tan^{-1} x$ | (21) $\frac{\log x}{x^2}$ |
| (22) $\sin(\log x)$ | (23) $\cos(\log x)$ | (24) $\frac{x \sin x}{\cos^2 x}$ |

※ 部分積分法は、解答を求める際には、 $f(x)$ と $g(x)$ の選択が重要になる。

1.6.2 演習問題略解

略解 1.6.1. 以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \quad \int 1 \, dx = x + C$$

$$(2) \quad \int 0 \, dx = C$$

$$(3) \quad \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$(4) \quad \int (-2x) \, dx = -x^2 + C$$

$$(5) \quad \int (x - 5) \, dx = \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

$$(6) \quad \int 6x^2 \, dx = 2x^3 + C$$

$$(7) \quad \int 12x^3 \, dx = 3x^4 + C$$

$$(8) \quad \int \frac{3}{x} \, dx = 3 \log |x| + C$$

$$(9) \quad \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C$$

$$(10) \quad \int 2\sqrt{x} \, dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$(11) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$(12) \quad \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) \, dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$(13) \quad \int \frac{x^2 - 1}{x^4} \, dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) \, dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$$

$$(14) \quad \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}\right) \, dx = -\frac{1}{2x^2} - 3 \log |x| + C$$

$$(15) \quad \int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \, dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \, dx = x - 2 \log |x| - \frac{1}{x} + C$$

$$(16) \quad \int \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, dx = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \, dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

$$(17) \quad \int \frac{2x+3}{\sqrt{x}} \, dx = \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) \, dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

$$(18) \quad \int \sqrt{x} \left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right) \, dx = \int \left(x^2\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right) \, dx = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

$$(19) \quad \int 2 \cos x \, dx = 2 \sin x + C$$

$$(20) \quad \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

$$(21) \quad \int 3 \cos 2x \, dx = \frac{3}{2} \sin 2x + C$$

$$(22) \quad \int \cos(1-2x) \, dx = -\frac{1}{2} \sin(1-2x) + C$$

$$(23) \quad \int \frac{1}{\cos^2 2x} \, dx = \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

$$(24) \quad \int \frac{1}{\cos^2(1-x)} \, dx = -\tan(1-x) + C$$

$$(25) \quad \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$(26) \quad \int e^{-3x} \, dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$(27) \quad \int 3^{-x} dx = -\frac{1}{\log 3} \cdot 3^{-x} + C$$

$$(28) \quad \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx \\ = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \log |x| + C$$

$$(29) \quad \int (\sqrt{x} + 1)^3 dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1 \right) dx \\ = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\sqrt{x} + x + C$$

$$(30) \quad \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{x} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 3 + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} \right) dx \\ = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + \log |x| + C$$

略解 1.6.2. (1) $f'(x) = 3x^2 - x + 1$ より、 $f(x)$ は

$$f(x) = \int (3x^2 - x + 1) dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

を満たす。ここで、 $f(0) = 2$ より $C = 2$ をえる。

よって、

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

である。

(2) 与式を計算すると、

$$f(x) = \int (x^2 - 3x + 5) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

であり、 $f(1) = 1$ より $C = -\frac{17}{6}$ となる。

よって、

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{6}$$

である。

(3) 題意より

$$f(x) = \int (\sin x - 2) dx = -\cos x - 2x + C$$

であり、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ より $C = \pi$ なので、

$$f(x) = -\cos x - 2x + \pi$$

である。

(4) 与式を計算すると、

$$f(x) = \int \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \sin x + C$$

であり、 $f(0) = 1$ より、 $C = 1$ となる。よって、

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$$

である。

(5) これまでと同様に計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3 \cos 2x + 4 \sin 2x) dx \\ &= \frac{3}{2} \sin 2x - 2 \cos 2x + C \end{aligned}$$

であり、 $f(0) = 0$ より $C = 2$ となる。よって、

$$f(x) = \frac{3}{2} \sin 2x - 2 \cos 2x + 2$$

である。

(6) $f(x)$ の 2 階微分が $3x$ なので、1 階微分は

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \frac{3}{2} x^2 + C_1$$

である。よって、

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{2} x^2 + C_1 \right) dx = \frac{1}{2} x^3 + C_1 x + C_2$$

となる。

ここで、 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ を用いると、 $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ を得る。

以上より、

$$f(x) = \frac{1}{2} x^3 - x + 1$$

となる。

(7) (6) と同様に、1 階微分を求めると、

$$f'(x) = \int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C_1$$

である。よって、

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx = \log |x| + C_1 x + C_2$$

となる。ここで、 $f(1) = 3$, $f(e) = 2e + 1$ より $C_1 = \frac{2e-3}{e-1}$, $C_2 = \frac{e}{e-1}$ を得るので、

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx = \log |x| + \frac{2e-3}{e-1} x + \frac{e}{e-1}$$

となる。

略解 1.6.3. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = 1 + x$ とおくと、 $dt = dx$ より、

$$\int (1+x)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}(1+x)^4 + C$$

(2) $t = 2 - x$ とおくと、 $dt = -dx$ より、

$$\int (2-x)^3 dx = \int t^3 \cdot (-1) dt = -\frac{1}{4}(2-x)^4 + C$$

(3) $t = 1 - 2x$ とおくと、 $dt = -2dx$ より、

$$\int (1-2x)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{-2} dt = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

(4) 分母、分子を 2 で割って、公式 (14.8) を使う。

$$\int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} 2x + C$$

$$\begin{aligned} (5) \quad \int \frac{1}{x^2-4} dx &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

(6) 例 1.4.2. より

$$\int \sqrt{5-x^2} dx = \frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} x \sqrt{5-x^2} + C$$

※ 置換積分の方法によっては $\frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{4} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + C$ になるが、もう少し整理する。

$t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}}$ とすると、

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) \sqrt{1 - \left(\sin \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) \right)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} = \frac{2}{5} x \sqrt{5-x^2} \end{aligned}$$

より、

$$\frac{5}{4} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} x \sqrt{5-x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{5-x^2}.$$

(7) $t = \sqrt{2} + x$ とおくと、 $dt = dx$ より、

$$\int (\sqrt{2} + x)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} (\sqrt{2} + x)^4 + C$$

(8) $t = ex + 1$ とおくと、 $dt = e dx$ より

$$\int (ex + 1)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{1}{e} dt = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4e} (ex + 1)^4 + C$$

(9) $t = 1 - \sqrt{2}ex$ とおくと、 $dt = -\sqrt{2}e dx$ より

$$\int (1 - \sqrt{2}ex)^3 dx = \int t^3 \cdot \left(\frac{1}{-\sqrt{2}e} \right) dt = -\frac{1}{4\sqrt{2}e} (1 - \sqrt{2}ex)^4 + C$$

(10) 公式 (14.6)' より

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^{-1} \sqrt{3}x + C$$

(11) (5) の -1 倍

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{4-x^2} dx &= -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= -\log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C\end{aligned}$$

(12) $\sqrt{3-2x^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - x^2}$ と変形が出来るので、例 1.4.2. より、

$$\begin{aligned}\int \sqrt{3-2x^2} dx &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + x \sqrt{\frac{3}{2} - x^2} \right) + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{3-2x^2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin^{-1} \frac{\sqrt{6}}{3} x + C\end{aligned}$$

(13) $t = 3x - 2$ とおくと、 $dt = 3 dx$ より、

$$\int \cos(3x-2) dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \sin(3x-2) + C$$

(14) $t = 5 - 4x$ とおくと、 $dt = -4 dx$ より、

$$\int \sin(5-4x) dx = \int \sin t \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) dx = \frac{1}{4} \cos(5-4x) + C$$

(15) $t = 2 - 7x$ とおくと、 $dt = -7 dx$, 例 1.3.3. より、

$$\begin{aligned}\int \tan(2-7x) dx &= \int \tan t \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) dt = -\frac{1}{7} (-\log |t|) + C \\ &= \frac{1}{7} \log |\cos(2-7x)| + C\end{aligned}$$

(16) $t = -x^3$ とおくと、 $dt = -3x^2 dx$ より、

$$\int 3x^2 e^{-x^3} dx = \int (-e^t) dt = -e^{-x^3} + C$$

(17) $f(x) = e^x + 1$ と置くと、 $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ なので、公式 (14.10) より

$$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \log(e^x+1) + C$$

(18) $t = 1 + e^{2x}$ とおくと、 $dt = 2e^{2x} dx$ より、

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{1+e^{2x}} + C$$

(19) $t = \cos x$ とおくと、 $dt = -\sin x dx$ より、

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx = \int \sin x dx - \int \sin x \cos^2 x dx \\ &= -\cos x - \int t^2 \sin x \cdot \frac{1}{-\sin x} dt = -\cos x + \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \end{aligned}$$

(20) 問題 1.5.4. の漸化式を使うと、問題は $I_{1,3}$ である。

$$\int \cos^3 x \sin x dx = -\frac{1}{4} \sin^0 \cos^4 x + 0 = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$$

※ 解き方によっては $\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + C$ となる。か^s。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x &= \frac{1}{4} \sin^2 x (2 - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 x)(1 + 1 - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^4 x) \end{aligned}$$

となり、積分定数を少し変えると、同じものになる。

$$\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C'.$$

(21) 問題 1.5.4. の漸化式を使うと、問題は $I_{4,3}$ である。

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^3 x dx &= \frac{1}{7} \sin^5 x \cos^2 x + \frac{2}{7} I_{4,1} \\ &= \frac{1}{7} \sin^5 x \cos^2 x + \frac{2}{7} \left\{ \frac{1}{5} \sin^5 x \cos^0 x + 0 \right\} \\ &= \frac{1}{7} \sin^5 x (1 - \sin^2 x) + \frac{2}{35} \sin^5 x \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C \end{aligned}$$

$$(22) \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x \cos x \right) dx$$

ここで、 $t = \cos x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ より、

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \left(-\frac{1}{t} + t \right) dt = -\log |\cos(x)| + \frac{1}{2} \cos^2 x + C$$

$$(23) \quad \begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int \left(\frac{\tan x}{\cos^2 x} - \tan x \right) dx \\ &= \int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx - \int \tan x dx \end{aligned}$$

ここで、前半の不定積分について $t = \tan x$ とおき、 $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$ を用いると、

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

である。また、後半は 例 1.3.3. より

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \log |\cos x| + C$$

$$(24) \quad \begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4 \cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

(25) $t = \sin x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ より、

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx &= \int \sqrt{t} \cos^3 x \cdot \frac{1}{\cos x} dt \\ &= \int \sqrt{t} (1 - t^2) dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}) dt \\ &= \frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} - \frac{2}{7} \sin^3 x \sqrt{\sin x} + C \end{aligned}$$

(26) $t = 1 + 2 \cos x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = -2 \sin x$ より

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} dx &= \int \frac{\sin x}{t} \cdot \frac{1}{-2 \sin x} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \log |1 + 2 \cos x| + C \end{aligned}$$

(27) まず、公式 (14.13) を証明しておく。 $t = \tan x$ とおくと、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = (1 + t^2)$ である。また、 $1 + t^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$ より、

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

となる。以上より、

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 + t^2}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + t^2} dt = \int t^{-2} dt = -\frac{1}{t} + C$$

このことより、

$$\int \frac{1}{\tan^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

(28) $t = 1 - 5x$ とおくと、 $dt = -5dx$ 、公式 (14.3) より

$$\int e^{1-5x} dx = \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{5} \right) dt = -\frac{1}{5} e^t + C = -\frac{1}{5} e^{1-5x} + C$$

(29) $t = 4x + 3$ とおくと、 $dt = 4dx$ 、公式 (14.3) より

$$\int 8e^{4x+3} dx = \int 8e^t \cdot \frac{1}{4} dt = 2e^t + C = 2e^{4x+3} + C$$

(30) $t = -3x + 2$ とおくと、 $dt = -3dx$ 、公式 (14.4) より

$$\begin{aligned} \int 2^{-3x+2} dx &= \int 2^t \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) dt \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{2^t}{\log 2} + C = -\frac{2^{-3x+2}}{3 \log 2} + C \end{aligned}$$

略解 1.6.4. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) 例 1.5.1. (1) と同じ

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

(2) 問題 1.5.1. (2) と同じ

$$\int (1-x) \sin x \, dx = x \cos x - \sin x - \cos x + C$$

(3) 問題 1.5.1. (3) と同じ

$$\int (2x+1) \cos x \, dx = 2x \sin x + \sin x + 2 \cos x + C$$

(4) 問題 1.5.1. (4) と同じ

$$\int x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

(5)

$$\begin{aligned} \int x \sin 3x \, dx &= \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) \cdot x - \int \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) \cdot 1 \, dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C \end{aligned}$$

(6) 問題 1.5.1. (6) と同じ

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

(7) 問題 1.5.1. (7) と同じ

$$\int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

(8)

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos x \, dx &= \sin x \cdot x^3 - \int \sin x \cdot 3x^2 \, dx \\ &= x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 1.5.2.(1)} \rightarrow &= x^3 \sin x - 3(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x) + C \\ &= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C \end{aligned}$$

(9) 問題 1.5.1.(9) と同じ

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$(10) \quad \int x^2 \sin^2 x \, dx = \int x^2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{x^2}{2} dx - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x \, dx$$

$$\begin{aligned} \text{問題 1.5.1.(8)} \rightarrow &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C \\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$(11) \quad \int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin^{-1} x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{問題 1.4.1.(9)} \rightarrow = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{4} \sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$$

$$(12) \quad \int e^x \sin x \, dx = (-\cos x) \cdot e^x - \int (-\cos x) \cdot e^x dx$$

$$= -e^x \cos x + \int \cos x \cdot e^x dx$$

$$= -e^x \cos x + \left\{ \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x dx \right\}$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\therefore \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

