1.4　置換積分法 II

1.4.1　置換積分法の考え方

♠ **重要**　『置換積分法の変数変換は一通りではない』ので、覚えるだけでないく、試してみることも大事。

例 1.4.1. 次の積分を 2 通りの置換積分で考える。

$$\int \frac{x}{\sqrt{5-x}}\,dx$$

(i) まず、$t=5-x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=-1$ であり、$dx=(-1)dt,\ x=5-t$ より、

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{5-t}{\sqrt{t}}\cdot(-1)\,dt \\
&= \int\left(\sqrt{t}-\frac{5}{\sqrt{t}}\right)dt \\
&= \int\left(t^{\frac{1}{2}}-5t^{-\frac{1}{2}}\right)dt \\
&= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-5\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C \\
&= \frac{2}{3}(5-x)\sqrt{5-x}-10\sqrt{5-x}+C\,. \qquad (C:\text{積分定数})
\end{aligned}$$

である。

(ii) 今度は、$t=\sqrt{5-x}$ とおくと、$x=5-t^2$ であり、

$$\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5-x}}=-\frac{1}{2t}$$

となり、$dx=-2t\,dt$ である。よって、

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{5-t^2}{t}\cdot(-2t)\,dt \\
&= \int(2t^2-10)\,dt \\
&= \frac{2}{3}t^3-10t+C \\
&= \frac{2}{3}(5-x)\sqrt{5-x}-10\sqrt{5-x}+C\,. \qquad (C:\text{積分定数})
\end{aligned}$$

である。

※ いずれの場合も、$-\dfrac{2}{3}(x+10)\sqrt{5-x}+C$ と、まとめてもよい。

1.4.2　特殊な置換積分法

例 **1.4.2.**

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx \qquad (a > 0)$$

まず $x = a\sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき $\frac{dx}{dt} = a\cos t \quad (dx = a\cos t dt)$ より

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\boxed{dx} = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,\boxed{a\cos t dt}$$

である。ここで $\sqrt{x^2} = |x|$ に注意して計算すると、

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} &= \sqrt{a^2(1 - \sin^2 t)} \\
&= |a|\sqrt{1 - \sin^2 t} \\
&= a\sqrt{\cos^2 t} \\
&= a|\cos t| \\
\overset{(*)}{} &= a\cos t
\end{aligned}$$

となる。

(∗)　t の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ なので、$\cos t \geqq 0$ より。

よって、

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= a^2 \int \cos^2 t dt \\
\text{半角の公式} \rightarrow &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C \\
\text{倍角の公式} \rightarrow &= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\cdot 2\,\underline{\sin t}\,\underline{\cos t}\right) + C \\
\sin t = \frac{x}{a} \rightarrow &= \frac{a^2}{2}\left(t + \underline{\frac{x}{a}}\,\underline{\sqrt{1 - \sin^2 t}}\right) + C \\
\overset{(**)}{} &= \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C \qquad (C：\text{積分定数})
\end{aligned}$$

(∗∗)　t の範囲は $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ なので、$t = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ である。

例 1.4.3.

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$$

まず $x = a\tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{a}{\cos^2 t}$ より、$dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt$ である。

よって、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+a^2}dx &= \int \frac{1}{a^2}\frac{1}{\tan^2 t+1}dx \\ &= \int \frac{1}{a^2}\cos^2 t dx \\ &= \int \frac{1}{a^2}\cos^2 t \frac{a}{\cos^2 t}dt \\ &= \int \frac{1}{a}dt \\ &= \frac{t}{a}+C \\ &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C \qquad (C:\text{積分定数})\end{aligned}$$

である。

例 1.4.4.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx \qquad (a \neq 0)$$

まず、$t = x + \sqrt{x^2+a}$ とおく (なぜこうおくか、各自で)。このとき、

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= 1 + \frac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}} \\ &= \frac{t}{\sqrt{x^2+a}}\end{aligned}$$

であり、$dx = \dfrac{\sqrt{x^2+a}}{t}\,dt$ である。よって、

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\frac{\sqrt{x^2+a}}{t}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt \\ &= \log|t|+C \\ &= \log|x+\sqrt{x^2+a}|+C \qquad (C:\text{積分定数})\end{aligned}$$

である。

例 1.4.5.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

ここでは、$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおく。また、2 倍角の公式を用いて、$\cos x$ を計算すると、

$$\cos x = \cos 2\cdot\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

と表すことが出来る。さらに、

$$\begin{aligned}
\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} &= \cos^2\frac{x}{2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\\
&= \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\\
&= \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)\\
\tan\frac{x}{2}=t \ \rightarrow &= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \left(\tan\frac{x}{2}\right)' = \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)
\end{aligned}$$

