1.3　置換積分法 I

1.3.1　C^1 級関数

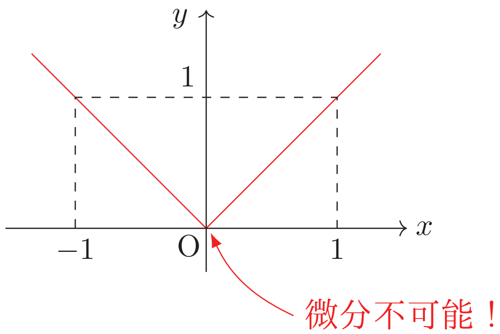
定義 1.3.1. 関数 $f(x)$ について、次を定める。

$$f(x) \text{ が } C^1 \text{ 級 (連続微分可能)} \overset{\text{def}}{\iff} f(x) \text{ が微分可能かつ } f'(x) \text{ が連続}$$

♠ **注意!**

$$f(x)\ :\ \text{微分可能} \ \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\ f(x)\ :\ \text{連続}$$

例 1.3.1. $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続であるが、微分不可能.



この関数は $x < 0, x > 0$ において、連続であることは明らかである。また、$x = 0$ において、左からの極限と右からの極限

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} |x| = 0, \qquad \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x = 0$$

が $f(0)$ と一致するので、連続である。

次に、微分の定義に従って、この関数の $x = 0$ における左極限と右極限は

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\
h < 0 \text{ なら } |h| = -h \to &= \lim_{h\to 0-0} \left(\frac{-h}{h}\right) \\
&= -1 \\
\lim_{h\to 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+0} \left(\frac{h}{h}\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

となり、一致していない。よって、この関数は微分可能ではない。

例題 1.3.1. 以下の関数は C^1 級であるか、確認せよ。

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & (x < 0) \\ \dfrac{1}{2}x^2 & (x \geqq 0) \end{cases}$$

微分の定義に従って考える。

まず、$f(x)$ は $x < 0$ において、

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{1}{2}(x+h)^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(-x - \frac{h}{2}\right) \\ &= -x \end{aligned}$$

であり、$x > 0$ においては、

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+h)^2 - \frac{1}{2}x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= x \end{aligned}$$

である。また、$x = 0$ においても、

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0-0} \frac{-\frac{1}{2}(0+h)^2 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0-0} \left(-\frac{h}{2}\right) \\ &= 0 \\ \lim_{h \to 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0+0} \frac{\frac{1}{2}(0+h)^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+0} \left(\frac{h}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、左極限の値と右極限の値が一致する。以上より、この関数 $f(x)$ は微分可能である。

また、$f'(x)$ を求めると例 1.3.1. の関数であり、連続であった。

以上より、この関数は微分可能であり、その導関数は実数全体で連続であることが解った。よって、C^1 級である。

1.3.2　置換積分法の定理

そのままでは積分が困難なとき、変数変換 (x の関数を別の変数に変換) を行うことによって積分が容易になることがある。

定理 1.3.1. (置換積分法) ある C^1 級関数 $g(x)$ により変数変換 $t = g(x)$ を行うと、

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

$$x \text{ の式} \qquad \longrightarrow \qquad t \text{ の式}$$

が成り立つ。

証明 1.3.1. $F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とする。合成関数の微分法より、

$$\frac{d}{dx}F(\underset{\substack{\parallel\\ t}}{g(x)}) \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{dF}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}}}{=} \frac{dF(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = f(t)\cdot\frac{dt}{dx} \underset{\substack{\uparrow\\ t=g(x)}}{=} f(g(x))\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

となる。

よって、

$$f(g(x))\cdot\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}F(g(x))$$

の両辺に $\displaystyle\int$ と dx をつけると、

$$\begin{aligned}\int f(g(x))\cdot\frac{dg(x)}{dx}dx &= \int \frac{d}{dx}F(g(x))dx\\ &= F(g(x)) + C\\ &= F(t) + C\\ &= \int f(t)dt\end{aligned}$$

となる。 □

♡ **point**　変数変換の方法は 1 通りとは限らないことも多々ある。まずは、例を見て感覚を身に着けよう。

1.3.3　置換積分法の例

例 **1.3.2.**

$$\int \sin^2 x \cos x dx$$

まず $t = \sin x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$ である$^{\heartsuit}$。よって、

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos x &= \int t^2 \boxed{\cos x dx}^{\heartsuit} = \int t^2 \boxed{dt} \\ &= \frac{t^3}{3} + C \\ &= \frac{\sin^3 x}{3} + C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

↰ x に戻すのを忘れない!

