1.2　不定積分の線型性と諸定理

1.2.1　不定積分の線型性

微分の線型性

- $\{f(x) \pm g(x)\}' = f'(x) \pm g'(x)$
- $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ 　　$(k \in \mathbb{R})$

と同様に、次が成り立つ。

不定積分の線型性

(1) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(2) $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ 　　$(k \in \mathbb{R})$

例 1.2.1. 以下の不定積分を考える。

(1)
$$\begin{aligned}\int (2x^2+3)dx &= \int 2x^2dx + \int 3dx\\ &= 2\int x^2dx + 3\int 1dx\\ &= \frac{2}{3}x^3 + 3x + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x}dx &= \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx\\ &= \int xdx + \int \frac{1}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2 + \log|x| + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int e^{x+2}dx &= \int e^2 \cdot e^x dx\\ &= e^2\int e^x dx\\ &= e^2 \cdot (e^x + C')\\ &= e^{x+2} + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

♡ **確認**　教科書の例も確認すること。

1.2.2　不定積分の諸定理

定理 1.2.1. 不定積分に対して、以下が成り立つ。

(1) $$\int \{f(x)\}^{\alpha} \cdot f'(x)dx = \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1, C : \text{積分定数})$$

(2) $$\int \{f(x)\}^{-1} \cdot f'(x)dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C \qquad (C : \text{積分定数})$$

(3) $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とし、$a \neq 0$ のとき、

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (C : \text{積分定数})$$

である。

証明 1.2.1. 合成関数の微分より以下は示すことができる。

(1) $\alpha \neq -1$ すなわち、$\alpha + 1 \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C\right]' &= \frac{\alpha+1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha} \cdot f'(x) \\ &= \{f(x)\}^{\alpha} \cdot f'(x).\end{aligned}$$

(2) 44 ページの式 (6.7) より、

$$\begin{aligned}\{\log|f(x)| + C\}' &= \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \{f(x)\}^{-1} \cdot f'(x).\end{aligned}$$

(3) 14 ページの (2.12) より、

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right\}' &= \frac{1}{a}f(ax+b) \cdot (ax+b)' \\ &= f(ax+b).\end{aligned}$$

□

(3) は 132 ページの式 (14.14) である。よって、(14.1)’ から (14.9)’ も示すことができる。

♠ **注意!**　公式 (定理) を使うとき、” 何が $f(x)$ か” に注意する！

(1) $\boxed{f^{\circ} \cdot f' \text{ のタイプ}}$　(2) $\boxed{f^{-1} \cdot f' \text{ のタイプ}}$　(3) $\boxed{f(ax+b) \text{ のタイプ}}$

例題 1.2.1.

(1) のタイプの例 $\boxed{\int \sin^2 x \cos x dx}$

まず、$f(x) = \sin x$ とおくと、$f'(x) = \cos x$ であるので、

$$\sin^2 x \cos x = \{\sin x\}^2 (\sin x)' = \{f(x)\}^2 f'(x)$$

である。よって、

$$\int \underset{\substack{\uparrow \\ \{f(x)\}^2}}{\underline{\sin^2 x}}\ \underset{\substack{\uparrow \\ f'(x)}}{\underline{\cos x}}\ dx = \underline{\underline{\int \{f(x)\}^2 f'(x)dx = \frac{1}{3}\{f(x)\}^3 + C}} = \frac{1}{3}\sin^3 x + C \qquad (C : \text{積分定数})$$

↑今後は省略可。

となる。

(2) のタイプの例 $\boxed{\int \frac{x}{x^2+1} dx}$

まず、$f(x) = x^2 + 1$ とおくと、$f'(x) = 2x$ であるので、

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx \left(= \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \right) = \frac{1}{2} \log |x^2 + 1| + C \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + C \qquad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

(3) のタイプの例 $\boxed{\int e^{2x+1} dx}$

まず、$f(X) = e^X$ とすると、$f(2x+1) = e^{2x+1}$ である。また、

$$F(X) = \int f(X) dX = e^X + C$$

である。すなわち、$F(2x+1) = e^{2x+1} + C$ である。よって、

$$\int e^{2x+1} dx = \underline{\underline{\int f(2x+1) dx = \frac{1}{2} F(2x+1) + C}} = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C \qquad (C : \text{積分定数})$$