(13)

$$\int x^3 e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax} \cdot x^3 - \int \left(-\frac{1}{a}e^{-ax} \cdot 3x^2 \right) dx$$

$$= -\frac{1}{a}x^3 e^{-ax} + \frac{3}{a} \int (e^{-ax} \cdot x^2) dx$$

$$= -\frac{1}{a}x^3 e^{-ax} + \frac{3}{a} \left\{ -\frac{1}{a}e^{-ax} \cdot x^2 - \int \left(-\frac{1}{a}e^{-ax} \cdot 2x \right) dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{a}x^3 e^{-ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{-ax} + \frac{6}{a^2} \int e^{-ax} \cdot x \, dx$$

$$= -\frac{1}{a}x^3 e^{-ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{-ax} + \frac{6}{a^2} \left\{ -\frac{1}{a}x e^{-ax} - \int \left(-\frac{1}{a}e^{-ax} \right) dx \right\}$$

$$= -\frac{1}{a}x^3 e^{-ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{-ax} - \frac{6}{a^3}x e^{-ax} - \frac{6}{a^4}e^{-ax} + C$$

$$\begin{aligned}(14) \quad \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 1 dx \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(15) \quad \int x^2 e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} \cdot x^2 - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot 2x dx \\ &= \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \int e^{ax} \cdot x dx \\ &= \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \left\{ \frac{1}{a} e^{ax} \cdot x - \int \frac{1}{a} e^{ax} \cdot 1 dx \right\} \\ &= \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2} x e^{ax} + \frac{2}{a^3} e^{ax} + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(16) \quad \int \log x dx &= x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(17) \quad \int x \log x dx &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \log x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(18) \quad \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x ((\log x)^2)' dx \\ &= x(\log x)^2 - \int x (2 \log x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(19) \quad \int x^2 \log x dx &= \frac{1}{3} x^3 \cdot \log x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{9} x^3 + C\end{aligned}$$

(20) 問題 1.5.3. (7) と同じ

$$\int x \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{2} \{ (x^2 + 1) \tan^{-1} x - x \} + C$$

(21)

$$\begin{aligned} \int \frac{\log x}{x^2} \, dx &= \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \log x - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= -\frac{\log x + 1}{x} + C \end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) \, dx &= x \sin(\log x) - \int x \cdot \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \sin(\log x) - \int \cos(\log x) \, dx \\ &= x \sin(\log x) - \left\{ x \cos(\log x) - \int x \left(-\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} \right) \, dx \right\} \\ \therefore \int \sin(\log x) \, dx &= \frac{1}{2} x \{ \sin(\log x) - \cos(\log x) \} + C \end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned} \int \cos(\log x) \, dx &= x \cos(\log x) - \int x \left(-\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} \right) \, dx \\ &= x \cos(\log x) + \int \sin(\log x) \, dx \\ &= x \cos(\log x) + \frac{1}{2} x \{ \sin(\log x) - \cos(\log x) \} + C \\ &= \frac{1}{2} x \{ \cos(\log x) + \sin(\log x) \} + C \end{aligned}$$

(24)

$$\begin{aligned} \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} \, dx &= x \cdot \frac{1}{\cos x} - \int x' \cdot \frac{1}{\cos x} \, dx \\ &= \frac{x}{\cos x} - \log \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C \end{aligned}$$

1.7 有理関数の不定積分

1.7.1 有理関数と部分分数分解

$P(x), Q(x)$ を x の多項式とする ($Q(x) \neq 0$)。このとき $\frac{P(x)}{Q(x)}$ を**有理関数**とよぶ。

有理関数において、分母が因子の積の形であらわされるとき、分数の和（差）に分解する操作を、**部分分数分解**（部分分数展開）と呼ぶ。（因数分解は出来るところまで行う）

例 1.7.1. 部分分数分解の例

$$(1) \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$(2) \quad \frac{2}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$(3) \quad \frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$(4) \quad \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+x+1}$$

$$(5) \quad \frac{x^4+x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)} = x-1 + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}$$

$$(6) \quad \frac{2x^2+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

☆ 分子の最大次数が分母の最大次数より小さい場合。

♡ **point 1** 部分分数分解では、分母の各因子が、各項の分母に分解される。

例:
$$\frac{P(x)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

♡ **point 2** 分子の最大次数は、【分母の次数 - 1】（以下）となる。

例:
$$\frac{P(x)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

☆ 分子の最大次数が分母の最大次数以上の場合。

♡ **point 3** この場合は、0 次以上の項がある。

例:
$$\frac{P(x)}{x+1} = Ax + B + \frac{C}{x+1}$$

♡ **確認** ここでは、部分分数分解を式の計算と係数比較で求める。次回ではヘビサイドの展開定理を用いる。この展開定理と併せて、部分分数展開と言うこともある。

例 1.7.2. 有理関数 $\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2}$ を $Ax + B + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ の形に変形する。

まず、 $2x^3 - 4x^2 + 1$ を $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ で割ると (多項式の割り算は OK?)、

$$2x^3 - 4x^2 + 1 = 2x(x^2 - 2x + 1) - 2x + 1$$

なので、

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} = 2x + \frac{-2x + 1}{(x-1)^2} = 2x - \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

となる。ここで、 $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ とおくと、

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{C(x-1) + D}{(x-1)^2} = \frac{Cx - C + D}{(x-1)^2}$$

となるので、係数比較により

$$C = 2, -C + D = -1$$

より、

$$C = 2, D = 1$$

が得られる。

以上より、

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} = 2x - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

となる。

問題 1.7.1. $\frac{-3x^2 + 1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ の A, B, C, D を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1)}{x(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A+C+D)x^2 + (A+B+D)x + A}{x(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

となるので、係数比較により

$$A + B + C = 0, A + C + D = -3, A + B + D = 0, A = 1$$

となり、

$$A = 1, B = 1, C = -2, D = -2$$

となる。

1.7.2 有理関数の不定積分

例 1.7.3. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} dx$ を考える。

例 1.7.2. より、

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} dx = \int \left(2x - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \quad (*)$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} (*) &= \int 2x dx - \int \frac{2}{x-1} dx - \int (x-1)^{-2} dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \log |x-1| - \frac{1}{-1} (x-1)^{-1} + C \\ &= x^2 - 2 \log |x-1| + \frac{1}{x-1} + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

問題 1.7.2. $\int \frac{-3x^2 + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx$ を計算せよ。

問題 1.7.1. より、

$$\int \frac{-3x^2 + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+1} \right) dx \quad (*)$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} (*) &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \log |x| + \log |x+1| - 2 \cdot \frac{1}{2} \log(x^2+1) - 2 \tan^{-1} x + C \\ &= \log |x(x+1)| - \log(x^2+1) - 2 \tan^{-1} x + C \\ &= \log \frac{|x(x+1)|}{x^2+1} - 2 \tan^{-1} x + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

1.7.3 演習問題

問題 1.7.3. 以下の有利関数を部分分数分解せよ。

$$(1) \quad \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3) \quad \frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$(5) \quad \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(7) \quad \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(8) \quad \frac{x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$(9) \quad \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$(10) \quad \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$(11) \quad \frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$$

$$(12) \quad \frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}$$

$$(13) \quad \frac{11}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

$$(14) \quad \frac{5x^2 - 19x + 29}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

問題 1.7.4. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) \quad \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3) \quad \frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$(5) \quad \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(7) \quad \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(8) \quad \frac{x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$(9) \quad \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$(10) \quad \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$(11) \quad \frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$$

$$(12) \quad \frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}$$

$$(13) \quad \frac{11}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

$$(14) \quad \frac{5x^2 - 19x + 29}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

1.7.4 演習問題 略解

略解 1.7.1. 分母が展開された形の場合、分母の因数分解を行う。

(1) まず、 $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ と変形し、

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

とおいて、 A, B を求める。右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad A-B=1$$

なので、 $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

となる。

(2) まず、 $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ と変形し、

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

とおいて、 A, B を求める。右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad -2A-B=1$$

なので、 $A = -1$, $B = 1$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

となる。

(3) 分母の次数より分子の次数の方が高いので分子を分母で割ると、

$$x^3 + 3x - 7 = (x - 1)(x^2 + x - 2) + 6x - 9$$

となるので、

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{6x - 9}{(x + 2)(x - 1)}$$

である。よって、

$$\frac{6x - 9}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{Ax - A + Bx + 2B}{(x + 2)(x - 1)}$$

となるので、係数比較を行うと、

$$A + B = 6, \quad -A + 2B = -9$$

なので、 $A = 7$, $B = -1$ をえる。以上より、

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{7}{x + 2} - \frac{1}{x - 1}$$

となる。

(4) まず、 $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$ と変形し、

$$\frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} \text{(右辺)} &= \frac{A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 - (A - B - C)x + (A + C)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B = 0, \quad A - B - C = 0, \quad A + C = 1$$

なので、 $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

となる。

(5) まず、 $x^3 + 3x^2 - x - 3$ の因数分解を行うと、 $x^3 + 3x^2 - x - 3 = (x-1)(x+1)(x+3)$ である。

よって、 $\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} = \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)(x+3)}$ と変形し、

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{Ax^2 + 4Ax + 3A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx^2 - C}{(x-1)(x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B + C = 0, \quad 4A + 2B = 3, \quad 3A - 3B - C = 2$$

なので、 $A = \frac{5}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{7}{8}$ をえる。よって、

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x+3}$$

となる。

(6) まず、 $\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$ と変形し、

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B + C = 0, \quad B - C = 0, \quad -A = 1$$

なので、 $A = -1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

となる。

(7) まず、 $\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}$ と変形し、

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

とおいて、 A, B を求める。

右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=2, \quad -(2A+B)=3$$

なので、 $A=-5, B=7$ をえる。

よって、

$$\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = -\frac{5}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

となる。

(8) まず、 $\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = \frac{x+2}{(2x+1)(x-2)}$ と変形し、

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

とおいて、 A, B を求める。

右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x-2) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} = \frac{(A+2B)x - (2A-B)}{(2x+1)(x-2)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+2B=1, \quad -(2A-B)=2$$

なので、 $A=-\frac{3}{5}, B=\frac{4}{5}$ をえる。

よって、

$$\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-2}$$

となる。

$$(9) \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2x^2 - x - 4}{x(x-1)(x+2)} \text{ と変形し、}$$

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B + C = 2, \quad A + 2B - C = -1, \quad -2A = -4$$

なので、 $A = 2, B = -1, C = 1$ をえる。よって、

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

となる。

$$(10) \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} \text{ と変形し、}$$

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 - (B-C)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B = 1, \quad -(B - C) = 1, \quad A - C = 2$$

なので、 $A = 2, B = -1, C = 0$ をえる。よって、

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

となる。

(11) まず、 $\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} = \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)(x-2)^3}$ と変形し、

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

とにおいて、 A, B, C, D を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1)}{(x-1)(x-2)^3} \\ &= \frac{(A+B)x^3 - (6A+5B-C)x^2 + (12A+8B-3C+D)x}{(x-1)(x-2)^3} \\ &\quad + \frac{-8A-4B+2C-D}{(x-1)(x-2)^3} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad -6A-5B+C=3, \quad 12A+8B-3C+D=-9, \quad -8A-4B+2C-D=7$$

なので、 $A=-1, B=1, C=2, D=1$ をえる。よって、

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3}$$

となる。

(12) まず、 $\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(x+3)(x+4)}$ と変形し、

$$\frac{x-1}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4}$$

とにおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x+3)(x+4) + B(x+2)(x+4) + C(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (7A+6B+5C)x + 12A+8B+6C}{(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B+C=0, \quad 7A+6B+5C=1, \quad 12A+8B+6C=-1$$

なので、 $A=-\frac{3}{2}, B=4, C=-\frac{5}{2}$ をえる。よって、

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+4}$$

となる。

(13) まず、

$$\frac{11}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x^2-2x+3) + (Bx+C)(x-4)}{(x-4)(x^2-2x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 - (2A+4B-C)x + 3A-4C}{(x-4)(x^2-2x+3)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad -2A-4B+C=0, \quad 3A-4C=11$$

なので、 $A=1, B=-1, C=-2$ をえる。よって、

$$\frac{11}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{1}{x-4} - \frac{x+2}{x^2-2x+3}$$

となる。

(14) (13) と分母が同じなので、途中までは (13) と同じ。

まず、

$$\frac{5x^2-19x+29}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x^2-2x+3) + (Bx+C)(x-4)}{(x-4)(x^2-2x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 - (2A+4B-C)x + 3A-4C}{(x-4)(x^2-2x+3)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=5, \quad -2A-4B+C=-19, \quad 3A-4C=29$$

なので、 $A=3, B=2, C=-5$ をえる。よって、

$$\frac{5x^2-19x+29}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{3}{x-4} + \frac{2x-5}{x^2-2x+3}$$

となる。

略解 1.7.2. 部分分数分解が前問で得られているので、それを用いて積分を行う。

なお、以下の C はすべて積分定数とし、計算途中では省略する場合もある。また、 $\log$ の和、差を積、商に変形していない。

(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log |x-1| - \frac{1}{2} \log |x+1| + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \log |x-2| - \log |x-1| + C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x-7}{(x+2)(x-1)} dx &= \int x dx - \int 1 dx + 7 \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + 7 \log |x+2| - \log |x-1| + C\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1 \boxed{+1}}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x-1| - \frac{1}{6} \log |x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \log |x-1| - \frac{1}{6} \log |x^2-x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} \log |x-1| - \frac{1}{6} \log |x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

※ $\boxed{+1}$ はその右の項に移動。 $-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

(5)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} dx &= \frac{5}{8} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{7}{8} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{5}{8} \log |x-1| + \frac{1}{4} \log |x+1| - \frac{7}{8} \log |x+3| + C\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)(x+1)} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\log|x| + \frac{1}{2} \log|x-1| + \frac{1}{2} \log|x+1| + C\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2-3x+2} dx &= -5 \int \frac{1}{x-1} dx + 7 \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -5 \log|x-1| + 7 \log|x-2| + C\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{2x^2-3x-2} dx &= -\frac{3}{5} \int \frac{1}{2x+1} dx + \frac{4}{5} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\frac{3}{10} \log|2x+1| + \frac{4}{5} \log|x-2| + C\end{aligned}$$

※ 計算方法によっては、 $-\frac{3}{10} \log\left|x + \frac{1}{2}\right| + \frac{4}{5} \log|x-2| + C'$ となる。

(9)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+x^2-2x} dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= 2 \log|x| - \log|x-1| + \log|x+2| + C\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1} dx &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= 2 \log|x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-9x+7}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8} dx \\ &= -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int \frac{1}{(x-2)^3} dx \\ &= -\log|x-1| + \log|x-2| - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2(x-2)^2} + C\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} dx \\
&= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{5}{2} \int \frac{1}{x+4} dx \\
&= -\frac{3}{2} \log|x+2| + 4 \log|x+3| - \frac{5}{2} \log|x+4| + C
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{11}{(x-4)(x^2-2x+3)} dx \\
&= \int \frac{1}{x-4} dx - \int \frac{x+2}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+6}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx - \int \frac{3}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \log|x^2-2x+3| - \int \frac{3}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \log|x^2-2x+3| - \int \frac{3}{(x-1)^2 + (\sqrt{2})^2} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \log|x^2-2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

(14) 部分分数分解の場合と同様に、(13) と分母が同じなので有る程度 (13) の結果を用いることができる。

$$\begin{aligned}
& \int \frac{5x^2 - 19x + 29}{(x-4)(x^2-2x+3)} dx \\
&= 3 \int \frac{1}{x-4} dx + \int \frac{2x-5}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \int \frac{2x-5}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \int \frac{2x-2-3}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx - \int \frac{3}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \log|x^2-2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