となることより、$dt = \dfrac{1+t^2}{2}dx \quad\Rightarrow\quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$ である。

以上より、

$$\begin{aligned}
\int\frac{1}{\cos x}\,dx &= \int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\
&= \int\frac{2}{1-t^2}\,dt\\
&= \int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt\\
u=1-t\ \text{とおいて考える}\ \rightarrow &= \log|1+t| + (-1)\log|1-t| + C\\
&= \log\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C\\
&= \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C \qquad (C:\ \text{積分定数})
\end{aligned}$$

となる。

1.4.3　置換積分のまとめ

三角関数、無理関数を含むを含む関数の積分を行うと、き、置換法をまとめて表にする。表の $f([X, Y])$ は、2 変数関数ではなく、X と Y を含む関数を意味している。

	被積分関数	置換法
三角関数	(1) $f(\sin x)\cos x$	$t = \sin x$
	(2) $f(\cos x)\sin x$	$t = \cos x$
	(3) $f\left([\sin^2 x, \cos^2 x]\right)$	$t = \tan x, \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2},\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$
	(4) $f\left([\sin x, \cos x]\right)$	$t = \tan\dfrac{x}{2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{1+t^2}$
無理関数	(5) $f\left([x, \sqrt[n]{ax+b}]\right) \quad (a \neq 0)$	$t = \sqrt[n]{ax+b}$
	(6) $f\left(\left[x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right]\right)$ $(ad - bc \neq 0)$	$t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$
	(7) $f\left([x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,]\right)$ $(a \neq 0, D = b^2 - 4ac \neq 0)$	(i) $a > 0$ のとき $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x$ (ii) $a < 0, D > 0$ のとき $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ $t = \sqrt{\dfrac{x-\alpha}{\beta-x}}, \quad (\alpha < \beta)$
	(8) $f([x, \sqrt{a^2-x^2}]) \ \ (a > 0)$	$x = a\sin\theta,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$
	(9) $f([x, \sqrt{x^2+a^2}]) \ \ (a > 0)$	$x = a\tan\theta,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$
	(10) $f([x, \sqrt{x^2-a^2}]) \ \ (a > 0)$	$x = a\sec\theta,\ \left(0 \leqq \theta \leqq \pi, \theta \neq \dfrac{\pi}{2}\right)$
指数関数	(11) $f(e^x)e^x$	$t = e^x$
対数関数	(12) $f\left(a\log x + b\right)\dfrac{1}{x}$	$t = a\log x + b$

1.4.4　演習問題

問題 1.4.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2-3x)^n \quad (n \in \mathbb{Z} - \{-1\})$　　(2) $\dfrac{1}{x^2-2x+5}$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{5x-x^2}}$　　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{7x-3}}$

(5) xe^{-x^2}　　(6) $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

(7) $x(x^2-3)^5$　　(8) $(3x^2+2)(x^3+2x+1)^4$

(9) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$　　(10) $\dfrac{3x}{\sqrt{1-x^4}}$　(ヒント : $t=x^2$)

(11) $\dfrac{x^2}{x^6-1}$　(ヒント : $t=x^3$)　　(12) $\dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$　(ヒント : $x=\tan t$)

問題 1.4.2. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1+\cos x}$　　(2) $\dfrac{1}{2+\cos x}$

(3) $\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$　　(4) $\dfrac{1}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

(5) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}$　　(6) $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$

(7) $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}$　　(8) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(9) $\dfrac{\sqrt{1+\log x}}{x}$　　(10) $\dfrac{1}{\sqrt{e^{3x}+4}}$

問題 1.4.3. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{2x+5}{x^2-2x+4}$　　(2) $\dfrac{3x+5}{\sqrt{1-x-2x^2}}$

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$　　(4) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

問題 1.4.4. 例 1.4.5 の値は、以下と同じであることを確認せよ。

$$\log\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|+C,\quad \log\frac{1+\sin x}{|\cos x|}+C \ \text{や}\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C$$

ちなみに、最後の式は、$\cos x \neq 0$ より、$-1<\sin x<1$ であり、絶対値が外れる。

1.4.5　演習問題 略解

略解 1.4.1. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) $t = 2 - 3x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -3 \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{1}{3}dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int (2-3x)^n\,dx &= \int t^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)dt \\ \textcolor{red}{n \neq -1 \text{ より} \rightarrow} &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \\ &= -\frac{1}{3(n+1)}\cdot(2-3x)^{n+1} + C\end{aligned}$$