♡ **point**　$dt = \cos x dx$ と形式的に考える。

例 **1.3.3.**

$$\int \tan x \, dx$$

まず、

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

なので、$t = \cos x$ とおく。このとき、$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$ となるので、$dx = -\dfrac{1}{\sin x} dt$ とすることによって、

$$\begin{aligned}\int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{t} \left(-\frac{1}{\sin x} \right) dt \\ &= -\int \frac{1}{t} dt \\ &= -\log |t| + C \\ &= -\log |\cos x| + C\end{aligned}$$

をえる。

例 1.3.4.

$$\int x\sqrt{x+1}dx$$

まず、$t=\sqrt{x+1}$ とおき、両辺を 2 乗すると、$t^2=x+1$ より、$x=t^2-1$ である。

両辺を t で微分すると、$\dfrac{dx}{dt}=2t$ となるので、$dx=2tdt$ とすることによって、

$$\begin{aligned}\int x\underline{\sqrt{x+1}}\,\boxed{dx} &= \int \utilde{x}\,\underline{t}\,\boxed{2tdt}\end{aligned}$$

x が残らないように.

$$\begin{aligned}&= \int (t^2-1)\cdot 2t^2dt \\ &= 2\int (t^4-t^2)dt \\ &= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}+C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

をえる。

例 1.3.5.

$$\int \frac{2x^3}{x^2+1}dx$$

まず、$t=x^2+1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=2x$ となるので、$dx=\dfrac{1}{2x}dt$ である。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3}{x^2+1}dx &= \int \frac{2x^3}{t}\cdot\frac{1}{2x}dt \\ &= \int \frac{x^2}{t}dt \\ &= \int \frac{t-1}{t}dt \\ &= \int 1\,dt - \int \frac{1}{t}dt \\ &= t-\log|t|+C \\ &= x^2+1-\log(x^2+1)+C' \qquad (C'：積分定数) \\ &= x^2-\log(x^2+1)+C \qquad (C：積分定数)\end{aligned}$$

をえる。

1.3.4　演習問題

問題 1.3.1. (復習)　以下の関数 (1)〜(6) において、C^1 級関数をすべて選べ。

(1) $f(x) = e^x$　　(2) $f(x) = x|x|$

(3) $f(x) = \sin x$　　(4) $f(x) = |\sin x|$

(5) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　　(6) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$

問題 1.3.2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(1+x)^3$　　(2) $(2-x)^4$

(3) $(2x-1)^4$　　(4) $\left(\dfrac{x+1}{3}\right)^5$

(5) $\left(\dfrac{2-2x}{3}\right)^5$　　(6) $\dfrac{1}{(2x+1)^2}$

(7) $\cos(2x+1)$　　(8) $\sin(3x+1)$

(9) $\tan(4x+1)$　　(10) $\sin(5x+1)\cos(5x+1)$

問題 1.3.3. 以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、$\underline{a \neq 0}$ とする。

(1) $\dfrac{x^5}{1+2x^6}$　　(2) $\dfrac{4x}{\sqrt{3+5x^2}}$

(3) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}}$　　(4) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(5) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$　　(6) $\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}$

(7) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$　　(8) $\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$

問題 1.3.4. 定理 1.2.1. を置換積分の方法で証明せよ。

1.3.5　演習問題 略解

略解 1.3.1. 微分の定義 10 ページの式 (2.3) に従うと、(4) 以外は微分可能であるが、(5) は導関数が連続で無いので、C^1 級は (1), (2), (3), (6) である。

$$(4)\qquad \lim_{h\to+0}\frac{|\sin(0+h)|-|\sin(0)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|\sin h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{|\sin(0+h)|-|\sin(0)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|\sin h|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{-h}=-1$$

(5) [ア]　微分可能であることの確認

i) まず、$x=0$ で微分係数を考える。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0=f'(0)$$

※ 最後は、$-1\leqq\sin\frac{1}{h}\leqq 1$ なので、はさみうちの原理より。

ii) $x\neq 0$ においては、

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

である。

[イ]　導関数が連続でないことの確認

上記 i) より、$f'(0)=0$ である。

また、ii) より

$$\lim_{h\to 0}f'(h)=\lim_{h\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

である。このとき、

$$\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

は振動するため、連続ではない。

略解 1.3.2. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t=1+x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=1\ \Rightarrow\ dx=dt$ となる。よって、

$$\int(1+x)^3\,dx=\int t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(1+x)^4+C$$

である。

(2) $t = 2 - x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -1 \;\Rightarrow\; dx = -1dt$ となる。よって、

$$\int (2-x)^4\,dx = \int t^4 \cdot (-1)\,dx = -\frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{5}(2-x)^5 + C$$

である。

(3) $t = 2x - 1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{2}\,dt$ となる。よって、

$$\int (2x-1)^4\,dx = \int t^4 \cdot \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{10}(2x-1)^5 + C$$

である。

(4) $t = \dfrac{x+1}{3}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; dx = 3\,dt$ となる。よって、

$$\int \left(\frac{x+1}{3}\right)^5 dx = \int t^5 \cdot 3dt = 3\cdot\frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{3}\right)^6 + C$$