1.8 ヘビサイドの展開定理

1.8.1 ヘビサイドの展開定理を使うために

部分分数分解を行う方法として、ヘビサイドの展開公式を紹介する。まず、最初に注意点としてこの講義では実数のみを扱うので、

分母 = 0 の解がすべて実数解であること

が必要である。

可能: $\frac{P(x)}{(2x+1)(x+2)^3}$	不可能: $\frac{P(x)}{(x+1)(x^2+1)}$
----------------------------------	----------------------------------

1.8.2 ヘビサイドの展開定理 I

例 1.8.1. 以下の部分分数分解を考える。

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

まず、この式は任意の実数 $x \neq 1, 3$ で成り立つ。各式に $x-1$ をかけると、

$$\frac{2x+5}{x-3} = A + \frac{B(x-1)}{x-3}$$

となり、この式は任意の $x \neq 3$ で成り立つ。よって、 $x=1$ を代入すると、 $A = -\frac{7}{2}$ がえられる。同様に、

$$\frac{2x+5}{x-1} = \frac{A(x-3)}{x-1} + B$$

の式に $x=3$ を代入すると、 $B = \frac{11}{2}$ がえられる。

これを、形式的に書くと、

$$A = \left. \frac{2x+5}{x-3} \right|_{x=1} = \frac{2 \cdot 1 + 5}{1-3} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2},$$

$$B = \left. \frac{2x+5}{x-1} \right|_{x=3} = \frac{2 \cdot 3 + 5}{3-1} = \frac{11}{2}$$

よって、

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = \frac{-7/2}{x-1} + \frac{11/2}{x-3}$$

である。

1.8.3 ヘビサイドの展開定理 II

例 1.8.2. 以下の部分分数分解を考える。

$$\frac{x^3}{(x-5)^4} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x-5)^3} + \frac{D}{(x-5)^4}$$

まず、各式に $(x-5)^4$ をかけて、両辺を x で 3 回微分すると、

$$x^3 = A(x-5)^3 + B(x-5)^2 + C(x-5) + D \quad (0)$$

$$3x^2 = 3A(x-5)^2 + 2B(x-5) + C \quad (1)$$

$$3 \cdot 2x = 3 \cdot 2 \cdot A(x-5) + 2B \quad (2)$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A \quad (3)$$

となる。式 (3) の左辺は $(x^3)'''$ であり、右辺は $3!A$ であることから

$$A = \frac{1}{3!}(x^3)''' \Big|_{x=5} = \frac{1}{3!}(3x^2)'' \Big|_{x=5} = \frac{1}{3!}(3 \cdot 2x)' \Big|_{x=5} = \frac{1}{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Big|_{x=5} = 1$$

である (制限 $x=5$ があるのは、次の例で紹介)。

以下同様に考えて、

$$B = \frac{1}{2!}(x^3)'' \Big|_{x=5} = \frac{1}{2!}(3x^2)' \Big|_{x=5} = \frac{1}{2!} \cdot 3 \cdot 2x \Big|_{x=5} = 15,$$

$$C = \frac{1}{1!}(x^3)' \Big|_{x=5} = \frac{1}{1!} \cdot 3x^2 \Big|_{x=5} = 75,$$

$$D = \frac{1}{0!}x^3 \Big|_{x=5} = 125$$

となる。よって、

$$\frac{x^3}{(x-5)^4} = \frac{1}{x-5} + \frac{15}{(x-5)^2} + \frac{75}{(x-5)^3} + \frac{125}{(x-5)^4}$$

である。

一般形として、有理関数 $\frac{P(x)}{(x-a)^n}$ が

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_i}{(x-a)^i} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \quad (1 \leq i \leq n, A_i \in \mathbb{R})$$

と表されるとき

$$A_i = \frac{1}{(n-i)!} (P(x))^{(n-i)} \Big|_{x=a}$$

である。

1.8.4 ヘビサイドの展開定理 I+II

例 1.8.3. 以下の部分分数分解を考える。

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} = \boxed{\frac{A}{x-2}} + \boxed{\frac{B}{x-3}} + \boxed{\frac{C}{(x-3)^2}}$$

まず、 A は ヘビサイドの展開定理 I で求める。基本に戻れば、各項を $x-2$ 倍し、 $x=2$ を代入する。

$$\frac{x^2 + 4}{(x-3)^2} = A + \frac{B(x-2)}{x-3} + \frac{C(x-2)}{(x-3)^2}$$

すなわち、

$$A = \left. \frac{x^2 + 4}{(x-3)^2} \right|_{x=2} = \frac{2^2 + 4}{(2-3)^2} = \frac{4+4}{(-1)^2} = 8$$

である。 B, C は ヘビサイドの展開定理 II で求める。まず、各式に $(x-3)^2$ 倍し、左辺を $P(x)$ とおくと、

$$P(x) := \frac{x^2 + 4}{x-2} = \frac{A}{x-2}(x-3)^2 + B(x-3) + C$$

のように書き表すことができる。よって、

$$\begin{aligned} B &= \left. \frac{1}{1!} P'(x) \right|_{x=3} \\ &= \left. \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{x^2 + 4}{x-2} \right)' \right|_{x=3} = \frac{1}{1!} \cdot \left. \frac{2x(x-2) - (x^2 + 4) \cdot 1}{(x-2)^2} \right|_{x=3} \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot (3-2) - (3^2 + 4)}{(3-2)^2} = \frac{6-13}{1} = -7, \\ C &= \left. \frac{1}{0!} P(x) \right|_{x=3} \\ &= \left. \frac{1}{0!} \cdot \frac{x^2 + 4}{x-2} \right|_{x=3} = \frac{9+4}{3-2} = 13 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{8}{x-2} + \frac{-7}{x-3} + \frac{13}{(x-3)^2}$$

である。

1.8.5 ヘビサイドの展開定理を利用するために

有理関数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ において、 $P(x)$ の最高次数が $Q(x)$ の最高次数以上のとき、

$$\left(\text{例} : \frac{x^3}{x^2-4}, \frac{x^4-x^3+1}{x^2-2x+1}, \frac{x^2}{x^2-4x+3} \right)$$

多項式の割り算を行い、 $P(x) = Q(x)S(x) + T(x)$ の形にし、

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$$

として $\frac{T(x)}{Q(x)}$ に対して、ヘビサイドの展開定理を利用する。

例 1.8.4. 有理関数 $\frac{x^3}{x^2-4}$ の部分分数分解を考える。

まず、 x^3 を x^2-4 で割ると、

$$x^3 = x(x^2-4) + 4x$$

となるので、

$$\frac{x^3}{x^2-4} = \boxed{x} + \boxed{\frac{4x}{x^2-4}}$$

と変形できる。

よって、

$$\frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = \left. \frac{4x}{x+2} \right|_{x=2} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$B = \left. \frac{4x}{x-2} \right|_{x=-2} = \frac{-8}{-4} = 2$$

となり、

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$$

である。

例 1.8.5. 以下の部分分数分解を考える。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。

$$\frac{2x+5}{(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i}$$

各式に $x-i$ をかけると、

$$\frac{2x+5}{x+i} = A + \frac{B(x-i)}{x+i}$$

となる。ここで $x=i$ を代入すると、

$$A = \left. \frac{2x+5}{x+i} \right|_{x=i} = \frac{2i+5}{2i} = \frac{2-5i}{2}$$

がえられる。同様に、

$$B = \left. \frac{2x+5}{x-i} \right|_{x=-i} = \frac{-2i+5}{-2i} = \frac{2+5i}{2}$$

がえられる。よって、

$$\frac{2x+5}{(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-5i}{x-i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2+5i}{x+i}$$

である。

1.8.6 演習問題

問題 1.8.1. 以下の有理関数に対して、ヘビサイドの展開定理が使えるものは展開定理を使って部分分数分解を求め、ヘビサイドの展開定理が使えない場合は、使えないと答えよ。

(1) $\frac{1}{x^2-1}$

(2) $\frac{1}{x^2-3x+2}$

(3) $\frac{x^3+3x-7}{(x+2)(x-1)}$

(4) $\frac{1}{x^3+1}$

(5) $\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3}$

(6) $\frac{1}{x^3-x}$

(7) $\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

(8) $\frac{x+2}{2x^2-3x-2}$

(9) $\frac{2x^2-x-4}{x^3+x^2-2x}$

(10) $\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1}$

(11) $\frac{2x}{(x-2)^2}$

(12) $\frac{x^2+x+2}{(x+3)^3}$

(13) $\frac{3x^2-9x+7}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$

(14) $\frac{x^2-1}{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

(15) $\frac{4}{x^2-2}$

(16) $\frac{x-2}{x^2-2x-4}$

1.8.7 演習問題 略解

略解 1.8.1. (1) まず、 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ より、分母 = 0 の実数解が求まる。

従って、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

とおくと、

$$A = \frac{1}{x + 1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$B = \frac{1}{x - 1} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$$

となる。

以上より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 1} &= \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

である。

(2) まず、 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ より、分母 = 0 の実数解が求まる。

従って、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

とおくと、

$$A = \frac{1}{x - 2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1 - 2} = -1,$$

$$B = \frac{1}{x - 1} \Big|_{x=2} = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

となる。

以上より、

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$$

である。

(3) 分母の最高次数 (2 次) より分子の最高次数 (3 次) の方が高い。

そこで、 $x^3 + 3x - 7$ を $(x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$ で割ってみると

$$x^3 + 3x - 7 = (x-1)(x^2 + x - 2) + 6x - 9$$

なので

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x+2)(x-1)} = x - 1 + \frac{6x - 9}{(x+2)(x-1)}$$

をえる。

ここで、分母 = 0 の実数解が求まるので、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{6x - 9}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{6x - 9}{x-1} \right|_{x=-2} = \frac{-12 - 9}{-2 - 1} = 7,$$

$$B = \left. \frac{6x - 9}{x+2} \right|_{x=1} = \frac{6 - 9}{1 + 2} = -1$$

となる。

以上より、

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x+2)(x-1)} = x - 1 + \frac{7}{x+2} + \frac{-1}{x-1}$$

である。

(4) 分母 $= x^3 + 1 = 0$ を解くと、 $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ となり、複素数解がえられる。

従って、ヘビサイドの展開定理は使えない。

(5) 分母 $= x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ の方程式を解くと、 $x = -3, -1, 1$ をえるので、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{3x + 2}{(x+3)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{3x + 2}{(x+1)(x-1)} \right|_{x=-3} = \frac{-9 + 2}{(-2) \cdot (-4)} = \frac{-7}{8},$$

$$B = \left. \frac{3x + 2}{(x+3)(x-1)} \right|_{x=-1} = \frac{-3 + 2}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4},$$

$$C = \left. \frac{3x + 2}{(x+3)(x+1)} \right|_{x=1} = \frac{3 + 2}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$$

となる。

以上より、

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{x-1}$$

である。

(6) まず、 $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ より、分母 = 0 の実数解が求まる。

従って、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right|_{x=0} = \frac{1}{(-1) \cdot 1} = -1, \\ B &= \left. \frac{1}{x(x-1)} \right|_{x=-1} = \frac{1}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{1}{2}, \\ C &= \left. \frac{1}{x(x+1)} \right|_{x=1} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

である。

(7) 分母は (2) と同じなので、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{2x+3}{x-2} \right|_{x=1} = \frac{2+3}{1-2} = -5, \\ B &= \left. \frac{2x+3}{x-1} \right|_{x=2} = \frac{4+3}{2-1} = 7 \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{-5}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

である。

(8) まず、 $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$ より、分母 = 0 の実数解が求まるため、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+1}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{x+2}{2x+1} \right|_{x=2} = \frac{2+2}{4+1} = \frac{4}{5},$$

$$B = \left. \frac{x+2}{x-2} \right|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{1}{2}-2} = -\frac{3}{5}$$

となる。

以上より、

$$\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

である。

(9) まず、分母 $= x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2) = 0$ となるため、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{2x^2 - x - 4}{(x-1)(x+2)} \right|_{x=0} = \frac{-4}{(-1) \cdot 2} = 2,$$

$$B = \left. \frac{2x^2 - x - 4}{x(x+2)} \right|_{x=1} = \frac{2-1-4}{1 \cdot 3} = -1,$$

$$C = \left. \frac{2x^2 - x - 4}{x(x-1)} \right|_{x=-2} = \frac{8+2-4}{(-2) \cdot (-3)} = 1$$

となる。

以上より、

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

である。

(10) 分母 $= x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ の方程式を解くと、

$$x = 1, \pm\sqrt{-1}$$

となり、複素数解がえられる。従って、ヘビサイドの展開定理は使えない。

(11) この問題は、ヘビサイドの展開定理 II を用いる。

まず、

$$\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

として、公式に当てはめると

$$A = \frac{1}{1!}(2x)' \Big|_{x=2} = \frac{1}{1!}(2) \Big|_{x=2} = 2$$

$$B = \frac{1}{1!}(2x) \Big|_{x=2} = 4$$

となる。

以上より、

$$\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

である。

(12) この問題も、ヘビサイドの展開定理 II を用いる。

まずは、

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3}$$

として、公式に当てはめると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2!}(x^2 + x + 2)'' \Big|_{x=-3} \\ &= \frac{1}{2}(2x + 1)' \Big|_{x=-3} = \frac{1}{2}(2) \Big|_{x=-3} = 1, \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{1!}(x^2 + x + 2)' \Big|_{x=-3} = (2x + 1) \Big|_{x=-3} = -5,$$

$$C = \frac{1}{1!}(x^2 + x + 2) \Big|_{x=-3} = 8$$

となる。

以上より、

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x+3)^3} = \frac{1}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2} + \frac{8}{(x+3)^3}$$

である。

(13) まず、分母 $= x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = (x-1)(x-2)^3$ となるため、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} &= \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)(x-2)^3} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3} \end{aligned}$$

とおくと、まず、

$$A = \left. \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-2)^3} \right|_{x=1} = \frac{3-9+7}{(1-2)^3} = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

である。

次に、 $P(x) = \frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2!} P''(x) \Big|_{x=2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1} \right)'' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(6x-9)(x-1) - (3x^2 - 9x + 7) \cdot 1}{(x-1)^2} \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2} \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(x-1)^3} \Big|_{x=2} \\ &= 1, \\ C &= \frac{1}{1!} P'(x) \Big|_{x=2} = \left(\frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1} \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2} \Big|_{x=2} \\ &= 2, \\ D &= \frac{1}{0!} P(x) \Big|_{x=2} = \frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1} \Big|_{x=2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3}$$