となる。

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,dx$ となる。ここで、$t = x-1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 1 \ \Rightarrow\ dx = dt$ となる。よって、公式を用いると、

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{t^2+2^2}\,dt = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-1}{2} + C$$

となる。

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5x - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{5}{2}\right)^2}}\,dx$ となる。$t = x - \dfrac{5}{2}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 1 \ \Rightarrow\ dx = dt$ となる。よって、公式を用いると、

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{5x-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - t^2}}\,dt = \sin^{-1}\frac{t}{\frac{5}{2}} + C = \sin^{-1}\frac{2}{5}t + C \\ &= \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}x - 1\right) + C\end{aligned}$$

となる。

♣ 補足 $\sin^{-1}(-\theta) = -\sin^{-1}\theta$ なので、$t = \dfrac{5}{2} - x$ とおいても同じ結果になる。

(4) $t = 7x - 3$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 7 \ \Rightarrow\ dx = \dfrac{1}{7}dt$ となる。よって、

$$\int \frac{1}{\sqrt{7x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{7}\,dt = \frac{1}{7}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{2}{7}\sqrt{7x-3} + C$$

となる。

(5) $t=-x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=-2x \ \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{-2x}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int xe^{-x^2}\,dx &= \int xe^t\cdot\frac{1}{-2x}\,dt = -\frac{1}{2}\int e^t\,dt = -\frac{1}{2}e^t + C\\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C\end{aligned}$$

となる。

(6) $t=e^x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=e^x \ \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{e^x}\,dt=\dfrac{1}{t}\,dt$ となる。よって、

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}\,dx=\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \qquad (*)$$

となる。ここで再び、$u=1+t^2$ とおくと、$\dfrac{du}{dt}=2t \ \Rightarrow\ dt=\dfrac{1}{2t}\,du$ となる。従って、

$$\begin{aligned}(*) &= \int\frac{t}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2t}\,du=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du=\sqrt{u}+C=\sqrt{1+t^2}+C\\ &= \sqrt{1+e^{2x}}+C\end{aligned}$$

となる。

♣ **補足** ちなみに、$t=1+e^{2x}$ とおいても同じ結果になる。2 段階の例としての紹介。

(7) $t=x^2-3$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=2x \ \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{2x}dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int x(x^2-3)^5\,dx &= \int xt^5\cdot\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2}\int t^5\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}t^6+C\\ &= \frac{1}{12}(x^2-3)^6+C\end{aligned}$$

となる。

(8) $t=x^3+2x+1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=3x^2+2 \Rightarrow\ dx=\dfrac{1}{3x^2+2}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int(3x^2+2)(x^3+2x+1)^4\,dx &= \int t^4\,dt=\frac{1}{5}t^5+C\\ &= \frac{1}{5}(x^3+2x+1)^5+C\end{aligned}$$

となる。

(9) $x = \sin\theta$ とおくと、$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta \ \Rightarrow \ dx = \cos\theta\, d\theta$ となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cdot \cos\theta\, d\theta \\
&= \int \frac{\sin^2\theta}{|\cos\theta|} \cdot \cos\theta\, d\theta \\
-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \to &= \int \sin^2\theta\, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2\theta + C \\
&= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \cdot 2\sin\theta\cos\theta + C \\
\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} \to &= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}
$$

となる。

(10) $t = x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 2x \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{1}{2x}\,dt$ となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx &= \int \frac{3x}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{1}{2x}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\
&= \frac{3}{2}\sin^{-1}t + C \\
&= \frac{3}{2}\sin^{-1}x^2 + C
\end{aligned}
$$

となる。

(11) $t = x^3$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 3x^2 \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{1}{3x^2}\,dt$ となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx &= \int \frac{x^2}{t^2-1} \cdot \frac{1}{3x^2}\,dt \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2-1}\,dt \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\log\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{6}\log\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

となる。※ 最初の解答例で、x^3 の部分が x になっていました。

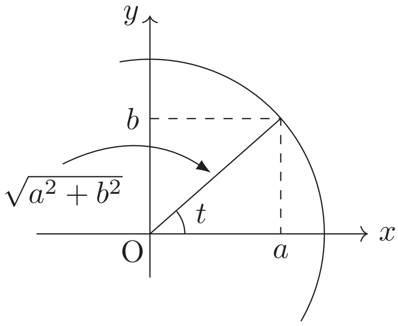
(12) $x = \tan t$ $(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$ とおくと、$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int \left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^{-\frac{3}{2}} dx \\
&= \int (\cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\,dt = \int \cos t\,dt
\end{aligned}$$