である。

(5) $t = \dfrac{2-2x}{3}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{2}{3} \;\Rightarrow\; dx = -\dfrac{3}{2}\,dt$ となる。よって、

$$\int \left(\frac{2-2x}{3}\right)^5 dx = \int t^5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) dt = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}t^6 + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2-2x}{3}\right)^6 + C$$

である。

(6) $t = 2x + 1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{2}\,dt$ となる。よって、

$$\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot(-1)t^{-1} + C = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x+1} + C$$

である。

(7) $t = 2x + 1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{2}\,dt$ となる。よって、

$$\int \cos(2x+1)\,dx = \int (\cos t)\cdot\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C$$

である。

(8) $t = 3x + 1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 3 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{3}\,dt$ となる。よって、

$$\int \sin(3x+1)\,dx = \int (\sin t)\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot(-\cos t) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C$$

である。

(9) $t = 4x + 1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 4 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{4}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \tan(4x+1)\,dx &= \int (\tan t)\cdot\frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}\,(-\log|\cos t|) + C\\ &= -\frac{1}{4}\log|\cos(4x+1)| + C\end{aligned}$$

である。

(10) 2 倍角の公式 $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$ を使う。

$$\sin(5x+1)\cos(5x+1) = \frac{1}{2}\cdot 2\sin(5x+1)\cos(5x+1) = \frac{1}{2}\sin(2(5x+1))$$

ここで $t = 10x + 2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 10 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{10}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \sin(5x+1)\cos(5x+1)\,dx &= \int \frac{1}{20}\sin t\,dt = \frac{1}{20}(-\cos t) + C\\ &= -\frac{1}{20}\cos(10x+2) + C\end{aligned}$$

である。

略解 1.3.3. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = 1 + 2x^6$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 12x^5 \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{12x^5}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{1+2x^6}\,dx &= \int \frac{x^5}{t}\cdot\frac{1}{12x^5}\,dt = \frac{1}{12}\int\frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{12}\log|t| + C\\ &= \frac{1}{12}\log(1+2x^6) + C\end{aligned}$$

である。

(2) $t = 3 + 5x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 10x \;\Rightarrow\; dx = \dfrac{1}{10x}\,dt$ となる。よって、

$$\int \frac{4x}{\sqrt{3+5x^2}}\,dx = \int \frac{4x}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{10x}\,dt = \frac{2}{5}\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{5}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{4}{5}\sqrt{3+5x^2} + C$$

である。

(3) $t = x + 2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; dx = dt$ となる。また、$x + 1 = t - 1$ より、

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}\,dx &= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \sqrt{t}\,dt - \int\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C\\ &= \frac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + C = \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x+2} + C\end{aligned}$$

である。

(4) $t = 1 - x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -2x \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{1}{2x}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-2t^{\frac{1}{2}}\right) + C = -\sqrt{t} + C \\ &= -\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

である。

(5) $t = 1 - x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -2x \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{1}{2x}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{x^3}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1-t}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt \overset{(3)}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}\sqrt{t}(t-3) + C \\ &= -\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

である。

(6) $t = 1 - x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -2x \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{1}{2x}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{x^5}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right)\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{x^4}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{t^2-2t+1}{\sqrt{t}}\,dt = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{3}{2}}\,dt + \int t^{\frac{1}{2}}\,dt - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= -\frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t}\left\{-\frac{1}{5}t^2 + \frac{2}{3}t - 1\right\} + C \\ &= -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left\{3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\right\} + C\end{aligned}$$

である。

(7) まず、$\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{|1+x|}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ であり、$t = 1 - x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -2x \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{1}{2x}\,dt$ となる。よって、

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

となり、前者は公式より求まる。よって、

$$(\text{与式}) = \sin^{-1} x - \sqrt{t} + C = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$$

である。

(8) $t = ax + b$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = a \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{1}{a}\,dt$ となる。よって、

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{a} dt = \frac{2}{a}\sqrt{t} + C = \frac{2}{a}\sqrt{ax+b} + C$$

である。

略解 1.3.4. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = f(x)$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = f'(x) \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{1}{f'(x)}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \{f(x)\}^{\alpha} \cdot f'(x) dx &= \int t^{\alpha} \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{f'(x)}\,dt \\ &= \int t^{\alpha}\,dt \\ &= \frac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1} + C\end{aligned}$$

である。

(2) $t = f(x)$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = f'(x) \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{1}{f'(x)}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \{f(x)\}^{-1} \cdot f'(x) dx &= \int t^{-1} \cdot f'(x) \cdot \frac{1}{f'(x)}\,dt \\ &= \int t^{-1}\,dt \\ &= \log|f(x)| + C\end{aligned}$$

である。

(3) $t = ax + b$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = a \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{1}{a}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int f(ax+b) dx &= \int f(t) \cdot \frac{1}{a}\,dt \\ &= \frac{1}{a}\int f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{a}F(t) + C \\ &= \frac{1}{a}F(ax+b) + C\end{aligned}$$

である。