1.5　部分積分法

1.5.1　部分積分法の定理

定理 1.5.1. (**部分積分法**)
$f(x)$ を連続関数、$g(x)$ を C^1 級関数とし、$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする。このとき、

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx + C \qquad (C：積分定数)$$

が成り立つ。

証明 1.5.1. 積の微分の公式より

$$\begin{aligned}\{F(x)g(x)\}' &= F'(x)g(x) + F(x)g'(x)\\ &= f(x)g(x) + F(x)g'(x)\end{aligned}$$

である。よって、

$$\int \{f(x)g(x) + F(x)g'(x)\}\,dx = F(x)g(x) + C$$

である。この左辺は

$$左辺 = \int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx$$

より、

$$\int f(x)g(x)dx + \int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x) + C$$

なので、

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx + C$$

である。 □

♡ **point** ＜覚え方＞ユー積ブイ、マイン、ユー積ブイ、ピー！

$$\int uvdx = (u\,積)v - \int (u\,積)v'dx$$

♣ **補足** 書籍によっては部分積分を

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

と表している場合もある。混乱する場合は、どちらか一方のみ覚える。

例 1.5.1. 以下を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \log x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int x\log x\,dx$

(1) $\boxed{\text{微分して 1 となる方を } v \text{ とおくとよい！}}$

$$\int \underbrace{(\cos x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v}\,dx = \underbrace{(\sin x)}_{(u\text{ 積})} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{(\sin x)}_{(u\text{ 積})} \cdot \underbrace{1}_{v'}dx$$

となる (計算途中の積分定数は省略)。よって、

$$\begin{aligned}\int \cos x \cdot x dx &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C \qquad (C：\text{積分定数})\end{aligned}$$

となる。

(2) $u=1,\ v=\log x$ とおいて、部分積分法を用いると

$$\int \underbrace{1}_{u} \cdot \underbrace{\log x}_{v}\,dx = \underbrace{x}_{(u\text{ 積})} \cdot \underbrace{\log x}_{v} - \int \underbrace{x}_{(u\text{ 積})} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\int \log x\,dx &= x\log x - \int 1\,dx \\ &= x\log x - x + C \qquad (C：\text{積分定数})\end{aligned}$$

となる。

(3) $u=x,\ v=\log x$ とおいて、部分積分法を用いると

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\log x}_{v}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{(u\text{ 積})} \cdot \underbrace{\log x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{(u\text{ 積})} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\int x\log x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\log x - \int \frac{1}{2}x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 + C \qquad (C：\text{積分定数})\end{aligned}$$

となる。

例 1.5.2. 以下を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx$　　　　(2) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

(1) $u = \sin x,\ v = x^2$ とおいて、部分積分法を用いると

$$\int \underset{\substack{\| \\ u}}{\underline{(\sin x)}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v}}{\underline{x^2}}\, dx = \underset{\substack{\| \\ (u\,\text{積})}}{\underline{(-\cos x)}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v}}{\underline{x^2}} - \int \underset{\substack{\| \\ (u\,\text{積})}}{\underline{(-\cos x)}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v'}}{\underline{(2x)}}\, dx$$

となる。ここで、右辺の第 2 項は、例 1.5.1 (1) より

$$2\int x \cos x\, dx = 2x \sin x + 2\cos x + C$$

なので、

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C \qquad (C：\text{積分定数})$$

である。

(2) まず、与式を I とおく。

$$I = \int \underset{\substack{\| \\ u}}{\underline{e^x}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v}}{\underline{\sin x}}\, dx = \underset{\substack{\| \\ (u\,\text{積})}}{\underline{e^x}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v}}{\underline{\sin x}} - \int \underset{\substack{\| \\ (u\,\text{積})}}{\underline{e^x}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v'}}{\underline{\cos x}}\, dx + C_1$$

$$= e^x \sin x - \int \underset{\substack{\| \\ u}}{\underline{e^x}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v}}{\underline{\cos x}}\, dx + C_1 \qquad (\text{新たに } u, v \text{ とおく})$$

$$= e^x \sin x - \left\{ \underset{\substack{\| \\ (u\,\text{積})}}{\underline{e^x}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v}}{\underline{\cos x}} - \int \underset{\substack{\| \\ (u\,\text{積})}}{\underline{e^x}} \cdot \underset{\substack{\| \\ v'}}{\underline{(-\sin x)}}\, dx + C_2 \right\} + C_1$$

$$= e^x(\sin x - \cos x) - \underset{I}{\underline{\underline{\int e^x \sin x\, dx}}} + C_1 - C_2$$