$\uparrow$
$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ より $\cos t > 0.$

$$= \sin t + C \qquad \cdots (*)$$

である。$x = \tan t$ とおいたので、下図より



$\tan t = \dfrac{b}{a} = x \Rightarrow b = ax$ と表すことが出来る。ただし、$a > 0$ である。

よって、$\sin t = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+a^2x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ であり、

$$(*) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

となる。($b < 0$ の場合も同様)

略解 1.4.2. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) 三角関数 (4) を使う。 $t = \tan \dfrac{x}{2}$ とおくと、$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ である。よって、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int 1\,dt \\
&= t + C \\
&= \tan \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$

となる。

(2) (1) と同様に考えると、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2+\cos x}\,dx &= \int \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{2(1+t^2)+1-t^2}\,dt \\
&= \int \frac{2}{3+t^2}\,dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

となる。

(3) 三角関数 (1) を使う。 $t = \sin x$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = \cos x \ \Rightarrow\ dx = \dfrac{1}{\cos x}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{\cos x}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\cos x}\,dt \\
&= \int \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \tan^{-1} t + C \\
&= \tan^{-1} \sin x + C
\end{aligned}$$

となる。

(4) 三角関数 (3) を使う。$t = \tan x$ とおくと、$\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{1+t^2}$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}\,dx &= \int \frac{1}{\dfrac{1}{1+t^2} + \dfrac{4t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{1+4t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2} \tan^{-1} 2t + C
\end{aligned}$$

となる。

(5) 無理関数 (5) を使う。$t=\sqrt[3]{x+1}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx&=\int\frac{1}{1+t}\cdot 3t^2\,dt=3\int\left\{t-1+\frac{1}{1+t}\right\}dt\\&=3\left(\frac{1}{2}t^2-t+\log|1+t|\right)+C\\&=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-3\sqrt[3]{x+1}+3\log|1+\sqrt[3]{x+1}|+C\end{aligned}$$

となる。

(6) $(x-1)(2-x)=-(x-1)(x-2)$ であり、無理関数 (7) (ii) に当てはめると、$a=-1,\ \alpha=1,\ \beta=2$ となる。よって、$t=\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}$ とおくと、

$$t^2=\frac{x-1}{2-x}\ \Rightarrow\ x=\frac{2t^2+1}{t^2+1}\ \Rightarrow\ \frac{dx}{dt}=\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

である。また、x を消去するために、$2-x$ を t で表すと、$2-x=\dfrac{1}{t^2+1}$ となるので、それぞれ代入して計算すると

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}\,dx&=\int\frac{1}{(2-x)\sqrt{\dfrac{x-1}{2-x}}}\,dx\\&=\int\frac{1}{\dfrac{1}{t^2+1}\cdot t}\cdot\frac{2t}{(t^2+1)^2}\,dt\\&=2\int\frac{1}{t^2+1}\,dt\\&=2\tan^{-1}t+C\\&=2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}+C\end{aligned}$$

となる。

(7) 無理関数 (7) (i) に当てはめる。まず、$t=\sqrt{x^2-4x-2}+\sqrt{1}\,x$ とおき、$t-x=\sqrt{x^2-4x-2}$ の両辺を 2 乗して考えると、

$$t^2-2tx+x^2=x^2-4x-2\ \Rightarrow\ x=\frac{t^2+2}{2t-4},\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-4t-2}{(t-2)^2}$$

となる。

また、x を消去するために、$\sqrt{x^2-4x-2}$ と $x-1$ を計算すると

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4x-2} &= t-x = t-\frac{t^2+2}{2t-4}\\ &= \frac{t^2-4t-2}{2(t-2)},\\ x-1 &= \frac{t^2-2t+6}{2(t-2)}\end{aligned}$$

をえる。したがって、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-4x-2}}\,dx &= \int\frac{2(t-2)}{t^2-2t+6}\cdot\frac{2(t-2)}{t^2-4t-2}\cdot\frac{t^2-4t-2}{2(t-2)^2}\,dt\\ &= \int\frac{2}{t^2-2t+6}\,dt\\ &= \int\frac{2}{(t-1)^2+5}\,dt\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{t-1}{\sqrt{5}}+C\\ &= \frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4x-2}+x-1}{\sqrt{5}}+C\end{aligned}$$