↑今後は省略可。

となる。

1.2.3　演習問題

問題 1.2.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1)	$5x^4$	(2)	x^2+2x	(3)	$\dfrac{4}{\sqrt{x}}$
(4)	$3e^x+4^x$	(5)	$2\sin x+\dfrac{1}{3}\cos x$	(6)	$(2x+1)^5$
(7)	$\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	(8)	$\dfrac{1}{5x-3}$	(9)	$(2x+3)(x-4)$
(10)	$\dfrac{2x^2-5x-12}{x-4}$	(11)	$\dfrac{x-4}{2x^2-5x-12}$	(12)	$\dfrac{1}{x^2-1}$
(13)	e^{-2x}	(14)	$\sqrt{e^x}$	(15)	5^x
(16)	$\sqrt{\dfrac{1}{3}x}$	(17)	$\dfrac{1}{\sqrt{x-6}}$	(18)	$\sin 2x$
(19)	$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$	(20)	$\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$	(21)	$\dfrac{x}{2\sqrt{x}}$
(22)	$\dfrac{1}{\sqrt{4-8x}}$	(23)	$\dfrac{1}{x^2+6x+9}$	(24)	$\dfrac{1}{(2x+1)^2+9}$
(25)	$\dfrac{3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$	(26)	$(3x^2-5x+2)^2(6x-5)$	(27)	$\dfrac{6x-5}{3x^2-5x+2}$
(28)	$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$	(29)	$\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$	(30)	$\sin x\cos x$

問題 1.2.2. 積和の公式を用いて、以下の関数の不定積分を求めよ。

(1)	$\sin 3x\cos 5x$	(2)	$\sin 3x\sin 5x$	(3)	$\cos 3x\cos 5x$

問題 1.2.3. 不定積分

$$\int \sin^3 x\,dx$$

を以下の方法で求めよ。

(1) 関係式 $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ と 定理 1.2.1. (1) を用いる。

(2) 半角の公式と積和の公式を用いる。

(3) 3 倍角の公式を用いる。

1.2.4　演習問題 略解

略解 1.2.1. 不定積分の線型性 と 公式 1.1.1. および 定理 1.2.1. を用いる。また、以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1)\ \int 5x^4\,dx = 5\int x^4\,dx = 5\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} + C = x^5 + C$$

$$(2)\ \int (x^2+2x)\,dx = \int x^2\,dx + 2\int x\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + C$$

$$(3)\ \int \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 4\int \sqrt{x}^{-1}\,dx = 4\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= 4\cdot\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C = 4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = 8\sqrt{x} + C$$

$$(4)\ \int (3e^x + 4^x)\,dx = 3\int e^x\,dx + \int 4^x\,dx = 3e^x + \frac{4^x}{\log 4} + C$$

$$(5)\ \int \left(2\sin x + \frac{1}{3}\cos x\right)\,dx = 2\int \sin x\,dx + \frac{1}{3}\int\cos x\,dx = -2\cos x + \frac{1}{3}\sin x + C$$

$$(6)\ \int (2x+1)^5\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{12}(2x+1)^6 + C$$

$$(7)\ \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{3} + C$$

$$(8)\ \int \frac{1}{5x-3}\,dx = \int \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{5x-3}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\int\frac{(5x-3)'}{5x-3}\,dx = \frac{1}{5}\log|5x-3| + C$$

$$(9)\ \int (2x+3)(x-4)\,dx = \int (2x^2-5x-12)\,dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 12x + C$$

$$(10)\ \int \frac{2x^2-5x-12}{x-4}\,dx = \int\frac{(2x+3)(x-4)}{x-4}\,dx = \int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + C$$

$$(11)\ \int \frac{x-4}{2x^2-5x-12}\,dx = \int\frac{1}{2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\log|2x+3| + C$$

$$(12)\ \int\frac{1}{x^2-1}\,dx = \int\frac{1}{(x-1)(x+1)}\,dx = \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + C$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

$$(13)\ \int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C \quad (\text{定理 } 1.2.1.(3))$$

$$(14)\ \int\sqrt{e^x}\,dx = \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C = 2\sqrt{e^x} + C$$