よって、$2I = e^x(\sin x - \cos x) + C_1 - C_2$ が得られる。これより、I は

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{C_1 - C_2}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C \qquad (C：\text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

1.5.2　演習問題

問題 1.5.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1)	$x \sin x$	(2)	$(1-x)\sin x$
(3)	$(2x+1)\cos x$	(4)	$x\cos 2x$
(5)	xe^{2x}	(6)	$x^2\cos x$
(7)	$x^3\sin x$	(8)	$x^2\cos 2x$
(9)	$x\sin^2 x$	(10)	$x^2\cos^2 x$

問題 1.5.2. 以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1)	x^2e^{ax}	(2)	x^3e^{-ax}	(3)	x^4e^{2x}
(4)	$x^{a-1}\log x$	(5)	$x\log^2 x$	(6)	$x\log^3 x$

問題 1.5.3. 以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、$a \neq 0$ とする。

(1)	$\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$	(2)	$\dfrac{\log x}{(1+x)^2}$	(3)	$x^3\sqrt{1-x^2}$
(4)	$\tan^{-1} x$	(5)	$\sin^{-1} x$	(6)	$\cos^{-1} x$
(7)	$x\tan^{-1} x$	(8)	$x\sin^{-1} x$	(9)	$x^2\tan^{-1} x$

問題 1.5.4. I_{mn} を以下とするとき、(i)〜(iv) の漸化式が成り立つことを示せ。

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\,dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

(i) $I_{m,n} = \dfrac{1}{m+n}\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x + \dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$ $\quad (m+n \neq 0)$

(ii) $I_{m,n} = -\dfrac{1}{m+n}\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x + \dfrac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}$ $\quad (m+n \neq 0)$

(iii) $I_{m,n} = -\dfrac{1}{n+1}\sin^{m+1} x\cos^{n+1} x + \dfrac{m+n+2}{n+1}I_{m,n+2}$ $\quad (n+1 \neq 0)$

(iv) $I_{m,n} = \dfrac{1}{m+1}\sin^{m+1} x\cos^{n+1} x + \dfrac{m+n+2}{m+1}I_{m+2,n}$ $\quad (m+1 \neq 0)$

問題 1.5.5. 前問を利用して、つぎの関数の不定積分を求めよ。

(1) $\sin^4 x\cos^2 x$　(2) $\sin^4 x\cos^4 x$　(3) $\dfrac{1}{\sin x\cos^2 x}$　(4) $\dfrac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}$

1.5.3　演習問題 略解

略解 1.5.1. 途中計算では積分定数 C を省略して計算する。

(1) $u = \sin x, v = x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x \sin x \, dx = (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot x' \, dx = -x \cos x + \sin x + C$$

(2) $u = \sin x, v = 1 - x$ とおき、部分積分を行うと、((1) を利用するのもよい。)

$$\begin{aligned}\int (1-x) \sin x \, dx &= (-\cos x) \cdot (1-x) - \int (-\cos x) \cdot (1-x)' \, dx \\ &= (x-1) \cos x + \int \cos x \cdot (-1) \, dx \\ &= (x-1) \cos x - \sin x + C\end{aligned}$$

(3) $u = \cos x, v = 2x + 1$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int (2x+1) \cos x \, dx &= (\sin x) \cdot (2x+1) - \int (\sin x) \cdot 2 \, dx \\ &= (2x+1) \sin x + 2 \cos x + C\end{aligned}$$

(4) $u = \cos 2x, v = x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x \cos 2x \, dx &= \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) \cdot x - \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right) \cdot 1 \, dx \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C\end{aligned}$$