である。

(14) まずは、分母の因数分解を行う。

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

となり、分母、分子のどちらも因数 $x+1$ をもつので、

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = \frac{x - 1}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4}$$

と変形して、ヘビサイドの展開定理を利用すると、

$$A = \left. \frac{x-1}{(x+3)(x+4)} \right|_{x=-2} = \frac{-2-1}{1 \cdot 2} = -\frac{3}{2},$$

$$B = \left. \frac{x-1}{(x+2)(x+4)} \right|_{x=-3} = \frac{-3-1}{(-1) \cdot 1} = 4,$$

$$C = \left. \frac{x-1}{(x+2)(x+3)} \right|_{x=-4} = \frac{-4-1}{(-2) \cdot (-1)} = -\frac{5}{2}$$

となる。以上より、

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+4}$$

である。

(15) まず、

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

より、分母 = 0 の実数解が求まる。従って、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{4}{x^2 - 2} = \frac{A}{x - \sqrt{2}} + \frac{B}{x + \sqrt{2}}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{4}{x + \sqrt{2}} \right|_{x=\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$B = \left. \frac{4}{x - \sqrt{2}} \right|_{x=-\sqrt{2}} = \frac{4}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

となる。

以上より、

$$\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{x - 1} - \frac{\sqrt{2}}{x + 1}$$

である。

(16) まず、分母は

$$x^2 - 2x - 4 = (x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5})$$

と因数分解できる。

よって、分母 = 0 の実数解が求まるので、ヘビサイドの展開定理が使える。

$$\frac{x-2}{x^2-2x-4} = \frac{A}{x-1+\sqrt{5}} + \frac{B}{x-1-\sqrt{5}}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{x-2}{x-1-\sqrt{5}} \right|_{x=1-\sqrt{5}} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}-2}{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}} \\ &= \frac{-1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{10}, \\ B &= \left. \frac{x-2}{x-1+\sqrt{5}} \right|_{x=1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}-2}{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}} \\ &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$\frac{x-2}{x^2-2x-4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{x-1-\sqrt{5}}$$

である。

※ 有理数でない解が求まる場合は、途中の計算が複雑になるが、部分分数分解は確かに可能である。

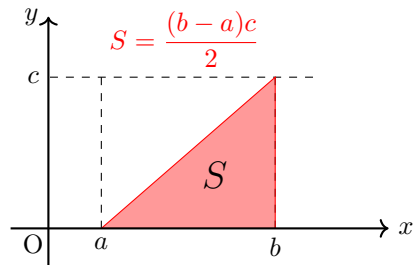
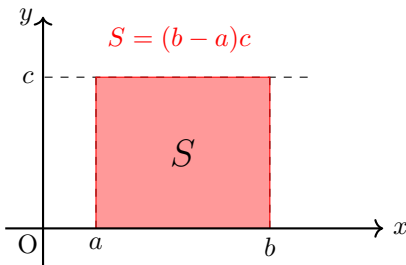
第2章

定積分と基本定理

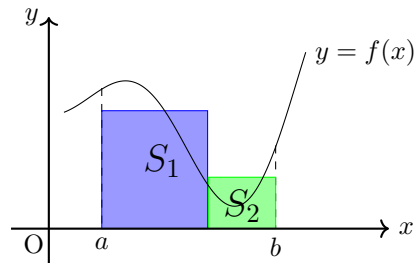
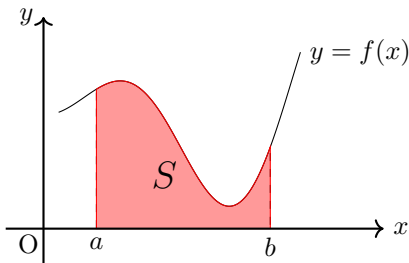
2.1 面積と積分法

2.1.1 面積

ある区間で、定数関数と x 軸 (長方形) や一次関数と x 軸 (直角三角形) の間の面積は



である。では、一般の関数と x 軸との間の面積は？



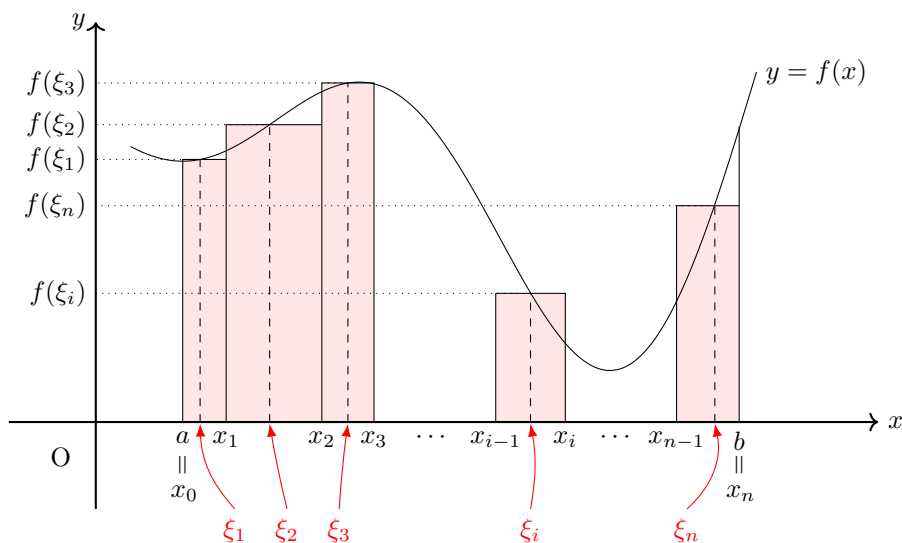
$$S \doteq S_1 + S_2 ?$$

< 微分と積分の関係 >

微分 $\Leftrightarrow$ 積分
(傾き、増加率) (面積)

2.1.2 リーマン和

$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{長方形の面積で近似} \\ \cdot \text{分割を細かくする} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) \text{ の } a \text{ から } b \text{ までの積分} \\ \int_a^b f(x) dx \\ \text{を定義する} \end{array}$



$\exists M, \exists m > 0, m \leq f(x) \leq M \ (a \leq x \leq b)$ であると仮定する。

♠ 注意! $\exists$ は存在する (exist) や、ある～という意味。

訳 1) ある正の数 M, m に対して、 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で $m \leq f(x) \leq M$

訳 2) $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で $m \leq f(x) \leq M$ を満たす正の数 M, m が存在する

分割 $\overset{\text{デルタ}}{\Delta}$ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

とする。小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の中に、それぞれ任意に $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{\text{長方形面積の和}} \end{aligned}$$

を分割 Δ に対する関数 $f(x)$ のリーマン和という。

いま、

$$|\Delta| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

とする。 $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき (すなわち、分割 Δ の幅を限りなく小さくするとき)、
分割の仕方及び ξ_i の選び方に依らず、 $S(\Delta)$ が一定の値 α に近づく。

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha$$

が成り立つならば、この極限值 α を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における (定) 積分といい、

で表す。

※ 上端は [ジョウタン]、下端は [カタン] とよむ。[ウワバ]、[シタバ] と読むと建築用語。

また、このとき、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において、**積分可能** であるという。

$\int_a^b f(x) dx$ を求めることを、 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で **積分する** という。

補題 2.1.1. $f(x) \leq 0$ の場合、 x 軸と $x = a$, $x = b$ 及び $f(x)$ で囲まれた面積に”-”を付けた値になる。

また、

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad (a < b),$$

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

とする。

♣ **補足** 区間 $[a, b]$ において、 $f(x)$ の符号が変わるときは、区間を分けて考える (後述)。

定理 2.1.1. $f(x)$ に対して、

$$f(x) : [a, b] \text{ 上連続} \implies f(x) : [a, b] \text{ 上積分可能}$$

が成り立つ。

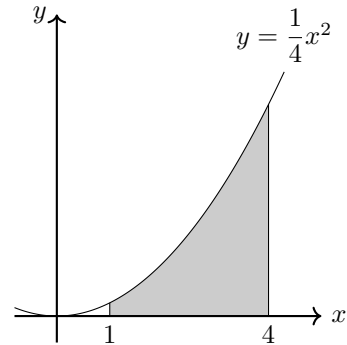
証明 2.1.1. 各自にゆだねる。

2.1.3 練習問題

問題 2.1.1. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ に対して、 $y = f(x)$, $x = 1$, $x = 4$ および x 軸で囲まれた部分の面積をリーマン和で近似することを考える。

次の分割 Δ , ξ_i に対して、関数 $f(x)$ のリーマン和を求めよ。

※ 分数で答えても良いが、小数の近似値 (小数点以下 2 位) で構わない。電卓使用も可。



(1)

$$\Delta : 1 < 2 < 3 < 4$$

$$\xi_1 = 2, \xi_2 = 3, \xi_3 = 4$$

(2)

$$\Delta : 1 < 2 < 3 < 4$$

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = 2, \xi_3 = 3$$

(3)

$$\Delta : 1 < \frac{3}{2} < 2 < \frac{5}{2} < 3 < \frac{7}{2} < 4$$

$$\xi_1 = \frac{3}{2}, \xi_2 = 2, \xi_3 = \frac{5}{2}, \xi_4 = 3, \xi_5 = \frac{7}{2}, \xi_6 = 4$$

(4) n は 1 以上の自然数とする。

$$\Delta : 1 < 1 + \frac{3}{n} < 1 + 2 \cdot \frac{3}{n} < 1 + 3 \cdot \frac{3}{n} < \cdots < 1 + (n-1) \cdot \frac{3}{n} < 1 + n \cdot \frac{3}{n} = 4$$

$$\xi_i = 1 + i \cdot \frac{3}{n} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

※ $n = 3$ のときが (1)、 $n = 6$ のときが (3)、すなわち、 n は分割の数である。

念のため

自然数の和、2 乗の和の公式

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2.1.4 練習問題 略解

略解 2.1.1. (1) 定義に $\Delta : 1 < 2 < 3 < 4$ と $\xi_1 = 2, \xi_2 = 3, \xi_3 = 4$ を当てはめると、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f(2)(2-1) + f(3)(3-2) + f(4)(4-3) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 = \frac{29}{4} \end{aligned}$$

となる。

(2) (1) と同様に当てはめると、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f(1)(2-1) + f(2)(3-2) + f(3)(4-3) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3) これまで同様に当てはめると、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right) + f(2)\left(2-\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-2\right) \\ &\quad + f(3)\left(3-\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{7}{2}-3\right) + f(4)\left(4-\frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left\{ \frac{3^2}{2^2} + 2^2 + \frac{5^2}{2^2} + 3^2 + \frac{7^2}{2^2} + 4^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^2} (3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2) = \frac{199}{32} \end{aligned}$$

となる。

(4) 定義に従うと、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right) \left(\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right) - \left(1 + (i-1) \cdot \frac{3}{n}\right) \right) \right\} \\ &= \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{3}{n}i\right)^2 = \frac{3}{4n} \sum_{i=1}^n \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{n}i + \frac{3^2}{n^2}i^2\right) \\ &= \frac{3}{4n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right\} = \frac{21}{4} + \frac{45}{8n} + \frac{9}{8n^2} \end{aligned}$$

となる。

※ $n = 3$ のときが (1)、 $n = 6$ のときが (3) となっている。

2.2 区分求積法

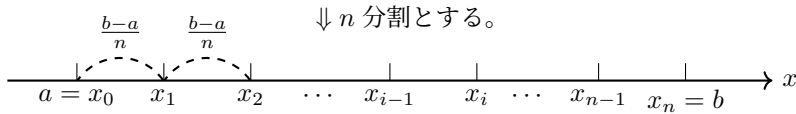
2.2.1 リーマン和から区分求積法

復習 (リーマン和)

区間 $[a, b]$ の分割を $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ⁽¹⁾ として、分割幅の最大を $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ で定める。また、小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意の ξ_i ⁽²⁾ をとる。このとき、以下をリーマン和という。

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

(1) 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$



このとき、各小区間の幅 $(x_i - x_{i-1})$ は、 $\frac{b-a}{n}$ となり、 $|\Delta| = \frac{b-a}{n}$ である。
ちなみに

$$\Delta : a < a + \frac{b-a}{n} < a + \frac{b-a}{n} \cdot 2 < \cdots < a + \frac{b-a}{n} \cdot n = b$$

であり、 $|\Delta| \rightarrow 0$ は、 $n \rightarrow \infty$ である。

(2) 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意の ξ_i

$\Downarrow$ 小区間の左端か、右端にする。

$$\xi_i = x_{i-1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1) \quad \text{または} \quad \xi_i = x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$$

以上の変更によって、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

となる。この方法を区分求積法という。

2.2.2 区分求積法とは

まず、 $f(x)$ は $[a, b]$ 上積分可能とする。 $[a, b]$ を n 等分すると、各小区間の幅は、

$$\frac{b-a}{n}$$

である。よって、各分点は

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

と表される。

小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において、左端 x_{i-1} または 右端 x_i のどちらかを ξ_i とする。

すなわち、

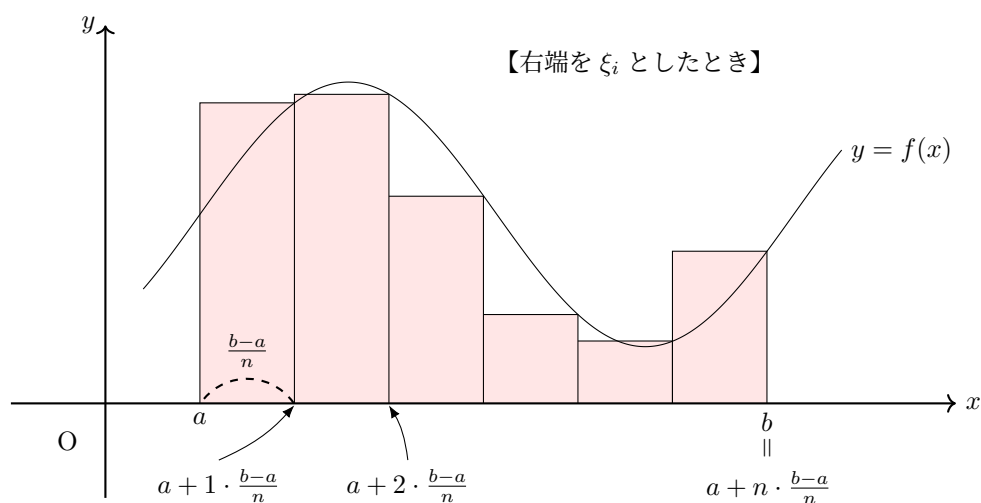
$$\xi_i = x_{i-1} \quad \text{or} \quad \xi_i = x_i$$

とすることにより、

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right) & (\xi_i = x_{i-1} : \text{左端の場合}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) & (\xi_i = x_i : \text{右端の場合}) \end{cases}$$

