第1章

不定積分と諸定理

1.1 不定積分の基本公式

1.1.1 原始関数と不定積分

関数 $f(x)$ に対し、

$$F'(x) = f(x)$$

をみたす $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という。

※ ここで、$'$ は “プライム”、F は “キャピタル (エフ)” と読む。

例 1.1.1. 例えば

$$(x^3)' = 3x^2,\ (x^3+1)' = 3x^2$$

より、x^3 や、x^3+1 は $3x^2$ の原始関数である。

♠ **注意!** 原始関数は 1 つではない。

また、

$$F(x) = x^3,\ G(x) = x^3+1$$

とおくとき、$G(x) = F(x) + 1$ となっている。

実は、次の定理が成り立つ。

定理 1.1.1.
$F(x), G(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるとき、

$$G(x) = F(x) + C$$

となる定数 C が存在する。

証明 1.1.1. 定理を示すには、

$$\{G(x) - F(x)\}' = 0$$

を示せばよい[*1]。

ここで、$F(x), G(x)$ は $f(x)$ の原始関数より ($F(x), G(x)$ は微分可能)、

$$\{G(x) - F(x)\}' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

となる。したがって、

$$G(x) - F(x) = C : \text{定数}$$

である。 □

証明終了の意味↑

この定理より、$F(x)$ を $f(x)$ の ある 原始関数とするとき、$f(x)$ の すべて の原始関数は

$$F(x) + C$$

で表される。これを、$f(x)$ の**不定積分**といい、

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

と表す。このとき、C を**積分定数**とよぶ。

♠ **注意!** 教科書は" 積分定数を省略する" となっている。

例 1.1.2.

(1) $\int 3x^2 dx = F(x) + C = x^3 + C$ (C : 積分定数)

(2) $\int 3x^2 dx = G(x) + C_1 = x^3 \underbrace{+1} + C_1$ (C_1 : 積分定数)

↗ 1 は定数なので、$C = C_1 + 1$ と置けば、(1), (2) は同じ式となる。

不定積分を求めることを**積分する**という。

例題 1.1.1. 以下の積分をせよ (不定積分を求めよ)。

(1) $\int 4x^3 dx$　　(2) $\int 6x^2 dx$

(3) $\int x^2 dx$　　(4) $\int 1 dx$

[*1] 微分して 0 になるのは、定数のみである

1.1.2　不定積分の公式

微分の公式から、以下の不定積分の公式が得られる。

公式 1.1.1. 以下の公式が成り立つ。(ただし、各公式の C は積分定数とする)

(1) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ 　　$(\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\})$

(2) $\displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

(3) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

(4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ 　　$(a > 0, a \neq 1)$

※ ここで、$a = e$ とすると、(3) が求まる。

(5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

(6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$ 　　$(a > 0)$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$ 　　$(a \neq 0)$

(10) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + C$ 　　(ただし、$f(x)$ は微分可能な関数)

証明 1.1.2. 証明は演習問題とする。

公式 1.1.2. 以下の公式も成り立つ。(ただし、各公式の C は積分定数とする)

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ 　　$(a \neq 0)$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}} dx = \log|x + \sqrt{x^2 + A}| + C$ 　　$(A \neq 0)$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

(14) $\displaystyle\int \tan x dx = -\log|\cos x| + C$

(15) $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$

証明 1.1.3. 証明は利用する定理, 公理を紹介したとき、随時行う。

1.1.3　演習問題

問題 1.1.1. 上記公式の (2) から (10) を示すために、以下の下線部に適切な数や式を当てはめよ。ただし、積分定数 C および $\alpha \neq -1, a > 0$ などの条件は省略する。

(例) 教科書の $\underline{\ 17\ }$ ページの式 $\underline{\ (3.1)\ }$ を用いると、$\underline{\ x^{\alpha+1}\ }$ を微分すると $\underline{\ (\alpha+1)x^{\alpha}\ }$ となる。ここで、両方に $\dfrac{1}{\alpha+1}$ をかけて考えると、$\underline{\ \dfrac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}\ }$ を微分すると $\underline{\ x^{\alpha}\ }$ となるので、$\underline{\ x^{\alpha}\ }$ を積分すると $\underline{\ \dfrac{1}{\alpha+1}\cdot x^{\alpha+1}\ }$ になる。