(5) $u = e^{2x}, v = x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x e^{2x} \, dx = \left(\frac{1}{2} e^{2x}\right) \cdot x - \int \left(\frac{1}{2} e^{2x}\right) \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

(6) $u = \cos x, v = x^2$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= (\sin x) \cdot x^2 - \int (\sin x) \cdot 2x \, dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \left\{ (-\cos x) \cdot x - \int (-\cos x) \cdot 1 \, dx \right\} \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C\end{aligned}$$

(7) $u = \sin x, v = x^3$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^3 \sin x\,dx &= (-\cos x)\cdot x^3 - \int (-\cos x)\cdot 3x^2\,dx \\ &= -x^3\cos x + 3\underline{\int x^2 \cos x\,dx} \\ &= -x^3 \cos x + 3\left\{x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right\} + C\end{aligned}$$

※ 下線部は (6) の通り。

(8) $u = \cos 2x, v = x^2$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos 2x\,dx &= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\cdot x^2 - \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\cdot 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x - \int x\sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\sin 2x - \left\{\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot x - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\cdot 1\,dx\right\} \\ &= \frac{1}{2}x^2 \sin 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

(9) 高次の三角関数の積分の場合、三角関数の次数を 1 次にする。(参照: 略解 1.2.3)

$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x\,dx &= \int x\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{2}\underline{\int x\cos 2x\,dx} \\ &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{8}\cos 2x + C\end{aligned}$$

※ 下線部は (4) の通り。

(10) (9) と同様に、

$$\begin{aligned}\int x^2\cos^2 x\,dx &= \int x^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \frac{1}{2}\underline{\int x^2\cos 2x\,dx} \\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2\sin 2x + \frac{1}{4}x\cos 2x - \frac{1}{8}\sin 2x + C\end{aligned}$$

※ 下線部は (8) の通り。

略解 1.5.2. 途中計算では積分定数 C を省略して計算する。

(1) まず、$u=e^{ax}, v=x^2$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^2e^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\cdot x^2-\int\frac{1}{a}e^{ax}\cdot 2x\,dx\\ &= \frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}\underset{\sim\sim\sim}{\int xe^{ax}\,dx} \qquad (*)\end{aligned}$$

となる。ここで、新たに $u=e^{ax}, v=x$ とおき、波線部の部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int xe^{ax}\,dx &= \frac{1}{a}e^{ax}\cdot x-\int\frac{1}{a}e^{ax}\cdot 1\,dx\\ &= \frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}\,dx\\ &= \frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}e^{ax}\end{aligned}$$

となるので、

$$(*)=\frac{1}{a}x^2e^{ax}-\frac{2}{a}\left\{\frac{1}{a}xe^{ax}-\frac{1}{a^2}e^{ax}\right\}=\left(\frac{1}{a}x^2-\frac{2}{a^2}x+\frac{2}{a^3}\right)e^{ax}+C$$

である。

(2) まず、$u=e^{-ax}, v=x^3$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^3e^{-ax}\,dx &= \frac{1}{-a}e^{-ax}\cdot x^3-\int\frac{1}{-a}e^{-ax}\cdot 3x^2\,dx\\ &= -\frac{1}{a}x^3e^{-ax}+\frac{3}{a}\underset{\sim\sim\sim}{\int x^2e^{-ax}\,dx} \qquad (*)\end{aligned}$$

となる。さらに、$u=e^{-ax}, v=x^2$ とおきなおし、波線部の部分積分を行うと、

$$(*)=-\frac{1}{a}x^3e^{-ax}+\frac{3}{a}\left\{\frac{1}{-a}x^2e^{-ax}+\frac{2}{a}\underline{\int xe^{-ax}\,dx}\right\} \qquad (**)$$