こっちを使う！

となる。



例 2.2.1. 区分求積法を用いて $\int_0^1 x^3 dx$ を求めよ。

まず、

$$\int_0^1 x^3 dx = \int_a^b f(x) dx$$

なので、 $a = 0, b = 1, f(x) = x^3$ として ($\xi_i = x_i$: 右端の場合を) 考える。

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \\ \int_0^1 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n \left(0 + \frac{1-0}{n}i\right)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \end{aligned}$$

3 乗の和の公式は、1 乗の和の公式の 2 乗

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

例 2.2.2. (定数関数の積分)

区間 $[a, b]$ において、定数関数 $f(x) = c$ と x 軸の間の面積を求めよ ($c \in \mathbb{R}$)。言い換えると $\int_a^b c dx = c(b-a)$ を示せ。

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して、 $f(x) = c$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \\ \int_a^b c dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n c \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot nc \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(b-a)c}_{n \text{ に無関係}} \\ &= (b-a)c \end{aligned}$$

である。(別解： $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha$ で示す。)

2.2.3 演習問題

問題 2.2.1. 区分求積法を用いて、以下の関数の与えられた区間における定積分を求めよ。

- (1) 関数: $3x - 1$, 区間: $[1, 2]$
 (2) 関数: $3x^2$, 区間: $[0, 1]$
 (3) 関数: e^x , 区間: $[a, b]$ ただし、 $0 < a < b$

問題 2.2.2. 以下の極限が $\int_a^b f(x) dx$ に等しくなる 関数 $f(x)$, 下端 a , 上端 b の組を 1 つ求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{n^3} - \frac{3}{n} \right) \qquad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \left(-\frac{i^2}{n^3} + \frac{6}{n^2} i \right)$$

問題 2.2.3. 以下の極限が $\int_a^b f(x) dx$ に等しくなる 関数 $f(x)$, 下端 a , 上端 b の組を 1 つ求めよ。

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$$

(2) k は 2 以上の自然数とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+kn} \right)$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{9n^2 + 1} + \frac{n^2}{9n^2 + 4} + \frac{n^2}{9n^2 + 9} + \cdots + \frac{n^2}{9n^2 + n^2} \right)$$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k}$$

2.2.4 演習問題 略解

略解 2.2.1. (1) 例 2.2.1. を参考に考える。

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 (3x-1) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{n} \sum_{i=1}^n \left(3 \cdot \left(1 + \frac{2-1}{n} i \right) - 1 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{3}{n} i \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ 2n + \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{3}{2n} (n+1) \right\} = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

(2) 例 2.2.1. を参考に考える。

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 3x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n 3 \left(0 + \frac{1-0}{n} i \right)^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} \cdot (n+1)(2n+1) = 1
 \end{aligned}$$

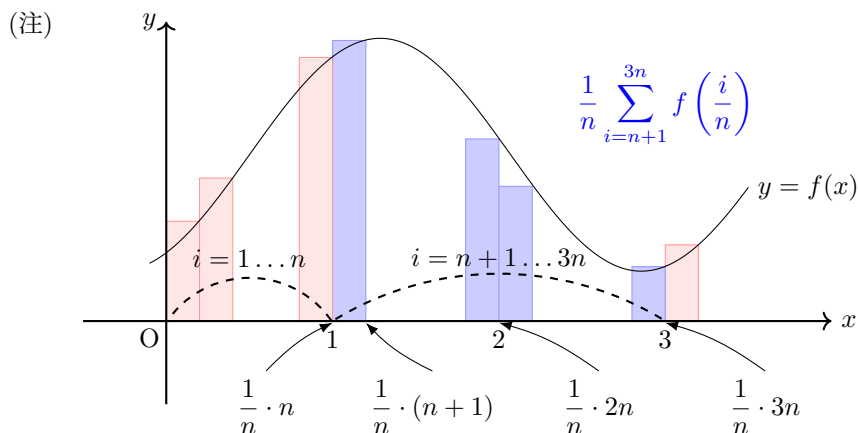
(3) 定義にしたがって考える。ただし、 $\delta = \frac{b-a}{n}$ とおく。

$$\begin{aligned}
 \int_a^b e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n e^{a + \frac{b-a}{n} i} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot e^a \cdot e^\delta \left\{ 1 + e^\delta + e^{2\delta} + \cdots + e^{(n-1)\delta} \right\} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot e^a \cdot e^\delta \cdot \frac{1 - e^{n\delta}}{1 - e^\delta} \\
 &= (e^a - e^b) \lim_{\delta \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{-\delta}{e^{-\delta} - 1} \\
 &= (e^a - e^b) \cdot (-1) = e^b - e^a
 \end{aligned}$$

略解 2.2.2. 解答の例.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{n^3} - \frac{3}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i^2}{n^2} - 3 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left(0 + \frac{i}{n} \right)^2 - 3 \right) \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 3) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \left(-\frac{i^2}{n^3} + \frac{6}{n^2} i \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{n} \left(-\frac{i^2}{n^2} + 6 \cdot \frac{i}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{3n} \left(-\left(\frac{i}{n} \right)^2 + 6 \left(\frac{i}{n} \right) \right) \\
 &= \int_1^3 (-x^2 + 6x) dx
 \end{aligned}$$



略解 2.2.3.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right) \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}} \\
 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+kn} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{kn}{n}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{kn} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \\
 &= \int_0^k \frac{1}{1+x} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{9n^2+1} + \frac{n^2}{9n^2+4} + \frac{n^2}{9n^2+9} + \cdots + \frac{n^2}{9n^2+n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{9+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{9+(\frac{2}{n})^2} + \frac{1}{9+(\frac{3}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{9+(\frac{n}{n})^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{9+(\frac{i}{n})^2} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{9+x^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2n+1}^{3n} \frac{1}{i} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=2n+1}^{3n} \frac{1}{\frac{i}{n}} \\
 &= \int_2^3 \frac{1}{x} dx
 \end{aligned}$$

2.3 定積分の性質

2.3.1 定積分の性質

定理 2.3.1. $f(x), g(x) : [a, b]$ において、積分可能であるとき、次が成り立つ。

$$(1) \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (\text{複号同順})$$

$$(2) \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(3) a < c < b \text{ のとき、} \\ \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$(4) f(x) \leq g(x) \quad (a \leq x \leq b) \text{ のとき、} \\ \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

この (1), (2) を線形性, (3) を加法性, (4) を大小関係依存性という。

♣ 補足 (4) の前提は、『 x が a から b の間で、常に $g(x)$ の値は $f(x)$ の値以上である』ことを意味している。

証明 2.3.1. (1) まず f, g は積分可能なので、

$$\int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\text{lim の線形性} \rightarrow = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\}$$

$$\sum \text{の線形性} \rightarrow = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left\{ f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \pm g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\}$$

$$= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left\{ f(\xi_i) \pm g(\xi_i) \right\} (x_i - x_{i-1})$$

$$\text{積分の定義} \rightarrow = \int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx$$

である。

□

(2) f は積分可能なので、

$$\begin{aligned}
 k \int_a^b f(x) dx &= k \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 \text{lim の線形性} \rightarrow &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left\{ k \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\} \\
 \Sigma \text{ の線形性} \rightarrow &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left\{ k f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\} \\
 &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \left\{ k f(\xi_i) \right\} (x_i - x_{i-1}) \\
 \text{積分の定義} \rightarrow &= \int_a^b k f(x) dx
 \end{aligned}$$

である。 □

(3) $a < c < b$ のとき、 $[a, b]$ で積分可能なので、 $[a, c]$ や $[c, b]$ でも積分可能である。

いま $0 < m < n$ とし、

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 : a &= x_0 < x_1 < \cdots < x_m = c, \\
 \Delta_2 : c &= x_m < x_{m+1} < \cdots < x_n = b
 \end{aligned}$$

を考え、 Δ_1 と Δ_2 を合わせた分割を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < \cdots < x_n = b$$

とし、 $|\Delta| = \max \{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
 \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \lim_{|\Delta_1| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|\Delta_2| \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 \Delta \text{ の定義より} \rightarrow &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 \text{lim の線形性} \rightarrow &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^m f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=m+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right\} \\
 \Sigma \text{ の加法性} \rightarrow &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\
 &= \int_a^b f(x) dx
 \end{aligned}$$

である。 □

2.3.2 演習問題

問題 2.3.1. 定理 2.3.1. の (4), (5) を証明せよ。

問題 2.3.2. 関数 $f(x), g(x)$ に対して、

$$\int_a^b f(x) dx = 3, \quad \int_b^c f(x) dx = 8, \quad \int_a^b g(x) dx = 7, \quad \int_a^c g(x) dx = 18$$

がいえる。ただし、 $0 < a < b < c$ である。

このとき、以下の値を答えよ。

$$\begin{array}{lll} (1) \int_a^b 3f(x) dx & (2) \int_a^b (-f(x)) dx & (3) \int_a^c f(x) dx \\ (4) \int_b^c g(x) dx & (5) \int_b^c (f(x) + g(x)) dx & (6) \int_a^c (4f(x) - 3g(x)) dx \end{array}$$

問題 2.3.3. (1) 定積分 $I = \int_1^2 x^3 dx$ に対して、区間 $[1, 2]$ における被積分関数 $f(x) = x^3$ の最大値 M と最小値 m を用いて考えたとき、正しいものを一つ選べ。

$$(\text{ア}) 1 \leq I \leq 8 \quad (\text{イ}) 0 \leq I \leq 1 \quad (\text{ウ}) 1 \leq I \leq 4 \quad (\text{エ}) 8 \leq I \leq 16$$

$$(2) I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ と } J = \int_0^1 e^{-x} dx \text{ の大小関係として正しいものを 1 つ選べ。}$$

$$(\text{ア}) I = J \quad (\text{イ}) I < J \quad (\text{ウ}) I > J \quad (\text{エ}) \text{ 大小関係は比較できない。}$$

$$(3) \text{ 定積分 } I = \int_{-1}^0 (x^3 - 4) dx \text{ の符号として正しいものを 1 つ選べ。}$$

$$(\text{ア}) I = 0 \quad (\text{イ}) I < 0 \quad (\text{ウ}) I > 0 \quad (\text{エ}) \text{ これだけでは符号は分からない}$$

$$(4) \text{ 定積分 } I = \int_1^3 \frac{1}{x} dx \text{ の値の範囲として、次のうち最も適切なものを 1 つ選べ。}$$

$$(\text{ア}) \frac{1}{3} \leq I \leq \frac{2}{3} \quad (\text{イ}) \frac{2}{3} \leq I \leq 2 \quad (\text{ウ}) 2 \leq I \leq \frac{8}{3} \quad (\text{エ}) \frac{8}{3} \leq I \leq 4$$

(5) 以下の各定積分に対して、値が大きい順に並べよ。

$$A = \int_0^1 x^2 dx, \quad B = \int_0^1 1 dx, \quad C = \int_0^1 x^3 dx, \quad D = \int_0^1 x dx$$

2.3.3 演習問題 略解

略解 2.3.1. (4) $f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x \leq b$) とする。

$$f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad (1 \leq i \leq n)$$

の関係より、

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

である。 □

(5) $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ と (4) より、

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

である。したがって、

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

である。 □

略解 2.3.2.

(1)

$$\begin{aligned} \int_a^b 3f(x) dx &= 3 \int_a^b f(x) dx \\ &= 3 \cdot 3 = 9 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_a^b (-f(x)) dx &= (-1) \cdot \int_a^b f(x) dx \\ &= (-1) \cdot 3 = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\
 &= 3 + 8 = 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_a^c g(x) dx &= \int_a^b g(x) dx + \int_b^c g(x) dx \text{ より} \\
 \int_b^c g(x) dx &= \int_a^c g(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\
 &= 18 - 7 = 11
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \int_b^c (f(x) + g(x)) dx &= \int_b^c f(x) dx + \int_b^c g(x) dx \\
 &= 8 + 11 = 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \int_a^c (4f(x) - 3g(x)) dx &= \int_a^c 4f(x) dx - \int_a^c 3g(x) dx \\
 &= 4 \cdot 11 - 3 \cdot 18 = -10
 \end{aligned}$$

略解 2.3.3. (1) $M = 8$, $m = 1$ であり、定数関数 $y = 8$ と $y = 1$ の面積を考えると、
(ア) $1 \leq I \leq 8$ が正解。

(2) $y = e^x$ は単調増加関数である。また、 $0 \leq x \leq 1$ のとき、 $-x^2 \geq -x$ なので、
 $e^{-x^2} \geq e^{-x}$ である。このことより、(ウ) $I > J$ が正解。

(3) 区間 $-1 \leq x \leq 0$ において、 $x^3 - 4x - 3$ は常に負の値となる。よって、(イ) $I < 0$ が正解。

(4) 区間 $[1, 3]$ において最小値 $m = \frac{1}{3}$, 最大値 $M = 1$ である。また、区間の幅は 2 なので、 $\frac{1}{3} \cdot 2 \leq I \leq 1 \cdot 2$ 、すなわち (イ) $\frac{2}{3} \leq I \leq 2$ が正解。

(5) 区間 $0 \leq x \leq 1$ において、 $1, x, x^2, x^3$ は非減少関数である。また、この区間では、
 $x^3 \leq x^2 \leq x \leq 1$ である。

よって、

$$B = \int_0^1 1 dx > D = \int_0^1 x dx > A = \int_0^1 x^2 dx > C = \int_0^1 x^3 dx$$

となる。

2.4 積分の平均値の定理

2.4.1 積分の平均値の定理

定理 2.4.1. (積分の平均値の定理)

$f(x) \in C[a, b]$ ($[a, b]$ で連続) のとき、

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

が成り立つ。

証明 2.4.1. k を定数とする。

・ $f(x) \equiv k$ のとき^{*1}、 $a \leq \forall \xi \leq b$ に対して、

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{(*)}{=} k(b-a) = f(\xi)(b-a)$$

より、成り立つ。(*) 例 2.2.2. の定数関数により。

・ $f(x) \not\equiv k$ のとき、 $f(x) \in C[a, b]$ より、

$$\exists m = \min_{a \leq x \leq b} f(x), \quad \exists M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$$