(2) 教科書の (ア)______ ページの式 (イ)______ を用いる。

(ウ)____________ を微分すると (エ)____________ となるので、

(エ)____________ を積分すると (ウ)____________ になる。

(3) 教科書の (オ)______ ページの式 (カ)______ を用いる。

(キ)____________ を微分すると (ク)____________ となるので、

(ク)____________ を積分すると (キ)____________ になる。

(4) 教科書の (ケ)______ ページの式 (コ)______ を用いる。

(サ)____________ を微分すると (シ)____________ となる。

ここで、両方に定数 $\dfrac{1}{\log a}$ をかけて考えてみると、

(ス)____________ を微分すると (セ)____________ となるので、

(セ)____________ を積分すると (ス)____________ になる。

(5) 教科書の (ソ)______ ページの式 (タ)______ を用いる。

(チ)____________ を微分すると (ツ)____________ となるので、

(ツ)____________ を積分すると (チ)____________ になる。

(6) 教科書の (テ)____ ページの式 (ト)____ を用いる。

(ナ)____ を微分すると (ニ)____ となるので、

(ニ)____ を積分すると (ナ)____ になる。

(7) 教科書の (ヌ)____ ページの式 (ネ)____ を用いる。

(ノ)____ を微分すると (ハ)____ となるので、

(ハ)____ を積分すると (ノ)____ になる。

(8) 教科書の (ヒ)____ ページの式 (フ)____ を用いる。$\left(\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{a}$ より、

(ヘ)____ を微分すると (ホ)____ となるので、

(ホ)____ を積分すると (ヘ)____ になる。

(9) 教科書の (マ)____ ページの式 (ミ)____ を用いる。

(ム)____ を微分すると (メ)____ となる。

ここで、両方に定数 $\dfrac{1}{a}$ をかけて考えてみると、

(モ)____ を微分すると (ヤ)____ となるので、

(ヤ)____ を積分すると (モ)____ になる。

(10) 教科書の (ユ)____ ページの式 (ヨ)____ を用いる。

(ワ)____ を微分すると (ヲ)____ となるので、

(ヲ)____ を積分すると (ワ)____ になる。

1.1.4　演習問題 略解

略解 1.1.1. (2) 教科書の $\underline{45}$ ページの式 $\underline{(6.8)}$ を用いる。$\underline{\log|x|}$ を微分すると $\underline{\dfrac{1}{x}}$ となるので、$\underline{\dfrac{1}{x}}$ を積分すると $\underline{\log|x|}$ になる。

(3) 教科書の $\underline{47}$ ページの式 $\underline{(6.14)}$ を用いる。$\underline{e^x}$ を微分すると $\underline{e^x}$ となるので、$\underline{e^x}$ を積分すると $\underline{e^x}$ になる。

(4) 教科書の $\underline{46}$ ページの式 $\underline{(6.12)}$ を用いる。$\underline{a^x}$ を微分すると $\underline{a^x \log a}$ となる。よって、両方に定数 $\dfrac{1}{\log a}$ をかけて考えると、$\underline{\dfrac{1}{\log a} \cdot a^x}$ を微分すると $\underline{a^x}$ となるので、$\underline{a^x}$ を積分すると $\underline{\dfrac{1}{\log a} \cdot a^x}$ になる。

(5) 教科書の $\underline{27}$ ページの式 $\underline{(4.9)}$ を用いる。$\underline{\cos x}$ を微分すると $\underline{-\sin x}$ となるので、$\underline{\sin x}$ を積分すると $\underline{-\cos x}$ になる。

(6) 教科書の $\underline{27}$ ページの式 $\underline{(4.8)}$ を用いる。$\underline{\sin x}$ を微分すると $\underline{\cos x}$ となるので、$\underline{\cos x}$ を積分すると $\underline{\sin x}$ になる。

(7) 教科書の $\underline{27}$ ページの式 $\underline{(4.10)}$ を用いる。$\underline{\tan x}$ を微分すると $\underline{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$ となるので、$\underline{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$ を積分すると $\underline{\tan x}$ になる。

(8) 教科書の $\underline{38}$ ページの式 $\underline{(5.11)}$ を用いる。$\left(\dfrac{x}{a}\right)' = \dfrac{1}{a}$ より、$\underline{\sin^{-1}\dfrac{x}{a}}$ を微分すると $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} \cdot \dfrac{1}{a}}$ となるので、$\underline{\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}}$ を積分すると $\underline{\sin^{-1}\dfrac{x}{a}}$ になる。

(9) 教科書の $\underline{38}$ ページの式 $\underline{(5.13)}$ を用いる。$\underline{\tan^{-1}\dfrac{x}{a}}$ を微分すると $\underline{\dfrac{1}{(\frac{x}{a})^2+1} \cdot \dfrac{1}{a}}$ となる。よって、両方に定数 $\dfrac{1}{a}$ をかけて考えると、$\underline{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{(\frac{x}{a})^2+1} \cdot \dfrac{1}{a}}$ を積分すると $\underline{\dfrac{1}{a} \cdot \tan^{-1}\dfrac{x}{a}}$ になる。

(10) 教科書の $\underline{45}$ ページの式 $\underline{(6.9)}$ を用いる。$\underline{\log|f(x)|}$ を微分すると $\underline{\dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)}$ となるので、$\underline{\dfrac{f'(x)}{f(x)}}$ を積分すると $\underline{\log|f(x)|}$ になる。