となる。再度、$u=e^{-ax}, v=x$ として、下線部の部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}(**) &= -\frac{1}{a}x^3e^{-ax}-\frac{3}{a^2}x^2e^{-ax}+\frac{6}{a^2}\left\{\frac{1}{-a}xe^{-ax}+\frac{1}{-a^2}e^{-ax}\right\}\\ &= -\frac{1}{a}x^3e^{-ax}-\frac{3}{a^2}x^2e^{-ax}-\frac{6}{a^3}xe^{-ax}-\frac{6}{a^4}e^{-ax}\\ &= -\left(\frac{1}{a}x^3+\frac{3}{a^2}x^2+\frac{6}{a^3}x+\frac{6}{a^4}\right)e^{-ax}+C\end{aligned}$$

である。

(3) まず、$u = e^{2x}, v = x^4$ とおき、部分積分を行い、次は $u = e^{2x}, v = x^3$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
\int x^4 e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x^4 - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 4x^3\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^4e^{2x} - 2\left\{\frac{1}{2}e^{2x}x^3 - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 3x^2\,dx\right\} \\
&= \frac{1}{2}x^4e^{2x} - e^{2x}x^3 + 3\int x^2e^{2x}\,dx
\end{aligned}$$

問 (1) の $a = 2$ のとき $\rightarrow$
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^4e^{2x} - x^3e^{2x} + 3\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right)e^{2x} \\
&= \frac{1}{4}\left(2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 3\right)e^{2x} + C
\end{aligned}$$

(4) $u = x^{a-1}, v = \log x$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
\int x^{a-1}\log x\,dx &= \frac{1}{a}x^a\log x - \int \frac{1}{a}x^a\cdot\frac{1}{x}\,dx \\
&= \frac{1}{a}x^a\log x - \frac{1}{a}\int x^{a-1}\,dx \\
&= \frac{1}{a}x^a\log x - \frac{1}{a^2}x^a + C
\end{aligned}$$

(5) $u = x, v = \log^2 x$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
\int x\log^2 x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{2}{x}\log x\,dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \int x\log x\,dx
\end{aligned}$$

問 (4) の $a = 2$ のとき $\rightarrow$
$$= \frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{1}{4}x^2 + C$$

(6) $u = x, v = \log^3 x$ とおき、部分積分を行う。

$$\begin{aligned}
\int x\log^3 x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\log^3 x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\left(\frac{3}{x}\log^2 x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log^3 x - \frac{3}{2}\int x\log^2 x\,dx
\end{aligned}$$

問 (5) $\rightarrow$
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}x^2\log^3 x - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2\log^2 x - \frac{1}{2}x^2\log x + \frac{1}{4}x^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}x^2\log^3 x - \frac{3}{4}x^2\log^2 x + \frac{3}{4}x^2\log x - \frac{3}{8}x^2 + C
\end{aligned}$$

略解 1.5.3. 途中計算では積分定数 C を省略して計算する。

(1) まず、以下のように式変形を行う。

$$\frac{xe^x}{(1+x)^2}=\frac{(1+x-1)e^x}{(1+x)^2}=\frac{(1+x)e^x}{(1+x)^2}-\frac{e^x}{(1+x)^2}=\frac{e^x}{1+x}-\frac{e^x}{(1+x)^2}$$

ここで、$u=e^x,\ v=\dfrac{1}{1+x}$ とおくと、

$$\int\frac{e^x}{1+x}\,dx=e^x\cdot\frac{1}{1+x}-\int e^x\cdot\left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right)dx=\frac{e^x}{1+x}+\int\frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx$$

となるので、

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx&=\int\frac{e^x}{1+x}\,dx-\int\frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx\\&=\frac{e^x}{1+x}+\cancel{\int\frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx}-\cancel{\int\frac{e^x}{(1+x)^2}\,dx}\\&=\frac{e^x}{1+x}+C\end{aligned}$$

である。※ 最初から部分積分法を用いる場合は、$u=\dfrac{1}{(1+x)^2}, v=xe^x$ としてもよい。

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx&=-\frac{1}{1+x}\cdot xe^x-\int\left(-\frac{1}{1+x}\right)\cdot(xe^x)'\,dx\\&=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{xe^x+e^x}{1+x}\,dx=-\frac{xe^x}{1+x}+\int e^x\,dx\\&=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C\end{aligned}$$