である。よって、

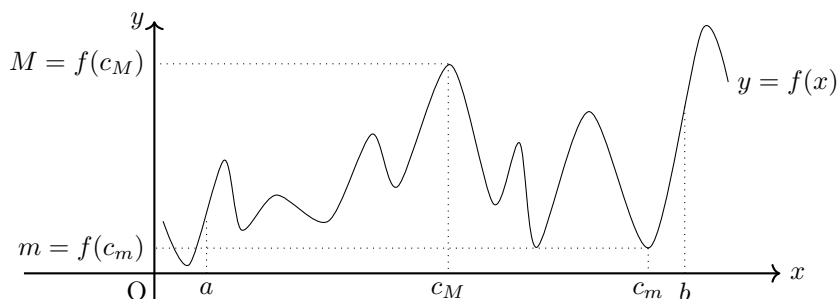
$$m \leq f(x) \leq M \quad (a \leq x \leq b, \underbrace{m < M}_{f(x) \not\equiv k} \text{ より})$$

である。このとき、

$$\exists c_m : m = f(c_m), \quad \exists c_M : M = f(c_M)$$

を選べる。ただし、 $c_m, c_M \in [a, b]$, $\underbrace{c_m \neq c_M}_{m < M, f(x) \not\equiv k}$ である。

$m < M, f(x) \not\equiv k$ より



^{*1} $f(x) \equiv k$ とは、恒等的に等しいことを意味する。

以上を改めて書くと、

$$\exists c_m, \exists c_M \in [a, b], \quad m = f(c_m) \leq f(x) \leq f(c_M) = M \quad (a \leq x \leq b)$$

ただし、 $f(c_m) < f(c_M)$ かつ $c_m \neq c_M$ に注意 (この $<$ と $\neq$ は $f(x) \neq k$ より解る)。

したがって、

$$m(b-a) = \int_a^b m \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx = M(b-a)$$

$\uparrow$ 定数の積分 $\nwarrow$ 大小保存性 $\nearrow$ 定数の積分

であるから、 $b-a$ で各辺を割ると

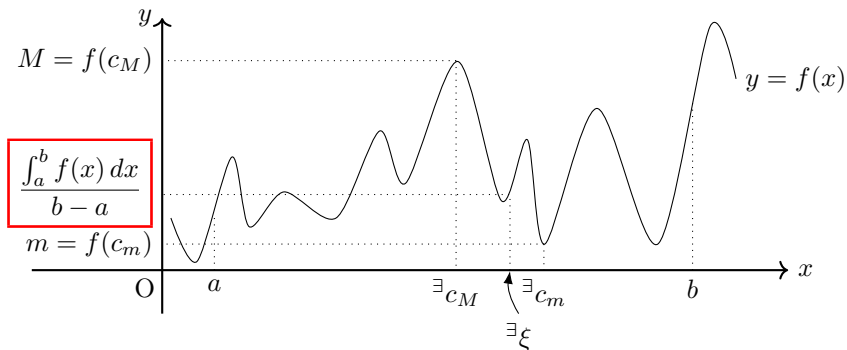
$$\boxed{f(c_m)} = m \leq \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} \leq M = \boxed{f(c_M)}$$

ここで、 $c_M < c_m$ の場合を考える。($c_M > c_m$ の場合も同様)

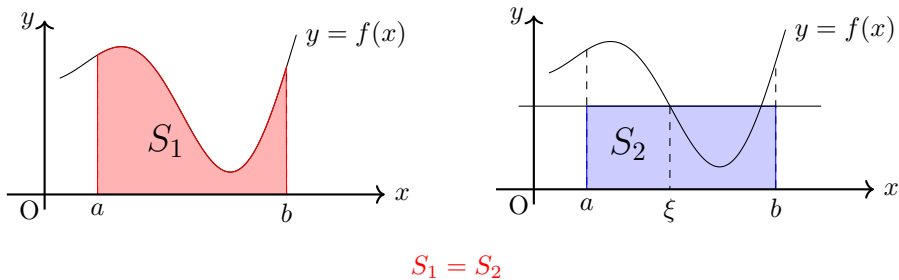
$f(c_m) < f(c_M)$ より、中間値の定理を用いると、

$$\exists \xi \in [c_M, c_m] \subset [a, b] : \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{b-a} = f(\xi)$$

である。 □



☆ 積分の平均値の定理は、幾何学的に考えると、



である。

2.4.2 演習問題

問題 2.4.1. a を定数、 n を自然数とする。また、

$$I_n = \int_a^{a+\frac{1}{n}} x \cos^2(x-a) dx$$

とする。

このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n$$

を求めよ。

問題 2.4.2. $f(t)$ が $[a, b]$ で連続な減少関数ならば、

$$m(x) := \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$$

は $(a, b]$ で連続な減少関数であることを示せ。

問題 2.4.3. a を正の実数とし、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+a}}$$

とする。このとき、以下の問いに答えよ。

ただし、 $f(x)$ が $x > 0$ において単調減少関数であることは証明せず使用して良い。

(1) b を正の実数とすると、

$$f(b), f(b+1), \int_b^{b+1} f(x) dx$$

の大小関係を調べよ。

予習

(2) 以下の値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$$

※ 積分の基本公式を用いる場面がある。

2.4.3 演習問題 略解

略解 2.4.1. $f(x) = x \cos^2(x - a)$ は連続関数なので、積分の平均値の定理より

$$\int_a^{a+\frac{1}{n}} x \cos^2(x - a) dx = \left(a + \frac{1}{n} - a\right) \cdot \xi \cos^2(\xi - a) \quad (1)$$

を満たす ξ が、

$$a < \xi < a + \frac{1}{n} \quad (2)$$

の範囲で存在する。

(1) より、 $I_n = \frac{1}{n} \cdot \xi \cos^2(\xi - a)$ なので、 $nI_n = \xi \cos^2(\xi - a)$ となる。

また、(2) より、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $\xi \rightarrow a$ なので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n &= \lim_{\xi \rightarrow a} \xi \cos^2(\xi - a) \\ &= a \cos^2 0 \\ &= a \end{aligned}$$

である。

略解 2.4.2. まず、 $f(t)$ は連続関数なので、定積分 $\int_a^x f(t) dt$ は x に関して連続関数となる。

また、 $x - a$ は x が $x \in (a, b]$ において連続 (正) であるので、 $\frac{1}{x - a}$ も $x \in (a, b]$ において連続である。

したがって、 $m(x)$ は $x \in (a, b]$ において連続である。

次に、 $m(x)$ の導関数を考えると、

$$\begin{aligned} m'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x - a} \int_a^x f(t) dx \right) \\ &= \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x - a} \right) \right\} \cdot \int_a^x f(t) dt + \frac{1}{x - a} \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{(x - a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{1}{x - a} \cdot f(x) \\ &= \frac{f(x)(x - a) - \int_a^x f(t) dt}{(x - a)^2} \end{aligned}$$

となる。

ここで、積分の平均値の定理より、

$$\exists \xi \in [a, x] : \int_a^x f(t) dx = f(\xi)(x - a)$$

がいえ。

また、 $f(t)$ は減少関数なので $\xi \leq x$ において、 $f(\xi) \geq f(x)$ である。よって、 $m'(x)$ の分子は

$$f(x)(x - a) - \int_a^x f(t) dt = f(x)(x - a) - f(\xi)(x - a) \leq 0$$

がいえ。

以上より、区間 $(a, b]$ において、 $m'(x) \leq 0$ がいえるので、 $m(x)$ は減少関数である。□

略解 2.4.3. (1) $f(x)$ は閉区間 $[\alpha, \beta]$ ($\beta > \alpha > 0$) で連続かつ、微分可能なので、積分の平均値の定理より

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) = f(\xi)$$

を満たす $\alpha < \xi < \beta$ が存在する。(ここでは $f(x)$ が単調減少関数なので、 $\xi \neq \alpha, \beta$)

よって、 $\beta \leftarrow b + 1, \alpha \leftarrow b$ とせば、

$$\frac{1}{(b+1) - b} \int_b^{b+1} \frac{1}{\sqrt{x+a}} dx = \frac{1}{\sqrt{\xi+a}} \quad (\text{ア})$$

が成り立つ。

また、 $f(x)$ は単調減少関数であり、 $b < \xi < b + 1$ より、

$$\frac{1}{\sqrt{b+1+a}} < \frac{1}{\sqrt{\xi+a}} < \frac{1}{\sqrt{b+a}} \quad (\text{イ})$$

が成り立つ。よって、(ア), (イ) より、

$$\frac{1}{\sqrt{b+1+a}} < \int_b^{b+1} \frac{1}{\sqrt{x+a}} dx < \frac{1}{\sqrt{b+a}} \quad (\text{ウ})$$

であり、

$$f(b+1) < \int_b^{b+1} f(x) dx < f(b)$$

である。

(2) (ウ)において、 $a = n^2, b = k$ とおくと、

$$\frac{1}{\sqrt{k+1+n^2}} < \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx < \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} \quad (\text{エ})$$

が成り立つ。

このとき、左の不等号の k を $k-1$ で置き換えた式

$$\frac{1}{\sqrt{k+n^2}} < \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx$$

を (エ) の右の不等式と合わせると、

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx < \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} < \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx$$

をえる。ここで、各項の $k = 1$ から n までの数列和をとると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx &= \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx = \left[2\sqrt{x+n^2} \right]_1^{n+1} \\ &= 2(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) \\ \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx &= \int_0^n \frac{1}{\sqrt{x+n^2}} dx = \left[2\sqrt{x+n^2} \right]_0^n \\ &= 2(\sqrt{n^2+n} - n) \end{aligned}$$

あとは、極限をとって挟み撃ちにする。

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n) - n^2}{\sqrt{n^2+n} + n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = 1$$

$$\begin{aligned} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+n+1) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1 \end{aligned}$$

以上より、

$$1 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} < 1$$

となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n^2}} = 1$$

である。

2.5 微分積分の基本定理、基本公式

2.5.1 微分積分の基本定理

定理 2.5.1. (微分積分の基本定理)

$f(x) \in C[a, b]$ のとき、

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

は $F'(x) = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$ をみたす。

証明 2.5.1. $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t) dt$ より、

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \end{aligned}$$

である。ここで、積分の平均値の定理

$$\exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a)$$

を用いると、 $h > 0$ のとき、

$$\exists \xi \in [x, x+h] : \int_x^{x+h} f(x) dx = f(\xi)((x+h) - x) = f(\xi)h$$

また、 $h < 0$ のとき、

$$\exists \xi \in [x+h, x] : \int_{x+h}^x f(x) dx = f(\xi)(x - (x+h)) = -f(\xi)h$$

であり、これは

$$\Leftrightarrow \int_x^{x+h} f(x) dx = f(\xi)h$$

である。

以上より、

$$\exists \xi \in [x, x+h] \quad (\text{または} \exists \xi \in [x+h, x]) : \int_{x+h}^x f(x) = f(\xi)h$$

ξ は x と $x+h$ の間にあるので、 $h \rightarrow 0 \xRightarrow{\text{ならば}} \xi \rightarrow x$ である。よって、

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x). \quad //$$

定理 2.5.2. (基本公式)

$f(x) \in C[a, b]$, $G(x) : f(x)$ の原始関数とする。このとき、

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) \quad \left(\stackrel{\text{def}}{=} [G(x)]_a^b \right)$$

である。

証明 2.5.2. $f(x) \in C[a, b]$ より、 $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能だから、

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b)$$

とすれば、**微分積分の基本定理**より、 $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である。よって、

$$\exists C \in \mathbb{R} : G(x) = F(x) + C$$

となるから、

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^a f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx \quad // \end{aligned}$$

例 2.5.1. 基本公式を用いて計算する。

$$(1) \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 + 0 \right) = \frac{4}{3}.$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (-1 \cdot (-1)) = 0.$$

2.5.2 演習問題

問題 2.5.1. 以下の定積分を求めよ。

$$(1) \int_0^2 5x^4 dx$$

$$(2) \int_0^2 (x^2 - 2x) dx$$

$$(3) \int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx$$

$$(4) \int_1^2 (3e^x + 4^x) dx$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sin x + \frac{1}{3}\cos x \right) dx$$

$$(6) \int_0^1 (2x + 1)^5 dx$$

$$(7) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$(8) \int_1^3 \frac{1}{5x-3} dx$$

$$(9) \int_0^2 (2x+3)(x-4) dx$$

$$(10) \int_{-\frac{3}{2}}^0 \frac{2x^2 - 5x - 12}{x-4} dx$$

$$(11) \int_{-1}^3 \frac{x-4}{2x^2-5x-12} dx$$

$$(12) \int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$(13) \int_{-1}^1 e^{-2x} dx$$

$$(14) \int_0^2 \sqrt{e^x} dx$$

$$(15) \int_0^1 5^x dx$$

$$(16) \int_0^3 \sqrt{\frac{1}{3}x} dx$$

$$(17) \int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-6}} dx$$

$$(18) \int_0^\pi \sin 2x dx$$

$$(19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$(20) \int_1^2 \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} dx$$

$$(21) \int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx$$

$$(22) \int_{-12}^{-4} \frac{1}{\sqrt{4-8x}} dx$$

$$(23) \int_1^2 \frac{1}{x^2+6x+9} dx$$

$$(24) \int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(2x+1)^2+9} dx$$

$$(25) \int_2^4 \frac{3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} dx$$

$$(26) \int_0^1 (3x^2 - 5x + 2)^2(6x - 5) dx$$

$$(27) \int_2^3 \frac{6x-5}{3x^2-5x+2} dx$$

$$(28) \int_0^\pi \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$(29) \int_0^\pi \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx$$

$$(30) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx$$

2.5.3 演習問題 略解

略解 2.5.1. 積分については問題 1.2.1. を参考に (ただし、すべて同じではない)。

(1)

$$\int_0^2 5x^4 dx = [x^5]_0^2 = 32 - 0 = 32$$

(2)

$$\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 8 - 4 \right) - (0 - 0) = -\frac{4}{3}$$

(3)

$$\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = [4\sqrt{x}]_1^4 = 4\sqrt{4} - 4 \cdot 1 = 4$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_1^2 (3e^x + 4^x) dx &= \left[3e^x + \frac{4^x}{\log 4} \right]_1^2 = 3e^2 + \frac{4^2}{\log 4} - 3e - \frac{4}{\log 4} \\ &= 3e(e-1) + \frac{12}{\log 4} \left(= 3e(e-1) + \frac{6}{\log 2} \right) \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2 \sin x + \frac{1}{3} \cos x \right) dx &= \left[-2 \cos x + \frac{1}{3} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - (-2) \cdot 1 \\ &= 2 - \frac{5}{6}\sqrt{2} \end{aligned}$$

(6)

$$\int_0^1 (2x+1)^5 dx = \left[\frac{1}{12} (2x+1)^6 \right]_0^1 = \frac{1}{12} (3^6 - 1) = \frac{182}{3}$$

(7) $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ に注意する。

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_{-1}^1 = \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} \frac{-1}{2} = \frac{1}{6}\pi - \left(-\frac{1}{6}\pi \right) = \frac{1}{3}\pi$$