となる。

(8) $t=e^x$ とおく。より、$t=e^x+e^{-x}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=e^x-e^{-1} \Rightarrow dx=\dfrac{1}{e^x-e^{-x}}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx &= \int\frac{e^x-e^{-x}}{t}\cdot\frac{1}{e^x-e^{-x}}\,dt\\ &= \int\frac{1}{t}\,dt\\ &= \log|t|+C\\ &= \log(e^x+e^{-x})+C\end{aligned}$$

となる。

(9) $t=\log x+1$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x} \Rightarrow dx=xdt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx &= \int\frac{\sqrt{t}}{x}\cdot x\,dt\\ &= \int\sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\ &= \frac{2}{3}(\log x+1)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

となる。

(10) $t=\sqrt{e^{3x}+4}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+4}} \;\Rightarrow\; dx=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{e^{3x}+4}}{e^{3x}}\,dt$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{e^{3x}+4}}\,dx &= \int\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e^{3x}}\,dt\\ &= \frac{2}{3}\int\frac{1}{t^2-4}\,dt\\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C\\ &= \frac{1}{6}\log\frac{\sqrt{e^{3x}+4}-2}{\sqrt{e^{3x}+4}+2}+C\end{aligned}$$

となる。

略解 1.4.3. 以下の C はすべて積分定数とする。

(1) まず、$t=x^2-2x+4$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=2x-2$ となる。そこで、

$$\int\frac{2x+5}{x^2-2x+4}\,dx=\underbrace{\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx}_{(\text{ア})}+\underbrace{\int\frac{7}{x^2-2x+4}\,dx}_{(\text{イ})}$$

と分ける。

このとき、

$$\begin{aligned}(\text{ア})&=\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx=\int\frac{2x-2}{t}\cdot\frac{1}{2x-2}\,dt=\int\frac{1}{t}\,dt\\ &=\log|t|+C_1\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}(\text{イ})&=\int\frac{7}{x^2-2x+4}\,dx=7\int\frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx\\ &=\frac{7}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C_2\end{aligned}$$

となるので、合わせると、

$$\int\frac{2x+5}{x^2-2x+4}\,dx=\log|x^2-2x+4|+\frac{7}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$

である。

(2) まず、$t=1-x-2x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=-1-4x$ となる。そこで、

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx = -\frac{3}{4}\int \frac{-1-4x}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx + \frac{17}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx$$

と分けると、前者は

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{4}\int \frac{-1-4x}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx &= -\frac{3}{4}\int \frac{-1-4x}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{-1-4x}\,dt = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\
&= -\frac{3}{2}\sqrt{t}+C_1
\end{aligned}$$

であり、後者は

$$\begin{aligned}
\frac{17}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx &= \frac{17}{4}\int \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{16}-\left(\dfrac{1}{4}+x\right)^2}}\,dx \\
&= \frac{17}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{1+4x}{3}\right)+C_2
\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\int \frac{3x+5}{\sqrt{1-x-2x^2}}\,dx = -\frac{3}{2}\sqrt{1-x-2x^2}+\frac{17}{4\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{1+4x}{3}\right)+C$$

となる。

(3) まず、$t=x^2-2x+3$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx}=2x-2$ となる。そこで、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$$

と分けると、前者は

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2x-2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t}+C_1$$

であり、後者は

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2}}\,dx = \log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C_2$$

である。以上より、

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx = \sqrt{x^2-2x+3}+\log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right|+C$$

である。

(4) $t = 1 - x^2$ とおいても良いが、一気に $t = \sqrt{1-x^2}$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ であり、$dx = -\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,dt$ となる。よって、

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-\sqrt{1-x^2}}{x}\,dt \\
&= -\int \frac{1}{x^2}\,dt \\
&= -\int \frac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

となる。

略解 1.4.4. 積分定数は省略して計算をする。

$$
\begin{aligned}
\log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| &= \log\left|\frac{1+\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}\right| = \log\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right| \\
&= \log\left|\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right)\cdot\left(\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}\right)\right| \\
&= \log\left|\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}\right| \qquad (*)
\end{aligned}
$$

ここで、$\sin^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2} = 1,\quad \sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2},\quad \cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2}$ を用いると、

$$
(*) = \log\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = \log\frac{1+\sin x}{|\cos x|} \qquad (**)
$$

また、$|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)}$ より、

$$
\begin{aligned}
(**) &= \log\frac{1+\sin x}{\sqrt{1-\sin x}\cdot\sqrt{1+\sin x}} \\
&= \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \\
&= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)
\end{aligned}
$$

となる。