(2) $u=\dfrac{1}{(1+x)^2}, v=\log x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int\frac{\log x}{(1+x)^2}\,dx&=-\frac{\log x}{1+x}+\int\frac{1}{x(1+x)}\,dx\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\log|x|-\log|1+x|+C\\&=-\frac{\log x}{1+x}+\log\left|\frac{x}{1+x}\right|+C\end{aligned}$$

となる。

※ 有理関数の部分分数展開については、後述する (予習)。

(3) まず、$x^3\sqrt{1-x^2} = x^2 \cdot \left(x\sqrt{1-x^2}\right)$ と考えて、$u = x^2, v = x\sqrt{1-x^2}$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \left(\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3}\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

となり、

$$4\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = x^4\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

をえる。ここで、右辺の不定積分は、問題 1.3.3. (6) より

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left\{3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\right\} + C$$

なので

$$\begin{aligned}4\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx &= x^4\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left\{3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\right\} + C \\ &= -\frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left\{-15x^4 + 3(1-x^2)^2 - 10(1-x^2) + 15\right\} + C\end{aligned}$$

となり、計算すると

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{15}\sqrt{1-x^2}\left\{3x^4 - x^2 - 2\right\} + C$$

である。

※　実は、置換積分の方が楽。

(4) $u = 1, v = \tan^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

であり、右辺の不定積分は、例題 1.2.1.(2) より

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

である。よって、

$$\int \tan^{-1} x\,dx = x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

である。

(5) $u = 1, v = \sin^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

である。

ここで、右辺の不定積分は、問題 1.3.3. の (4) より

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

であった。よって、

$$\int \sin^{-1} x \, dx = x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$$

である。

(6) $u = 1, v = \cos^{-1} x$ とおき、(5) を参考に部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}
\int \cos^{-1} x \, dx &= x \cos^{-1} x - \int x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= x \cos^{-1} x + \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

である。

(7) $u = x, v = \tan^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\begin{aligned}
\int x \tan^{-1} x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \left\{ \int 1 \, dx - \int \frac{1}{1+x^2} \, dx \right\} \\
&= \frac{1}{2} x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C \\
&= \frac{1}{2} (x^2+1) \tan^{-1} x - \frac{1}{2} x + C
\end{aligned}$$

である。

(8) $u = x, v = \sin^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

である。ここで、右辺の不定積分は、問題 1.4.1. の (9) より

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

であった。よって、

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{4} \sin^{-1} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$$

である。

(9) $u = x,^2 v = \tan^{-1} x$ とおき、部分積分を行うと、

$$\int x^2 \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \qquad (*)$$

である。ここで、$t = 1 + x^2$ とおくと、$\dfrac{dt}{dx} = 2x$ となるので

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t} \, dt = \frac{1}{2}\left(\int 1 \, dt - \int \frac{1}{t} \, dt\right) \\ &= \frac{1}{2}(t - \log|t|) + C = \frac{1}{2}\left(1 + x^2 - \log(1+x^2)\right) + C\end{aligned}$$

である。よって、

$$(*) = \frac{1}{3}x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6} \log(1+x^2) + C$$

である。 ※定数項は積分定数にまとめている。

略解 1.5.4. (略)

略解 1.5.5. (中略)

(1) $\dfrac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \dfrac{1}{24}\sin^3 x \cos x - \dfrac{1}{16}\sin x \cos x + \dfrac{1}{16}x + C$

(2) $\dfrac{1}{8}\sin^5 x \cos^3 x + \dfrac{1}{16}\sin^5 x \cos x - \dfrac{1}{64}\sin^3 x \cos x - \dfrac{3}{128}\sin x \cos x + \dfrac{3}{128}x + C$

(3) $\dfrac{1}{\cos x} + \log\left|\tan \dfrac{x}{2}\right| + C$

(4) $\dfrac{1}{\sin^3 x \cos x} - \dfrac{4\cos x}{3\sin^3 x} - \dfrac{8}{3\tan x} + C$