(8)

$$\int_1^3 \frac{1}{5x-3} dx = \left[\frac{1}{5} \log(5x-3) \right]_1^3 = \frac{1}{5} \log 12 - \frac{1}{5} \log 2 = \frac{1}{5} \log 6$$

(9)

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x+3)(x-4) dx &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 12x \right]_0^2 = \frac{2}{3} \cdot 2^3 - \frac{5}{2} \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - 0 \\ &= -\frac{86}{3} \end{aligned}$$

(10)

$$\int_{-\frac{3}{2}}^0 \frac{2x^2 - 5x - 12}{x - 4} dx = \left[x^2 + 3x \right]_{-\frac{3}{2}}^0 = 0 - \left\{ \left(-\frac{3}{2} \right)^2 + 3 \left(-\frac{3}{2} \right) \right\} = \frac{9}{4}$$

(11)

$$\int_{-1}^3 \frac{x - 4}{2x^2 - 5x - 12} dx = \left[\frac{1}{2} \log(2x + 3) \right]_{-1}^3 = \frac{1}{2} \log 9 - \frac{1}{2} \log 1 = \log 3$$

(12)

$$\int_2^4 \frac{1}{x^2 - 1} dx = \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right]_2^4 = \frac{1}{2} \log \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{3} = \log \frac{3}{\sqrt{5}}$$

(13)

$$\int_{-1}^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \left(-\frac{1}{2} e^2 \right) = \frac{1}{2} (e^2 - e^{-2})$$

(14)

$$\int_0^2 \sqrt{e^x} dx = \left[2\sqrt{e^x} \right]_0^2 = 2\sqrt{e^2} - 2\sqrt{e^0} = 2e - 2$$

(15)

$$\int_0^1 5^x dx = \left[\frac{5^x}{\log 5} \right]_0^1 = \frac{5^1}{\log 5} - \frac{5^0}{\log 5} = \frac{4}{\log 5}$$

(16)

$$\int_0^3 \sqrt{\frac{1}{3}x} dx = \left[\frac{2\sqrt{3}}{9} x\sqrt{x} \right]_0^3 = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 3\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot 0\sqrt{0} = 2$$

(17)

$$\int_{10}^{15} \frac{1}{\sqrt{x-6}} dx = \left[2\sqrt{x-6} \right]_{10}^{15} = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{4} = 2$$

(18)

$$\int_0^\pi \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^\pi = -\frac{1}{2} \cos 2\pi - \left(-\frac{1}{2} \cos 0 \right) = 0$$

(19)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) dx = \left[-\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

(20)

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} dx &= \left[-\frac{2}{x} + \log |x| \right]_1^2 = -\frac{2}{2} + \log 2 - \left(-\frac{2}{1} + \log 1 \right) \\ &= 1 + \log 2 \end{aligned}$$

(21)

$$\int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\frac{1}{3} x\sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{4} - \frac{1}{3} \cdot 1\sqrt{1} = \frac{7}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (22) \quad \int_{-12}^{-4} \frac{1}{\sqrt{4-8x}} dx &= \left[-\frac{1}{2} \sqrt{1-2x} \right]_{-12}^{-4} \\
 &= -\frac{1}{2} \sqrt{1-2 \cdot (-4)} - \left(-\frac{1}{2} \sqrt{1-2 \cdot (-12)} \right) = 1
 \end{aligned}$$

$$(23) \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2+6x+9} dx = \left[-\frac{1}{x+3} \right]_1^2 = -\frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{20}$$

$$(24) \quad -\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} \theta < \frac{\pi}{2} \text{ に注意に注意する。}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{(2x+1)^2+9} dx = \left[\frac{1}{6} \tan^{-1} \frac{2x+1}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{6} \tan^{-1} 1 - \frac{1}{6} \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{24}$$

$$\begin{aligned}
 (25) \quad \int_2^4 \frac{3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} dx &= \left[(x+1)\sqrt{x+1} + (x-1)\sqrt{x-1} \right]_2^4 \\
 &= 5\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - (3\sqrt{3} + \sqrt{1}) = 5\sqrt{5} - 1
 \end{aligned}$$

$$(26) \quad \int_0^1 (3x^2-5x+2)^2(6x-5) dx = \left[\frac{1}{3} (3x^2-5x+2)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 = -\frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (27) \quad \int_2^3 \frac{6x-5}{3x^2-5x+2} dx &= \left[\log |3x-2| + \log |x-1| \right]_2^3 \\
 &= \log 7 + \log 2 - (\log 4 + \log 1) = \log 7 - \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (28) \quad \int_0^\pi \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right]_0^\pi \\
 &= -\frac{1}{2} \cos \frac{5}{2}\pi - \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$(29) \quad \int_0^\pi \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right]_0^\pi = 0$$

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 0 = \frac{1}{4} \\
 (\text{別解}) &= \left[-\frac{1}{2} \cos^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2} \cos^2 \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{1}{2} \cos^2 0 \right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

2.6 演習 II

2.6.1 演習問題

問題 2.6.1. 以下の定積分を求めよ。

$$(1) \int_{-1}^2 (3x^2 - 4x) dx$$

$$(2) \int_0^1 e^{2x} dx$$

$$(3) \int_1^e \frac{2}{x} dx$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos x dx$$

$$(5) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$$

$$(6) \int_0^1 (2x+1)^3 dx$$

$$(7) \int_1^2 x(x^2-1)^4 dx$$

$$(8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$$

$$(9) \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$(10) \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$(11) \int_1^e x \log x dx$$

$$(12) \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx$$

$$(13) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$(14) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx$$

$$(15) \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$(16) \int_{-2}^4 (x^3 - x) dx$$

$$(17) \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$(18) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$(19) \int_{-3}^3 |x| dx$$

$$(20) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$(21) \int_3^4 \frac{2x+5}{x^2-x-2} dx$$

$$(22) \int_4^7 \frac{x^2-10x+26}{(x+2)(x-3)^2} dx$$

問題 2.6.2. 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x^2$ と x 軸、直線 $x = 1$, $x = 3$ で囲まれた部分の面積 S_1 を求めよ。

(2) 関数 $y = x^2 - 4$ と x 軸、直線 $x = 0$, $x = 2$ で囲まれた部分の面積 S_2 を求めよ。

(3) 2つの曲線 $y = x^2$ と $y = x$ で囲まれた部分の面積 S_3 を求めよ。

(4) 3つの領域 $y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 7$, $y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x$, $y \geq \frac{3}{4}x$ の共通部分の面積 S_4 を求めよ。

2.6.2 演習問題 略解

略解 2.6.1.

$$(1) \quad \int_{-1}^2 (3x^2 - 4x) dx = \left[x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^2 = (8 - 8) - (-1 - 2) \\ = 3$$

$$(2) \quad \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 \\ = \frac{1}{2} (e^2 - 1)$$

$$(3) \quad \int_1^e \frac{2}{x} dx = 2 \left[\log |x| \right]_1^e = 2(\log e - \log 1) \\ = 2$$

$$(4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos x dx = 4 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = 4$$

$$(5) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{-\pi}^{\pi} \\ = 0$$

$$(6) \quad \int_0^1 (2x+1)^3 dx = \left[\frac{1}{4} (2x+1)^4 \cdot \frac{1}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{8} (3^4 - 1^4) \\ = 20$$

(7) まず、不定積分で考える。 $t = x^2 - 1$ とおくと、 $dt = 2x dx$ より、

$$\int x(x^2 - 1)^4 dx = \int xt^4 \cdot \frac{1}{2x} dt = \frac{1}{2} \int t^4 dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{10} (x^2 - 1)^5 + C$$

となるので、定積分は以下となる。

$$\int_1^2 x(x^2 - 1)^4 dx = \left[\frac{1}{10} (x^2 - 1)^5 \right]_1^2 = \frac{1}{10} \{ (2^2 - 1)^5 - (1^2 - 1)^5 \} \\ = \frac{243}{10}$$

(8) まず、不定積分で考える。 $t = \cos x$ とおくと、 $dt = -\sin x \, dx$ より、

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos^2 x \, dx &= \int \sin x \cdot t^2 \cdot \frac{1}{-\sin x} \, dt \\ &= -\frac{1}{3} t^3 + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C \\ \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x \, dx &= \left[-\frac{1}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3} (0^3 - 1^3) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(9) まず、部分積分法を使うと (問題 1.5.1.(1))、

$$\int x \sin x \, dx = (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot x' \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

なので、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= \left[-x \cos x + \sin x \right]_0^{\pi} = \{-\pi \cdot (-1) + 0\} - \{0 + 0\} \\ &= \pi\end{aligned}$$

(10) 部分積分法によって、

$$\int x e^{-x} \, dx = -e^{-x} \cdot x - \int (-e^{-x}) \cdot 1 \, dx = -(x+1)e^{-x} + C$$

となるので

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{-x} \, dx &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^1 = -2e^{-1} - \{-1 \cdot e^0\} \\ &= 1 - \frac{2}{e}\end{aligned}$$

(11) 例 1.5.3. (3) より、

$$\int x \log x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 + C$$

なので、

$$\begin{aligned}\int_1^e x \log x \, dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2 \right]_1^e \\ &= \left(\frac{1}{2} e^2 \log e - \frac{1}{4} e^2 \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 1^2 \log 1 - \frac{1}{4} \cdot 1^2 \right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(12) 絶対値を外すため、定理 2.3.1. (3) を使う。

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= 4\end{aligned}$$

(13) $t = x^2 + 1$ とすると $dt = 2x dx$ であり、不定積分は

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2x} dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 + 1} + C$$

となるので、定積分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx &= \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1 \\ &= \sqrt{2} - 1\end{aligned}$$

(14) $\cos^3 x = \cos x(1 - \sin^2 x)$ と、例 1.3.2. より

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x(1 - \sin^2 x) dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

である。よって、定積分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx &= \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

(16)

$$\int_{-2}^4 (x^3 - x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^4 = (64 - 8) - (4 - 2) = 54$$

(17)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \left[\tan^{-1} x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(18) 例 1.5.2. (2) を参考に部分積分法を用いる。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx &= \left[\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{\pi}{2}} (0 + 1) - \frac{1}{2} e^0 (1 + 0) \\ &= \frac{1}{2} (e^{\frac{\pi}{2}} - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(19) \quad \int_{-3}^3 |x| \, dx &= \int_{-3}^0 (-x) \, dx + \int_0^3 x \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-3}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 \\ &= \left\{ 0 - \left(-\frac{(-3)^2}{2} \right) \right\} + \left\{ \frac{3^2}{2} - 0 \right\} \\ &= 9\end{aligned}$$

(20) $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ に注意する。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \, dx &= \left[\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} \right]_{-1}^1 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin^{-1} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi \right) = \frac{1}{2}\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(21) \quad \int_3^4 \frac{2x+5}{x^2-x-2} \, dx &= \int_3^4 \left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) \, dx \\ &= \left[3 \log |x-2| - \log |x+1| \right]_3^4 \\ &= (3 \log 2 - \log 5) - (3 \log 1 - \log 4) \\ &= \log \frac{32}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(22) \quad \int_4^7 \frac{x^2-10x+26}{(x+2)(x-3)^2} \, dx &= \int_4^7 \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2} \right) \, dx \\ &= \left[2 \log |x+2| - \log |x-3| - \frac{1}{x-3} \right]_4^7 \\ &= \left(2 \log 9 - \log 4 - \frac{1}{4} \right) - (2 \log 6 - \log 1 - 1) \\ &= \log \frac{81}{4} - \frac{1}{4} - \log 36 + 1 \\ &= \log \frac{9}{16} + \frac{3}{4} \\ &= \left(2 \log \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right)\end{aligned}$$

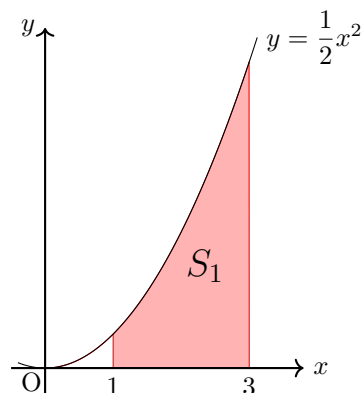
略解 2.6.2. (1) まず、関数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ の区間 $[1, 3]$ の定積分 S を求める。

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{13}{3} \end{aligned}$$

右図のとおり、関数は常に x 軸より上なので、

$$S_1 = S = \frac{13}{3}$$

である。



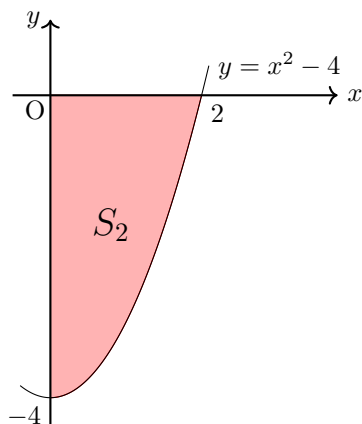
(2) (1) と同様に、 $f(x) = x^2 - 4$ の区間 $[0, 2]$ の定積分 S を求める。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (x^2 - 4) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_0^2 \\ &= -\frac{16}{3} \end{aligned}$$

右図のとおり、関数 $f(x) = x^2 - 4$ は区間 $[0, 2]$ において $f(x) \leq 0$ なので (補題 2.1.1. より)、 $S_2 = -S$ である。よって、

$$S_2 = \frac{16}{3}$$

である。

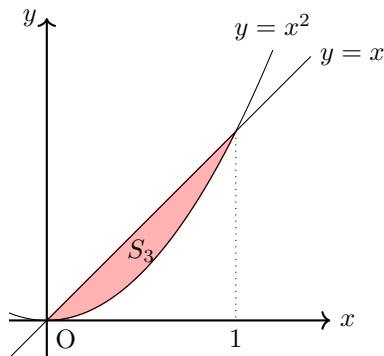


(3) まず、2つの曲線 $y = x^2$, $y = x$ の交点を求めると、 $(0, 0)$, $(1, 1)$ である。

いずれの曲線も区間 $[0, 1]$ において ≥ 0 であることに注意し、 $[0, 1]$ における $y = x^2$ と x 軸の間の面積を S , $y = x$ と x 軸の間の面積を S' とすると、 $S_3 = S' - S$ なので、