(15) $\displaystyle\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\log 5} + C$　(公式 1.1.1.(4))

(16) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{3}x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2\sqrt{3}}{9}x\sqrt{x} + C$

(17) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-6}}\,dx = 2\sqrt{x-6} + C \qquad \left(f(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} = X^{-\frac{1}{2}},\ \Rightarrow F(X) = 2X^{\frac{1}{2}}\right)$

(18) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C \qquad (f(X) = \sin X,\ \Rightarrow F(X) = -\cos X)$

(19) $\displaystyle\int \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,dx = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$

(20) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\,dx = -\frac{2}{x} + \log|x| + C$

(21) $\displaystyle\int \frac{x}{2\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}x\sqrt{x} + C$

(22) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-8x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{1-2x} + C$　($a = -2$ に注意)

(23) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+6x+9}\,dx = \int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx = -\frac{1}{x+3} + C$

(24) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{X}{3} + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x+1}{3} + C$

$\displaystyle\left(f(X) = \frac{1}{X^2+\alpha^2},\ \Rightarrow F(X) = \frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\frac{X}{\alpha},\ \text{また } X = 2x+1 \text{ なので } a = 2\right)$

(25) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} = \int \frac{3(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{(x+1)-(x-1)}\,dx = \frac{3}{2}\int(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})\,dx$

$= (x+1)\sqrt{x+1} + (x-1)\sqrt{x-1} + C$

(26) $\displaystyle\int (3x^2-5x+2)^2(6x-5)\,dx = \frac{1}{3}(3x^2-5x+2)^3 + C$

($f(x) = 3x^2-5x+2$ と思うと、$f^2(x)f'(x)$ の形をしている。)

(27) $\displaystyle\int \frac{6x-5}{3x^2-5x+2}\,dx = \log|(3x-2)(x-1)| + C = \log|3x-2| + \log|x-1| + C$

$\displaystyle\left(f(x) = 3x^2-5x+2 \text{ と思うと、}\frac{f'(x)}{f(x)}\text{の形をしている。}\right)$

(28) $\displaystyle\int \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\,dx = -\frac{1}{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + C$

(29) $\displaystyle\int \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + C$

(30) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,dx = \int \sin x(\sin x)'\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

$\displaystyle= \int \cos x(-\cos x)'\,dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C$　(←↑どちらの答えも正しい。)

略解 1.2.2. 積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

を用いる。

(1)
$$\begin{aligned}\int \sin 3x\cos 5x\,dx &= \int \frac{1}{2}\{\sin 8x+\sin(-2x)\}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \sin 8x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx\\ &= -\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int \sin 3x\sin 5x\,dx &= \int \frac{1}{2}\{\cos 8x-\cos(-2x)\}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos 8x\,dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\\ &= -\frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int \cos 3x\cos 5x\,dx &= \int \frac{1}{2}\{\cos 8x+\cos(-2x)\}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int \cos 8x\,dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx\\ &= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

♠ **注意!** 三角関数の性質を忘れないように。

$$\sin(-x) = -\sin x,\quad \cos(-x) = \cos x$$

♠ **注意!** 三角関数の微分、積分も忘れないように。

$$(\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\sin x = \int \cos x\,dx,\quad \cos x = -\int \sin x\,dx$$

(+C 省略)

略解 1.2.3. 半角の公式は

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},\ \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

であり、3 倍角の公式は

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

である。また、3 倍角の公式から

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

がえられる。

(1)
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx \\ &= \int \sin x\,dx - \int \cos^2 x \cdot \sin x\,dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C \qquad (C：\text{積分定数})\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \sin x \cdot \cos 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sin x\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\{\sin 3x + \sin(-x)\}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot(-\cos 3x) + \frac{1}{4}\cdot(-\cos x) + C \\ &= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C \qquad (C：\text{積分定数})\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}\,dx \\ &= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C \qquad (C：\text{積分定数})\end{aligned}$$

♣ **補足**　$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ なので、(2), (3) の答えと (1) の答えは一致する。

$$\begin{aligned}-\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C &= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}(4\cos^3 x - 3\cos x) + C \\ &= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{4}\cos x + C \\ &= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C\end{aligned}$$