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

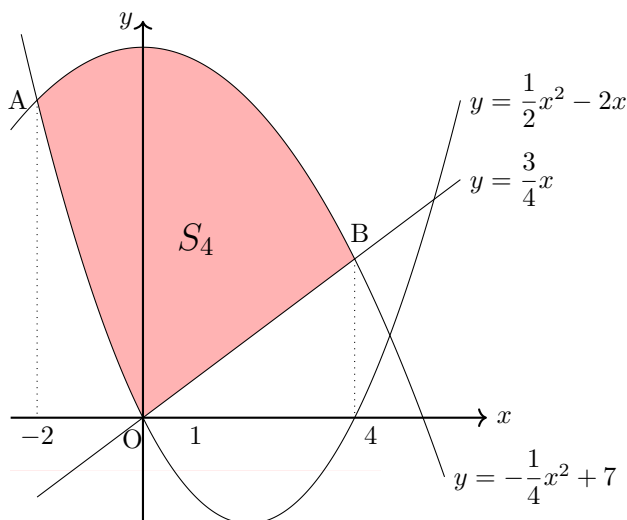
である。



(4) 3つの領域

$$y \leq -\frac{1}{4}x^2 + 7, \quad y \geq \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad y \geq \frac{3}{4}x$$

の共通部分は下図のようになる。



この領域をつくる関数の交点は、図中の

$$O(0,0), A(-2,6), B(4,3)$$

である。

図から解るように、区間 $[-2, 0]$ では $y = -\frac{1}{4}x^2 + 7$ と $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ で挟まれた部分、区間 $[0, 4]$ では $y = -\frac{1}{4}x^2 + 7$ と $y = \frac{3}{4}x$ で挟まれた部分の領域となる。

したがって、

$$\begin{aligned} S_4 &= \int_{-2}^0 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 7 \right) dx - \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) dx \\ &\quad + \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 7 \right) dx - \int_0^4 \frac{3}{4}x dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}x^3 + 7x \right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{3}{8}x^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{74}{3} \end{aligned}$$

となる。

※ なお、 $\int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx$ は $\int_{-2}^4 f(x) dx$ になる。(定積分の性質 (3))

2.7 まとめ

2.7.1 まとめのテスト MA

問題 1. 以下の有理関数を部分分数展開 (部分分数分解) せよ。

$$(1) \frac{x-7}{(x-2)(x+3)}$$

$$(2) \frac{7x-5}{x^3-x^2-x+1}$$

問題 2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) x^2 + 2x - 3$$

$$(2) \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(3) e^x - 2^x$$

$$(4) \cos 3x$$

$$(5) \tan(2x-1)$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(7) \frac{2}{4+x^2}$$

$$(8) \frac{2x}{4-x^2}$$

$$(9) \frac{7x-5}{x^3-x^2-x+1}$$

問題 3. 以下の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx \quad (2) \int_2^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad (3) \int_1^3 (e^x - 2^x) dx$$

$$(4) \int_0^\pi |\sin(2x)| dx \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x dx \quad (6) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$(7) \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2} dx \quad (8) \int_{-1}^1 \frac{2x}{4-x^2} dx \quad (9) \int_2^3 \frac{7x-5}{x^3-x^2-x+1} dx$$

問題 4. 以下の問いに答えよ。

(1) 2つの曲線 $y = \sin x, y = -\cos x$ で囲まれた領域のうち、点 $(1, 0)$ を含む領域の面積を求めよ。

(2) 3つの曲線 $y = x^2 + 2x - 1, y = -2x^2 - 7x - 1, y = -\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$ で囲まれた領域のうち、原点を含む領域の面積を求めよ。

(3) 定数 a を $-5 \leq a \leq 4$ とする。区間 $[a, a+1]$ において曲線 $y = x^2 - 25$ と x 軸の間にある領域の面積が $\frac{14}{9}$ であるとき、定数 a の値を求めよ。

2.7.2 まとめのテスト MB

問題 1. 以下の有理関数を部分分数展開 (部分分数分解) せよ。

$$(1) \frac{x+7}{(x-3)(x+2)}$$

$$(2) \frac{7x+5}{x^3+x^2-x-1}$$

問題 2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) x^2 + 2x + 3$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$(3) 2^x - e^x$$

$$(4) \sin 3x$$

$$(5) \tan(2x-1)$$

$$(6) \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$(7) \frac{2}{4+x^2}$$

$$(8) \frac{2x}{4-x^2}$$

$$(9) \frac{7x+5}{x^3+x^2-x-1}$$

問題 3. 以下の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx \quad (2) \int_2^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) dx \quad (3) \int_3^4 (2^x - e^x) dx$$

$$(4) \int_0^\pi |\cos(2x)| dx \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx \quad (6) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$(7) \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2} dx \quad (8) \int_{-1}^1 \frac{2x}{4-x^2} dx \quad (9) \int_2^3 \frac{7x+5}{x^3+x^2-x-1} dx$$

問題 4. 以下の問いに答えよ。

(1) 2つの曲線 $y = \cos x$, $y = -\sin x$ で囲まれた領域のうち、点 $(1, 0)$ を含む領域の面積を求めよ。

(2) 3つの曲線 $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 7x + 1$, $y = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{9}{2}$ で囲まれた領域のうち、原点を含む領域の面積を求めよ。

(3) 定数 a を $-5 \leq a \leq 4$ とする。区間 $[a, a+1]$ において曲線 $y = x^2 - 25$ と x 軸の間にある領域の面積が $\frac{14}{9}$ であるとき、定数 a の値を求めよ。

2.7.3 まとめのテスト MA 略解

略解 1. ヘビサイドの方法、または係数比較の方法で展開する。

$$(1) \frac{x-7}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-2}$$

$$(2) \frac{7x-5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

略解 2. 以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \int (x^2 + 2x - 3) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$$

$$(2) \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x}(x-3) + C$$

$$(3) \int (e^x - 2^x) dx = e^x - \frac{2^x}{\log 2} + C$$

$$(4) \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C$$

$$(5) \int \tan(2x-1) dx = -\frac{1}{2} \log |\cos(2x-1)| + C$$

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$(7) \int \frac{2}{4+x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C \\ = \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$(8) \int \frac{2x}{4-x^2} dx = -\log |4-x^2| + C$$

$$(9) \int \frac{7x+5}{x^3+x^2-x-1} dx = 3 \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x-1} + C$$

略解 3.

$$(1) \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_1^2 \\ = \frac{7}{3}$$

$$(2) \int_2^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x}(x-3) \right]_2^4 \\ = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_1^3 (e^x - 2^x) dx &= \left[e^x - \frac{2^x}{\log 2} \right]_1^3 \\
 &= e^3 - e - \frac{6}{\log 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_0^\pi |\sin 2x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\sin 2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot (-1) - \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \right) - \left\{ -\frac{1}{2} \cdot 1 - \left(-\frac{1}{2} \cdot (-1) \right) \right\} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x dx &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2} dx &= \left[\tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_2^{2\sqrt{3}} \\
 &= \tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} 1 \\
 &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int_{-1}^1 \frac{2x}{4-x^2} dx &= \left[-\log |4-x^2| \right]_{-1}^1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int_2^3 \frac{7x-5}{x^3-x^2-x+1} dx &= \left[3 \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{x-1} \right]_2^3 \\
 &= 3 \log \frac{3}{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

略解 4.

$$(1) 2\sqrt{2} \qquad (2) \frac{35}{6} \qquad (3) \frac{13}{3}, -\frac{16}{3}$$

2.7.4 まとめのテスト MB 略解

略解 1. ヘビサイドの方法、または係数比較の方法で展開する。

$$(1) \frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2}$$

$$(2) \frac{7x+5}{x^3+x^2-x-1} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

略解 2. 以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \int (x^2 + 2x + 3) dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + C$$

$$(2) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) dx = -\frac{2}{3}\sqrt{x}(x-3) + C$$

$$(3) \int (2^x - e^x) dx = \frac{2^x}{\log 2} - e^x + C$$

$$(4) \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

$$(5) \int \tan(2x-1) dx = -\frac{1}{2} \log |\cos(2x-1)| + C$$

$$(6) \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$(7) \int \frac{2}{4+x^2} dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{x}{2} + C \\ = \tan^{-1} \frac{x}{2} + C$$

$$(8) \int \frac{2x}{4-x^2} dx = -\log |4-x^2| + C$$

$$(9) \int \frac{7x+5}{x^3-x^2-x+1} dx = 3 \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} + C$$

略解 3.

$$(1) \int_1^2 (x^2 + 2x + 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_1^2 \\ = \frac{25}{3}$$

$$(2) \int_2^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) dx = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{x}(x-3) \right]_2^4 \\ = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_3^4 (2^x - e^x) dx &= \left[\frac{2^x}{\log 2} - e^x \right]_3^4 \\
 &= \frac{8}{\log 2} - e^4 + e^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int_0^\pi |\cos(2x)| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (-\cos(2x)) dx + \int_{\frac{3}{4}\pi}^\pi \cos(2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin(2x) \right]_{\frac{3}{4}\pi}^\pi \\
 &= \frac{1}{2} - (-1) + \frac{1}{2} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos x dx &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \left[\sin^{-1} \frac{x}{2} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2} dx &= \left[\tan^{-1} \frac{x}{2} \right]_2^{2\sqrt{3}} \\
 &= \tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} 1 \\
 &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \int_{-1}^1 \frac{2x}{4-x^2} dx &= \left[-\log |4-x^2| \right]_{-1}^1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \int_2^3 \frac{7x+5}{x^3+x^2-x-1} dx &= \left[3 \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{x+1} \right]_2^3 \\
 &= 3 \log \frac{3}{2} + \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

略解 4.

$$(1) \ 2\sqrt{2} \qquad (2) \ \frac{35}{6} \qquad (3) \ \frac{13}{3}, -\frac{16}{3}$$

2.7.5 まとめのテスト 再

問題 1. 以下の有理関数を部分分数展開 (部分分数分解) せよ。

$$(1) \frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)}$$

$$(2) \frac{x^2-3x+5}{x^3-3x^2+3x-1}$$

問題 2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) x\sqrt{x}$$

$$(2) e^{2x}$$

$$(3) \sin \frac{x}{2}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(5) \frac{1}{4-x^2}$$

問題 3. 以下の定積分を求めよ。

$$(1) \int_1^4 x\sqrt{x} dx$$

$$(2) \int_0^2 e^{2x} dx$$

$$(3) \int_0^2 |x^3-3x^2+2x| dx$$

$$(4) \int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx$$

$$(5) \int_2^4 \frac{x^2-3x+5}{x^3-3x^2+3x-1} dx$$

問題 4. 以下の問いに答えよ。

(1) 領域 $y \leq -x^2 - 2x + 3$, $x \leq 0$, $y \geq 0$ の面積を求めよ。

(2) 曲線 $y = x^2 + 4x$ と、 x 軸で囲まれた領域の面積を $y = ax$ が 2 等分している。定数 a の値を求めよ。

(3) 定数 a を $-6 \leq a \leq 4$ とする。区間 $[a, a+2]$ において曲線 $y = x^2 - 36$ と x 軸の間にある領域の面積が $\frac{59}{18}$ であるとき、定数 a の値を求めよ。なお、 $35^2 = 1225$ である。

2.7.6 まとめのテスト 再 略解

$$\text{略解 1. (1)} \quad \frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$(2) \quad \frac{x^2-3x+5}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

$$\text{略解 2. (1)} \quad \int x\sqrt{x} dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C \quad (2) \quad \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$(3) \quad \int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + C \quad (4) \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$$

$$(5) \quad \int \frac{1}{4-x^2} dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$$

$$\text{略解 3. (1)} \quad \int_1^4 x\sqrt{x} dx = \frac{62}{5}$$

$$(2) \quad \int_0^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x| dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 -(x^3 - 3x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad \int_0^\pi \sin \frac{x}{2} dx = 2$$

$$(5) \quad \int_2^4 \frac{x^2-3x+5}{x^3-3x^2+3x-1} dx = \frac{2}{3} + \log 3$$

略解 4. (1) $y = -x^2 - 2x + 3$ と x 軸との交点は $-3, 1$ である。また、区間 $[-3, 1]$ において、この関数のグラフは x 軸より上である。さらに問題の条件 $x \leq 0$ により、積分区間は $[-3, 0]$ となる。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 (-x^2 - 2x + 3) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^0 \\ &= - \left\{ -\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 - (-3)^2 + 3 \cdot (-3) \right\} = 9 \end{aligned}$$

である。

(2) まず、交点の x 座標を求める。 $x^2 + 4x = ax$ より、 $x(x+4-a) = 0$ であり、 $x = 0, a-4$ である。

次に、 $y = x^2 + 4x$ と x 軸で囲まれた面積 S を求めると、

$$S = \int_{-4}^0 |x^2 + 4x| dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{-4}^0 = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

となる。(※ $\frac{1}{6}$ 公式を使ってもよい)

したがって、 $y = x^2 + 4x$ と $y = ax$ で囲まれた部分の面積が $\frac{16}{3}$ となればよい。

$$\begin{aligned} \frac{16}{3} &= \int_{a-4}^0 \{ax - (x^2 + 4x)\} dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_{a-4}^0 \\ &= -\left(\frac{1}{2}a(a-4)^2 - \frac{1}{3}(a-4)^3 - 2(a-4)^2 \right) = -\frac{1}{6}(a-4)^3 \end{aligned}$$

となり、 $a = 4 - 2\sqrt[3]{4}$ となる。

(3) 曲線 $y = x^2 - 36$ は、区間 $[-6, 6]$ において 0 以下となるため、区間 $[a, a+2]$ における x 軸の間にある領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^{a+2} |x^2 - 36| dx = \int_a^{a+2} (36 - x^2) dx = \left[36x - \frac{1}{3}x^3 \right]_a^{a+2} \\ &= 36(a+2) - \frac{1}{3}(a+2)^3 - 36a + \frac{1}{3}a^3 = \frac{208}{3} - 2a^2 - 4a \end{aligned}$$

となる。この値が、 $\frac{59}{18}$ なので、 $\frac{208}{3} - 2a^2 - 4a = \frac{59}{18}$ を満たす a を求める。よって、

$$36a^2 + 72a - 1189 = 0$$

をとく。ここで、対称性(右図)より、 a の正の解が $\frac{q}{p}$ ならば $-\frac{q}{p} - 2 = -\frac{q+2p}{p}$ も解となる。

ここで、 $6a = x$ と置くことにより、求める方程式は

$$x^2 + 12x - 1189 = 0$$

となる。

ここで、もし解が有理数なら q と $q+2$ は 35 を挟む差が 12 の奇数同士となるので、

$$(37, 25), (39, 27), (41, 29), (43, 31), (45, 33)$$

が候補となる。

それぞれの下 1 桁の積を考えると下 1 桁が 9 となるのは、 $(41, 29)$ のみであり、代入すると成り立つことが解る。よって、 $p = 6, q = 29$ であり、求める a の値は、 $-\frac{41}{6}, \frac{29}{6}$ となる。

※ 答えが無理数の場合は解の公式が必要になるが、この手の問題では有理数で落ち着くことが多い。

