

1.6 演習 I

1.6.1 演習問題

問題 1.6.1. 以下の関数の不定積分を求めよ。

(1) 1

(2) 0

(3) x

(4) $-2x$

(5) $x - 5$

(6) $6x^2$

(7) $12x^3$

(8) $\frac{3}{x}$

(9) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(10) $2\sqrt{x}$

(11) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

(12) $x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}$

(13) $\frac{x^2 - 1}{x^4}$

(14) $\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}$

(15) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$

(16) $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$

(17) $\frac{2x+3}{\sqrt{x}}$

(18) $\sqrt{x}\left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right)$

(19) $2\cos x$

(20) $\sin 3x$

(21) $3\cos 2x$

(22) $\cos(1-2x)$

(23) $\frac{1}{\cos^2 2x}$

(24) $\frac{1}{\cos^2(1-x)}$

(25) e^{2x}

(26) e^{-3x}

(27) 3^{-x}

(28) $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

(29) $(\sqrt{x} + 1)^3$

(30) $\frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{x}$

問題 1.6.2. 以下の条件をみたす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f'(x) = 3x^2 - x + 1, f(0) = 2$

(2) $f(x) = \int (x^2 - 3x + 5) dx, f(1) = 1$

(3) $f'(x) = \sin x - 2, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(4) $f(x) = \int \frac{1}{2} \cos x dx, f(0) = 1$

(5) $f'(x) = 3\cos 2x + 4\sin 2x, f(0) = 0$

(6) $f''(x) = 3x, f(0) = 1, f(1) = 0$

(7) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}, f(1) = 3, f(e) = 2e + 1$

問題 1.6.3. 置換積分法を用いて、以下の関数の不定積分を求めよ。

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|
| (1) $(1+x)^3$ | (2) $(2-x)^3$ | (3) $(1-2x)^3$ |
| (4) $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ | (5) $\frac{1}{x^2-4}$ | (6) $\sqrt{5-x^2}$ |
| (7) $(\sqrt{2}+x)^3$ | (8) $(ex+1)^3$ | (9) $(1-\sqrt{2}ex)^3$ |
| (10) $\frac{1}{\sqrt{1-3x^2}}$ | (11) $\frac{4}{4-x^2}$ | (12) $\sqrt{3-2x^2}$ |
| (13) $\cos(3x-2)$ | (14) $\sin(5-4x)$ | (15) $\tan(2-7x)$ |
| (16) $3x^2e^{-x^3}$ | (17) $\frac{e^x}{e^x+1}$ | (18) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ |
| (19) $\sin^3 x$ | (20) $\cos^3 x \sin x$ | (21) $\sin^4 x \cos^3 x$ |
| (22) $\frac{\sin^3 x}{\cos x}$ | (23) $\tan^3 x$ | (24) $\cos^4 x$ |
| (25) $\sqrt{\sin x} \cos^3 x$ | (26) $\frac{\sin x}{1+2\cos x}$ | (27) $\frac{1}{\tan^2 x}$ |
| (28) e^{1-5x} | (29) $8e^{4x+3}$ | (30) 2^{-3x+2} |

問題 1.6.4. 部分積分法を用いて、以下の関数の不定積分を求めよ。ただし、 $a \neq 0$ とする。

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------------------|
| (1) $x \cos x$ | (2) $(1-x) \sin x$ | (3) $(2x+1) \cos x$ |
| (4) $x \cos 2x$ | (5) $x \sin 3x$ | (6) $x^2 \cos x$ |
| (7) $x^3 \sin x$ | (8) $x^3 \cos x$ | (9) $x \sin^2 x$ |
| (10) $x^2 \sin^2 x$ | (11) $x \sin^{-1} x$ | (12) $e^x \sin x$ |
| (13) $x^3 e^{-ax}$ | (14) $x e^{2x}$ | (15) $x^2 e^{ax}$ |
| (16) $\log x$ | (17) $x \log x$ | (18) $(\log x)^2$ |
| (19) $x^2 \log x$ | (20) $x \tan^{-1} x$ | (21) $\frac{\log x}{x^2}$ |
| (22) $\sin(\log x)$ | (23) $\cos(\log x)$ | (24) $\frac{x \sin x}{\cos^2 x}$ |

※ 部分積分法は、解答を求める際には、 $f(x)$ と $g(x)$ の選択が重要になる。

1.6.2 演習問題略解

略解 1.6.1. 以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \int 1 dx = x + C$$

$$(2) \int 0 dx = C$$

$$(3) \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$(4) \int (-2x) dx = -x^2 + C$$

$$(5) \int (x - 5) dx = \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

$$(6) \int 6x^2 dx = 2x^3 + C$$

$$(7) \int 12x^3 dx = 3x^4 + C$$

$$(8) \int \frac{3}{x} dx = 3 \log |x| + C$$

$$(9) \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + C$$

$$(10) \int 2\sqrt{x} dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + C$$

$$(11) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$(12) \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + C$$

$$(13) \int \frac{x^2 - 1}{x^4} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) dx = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + C$$

$$(14) \int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x}\right) dx = -\frac{1}{2x^2} - 3 \log |x| + C$$

$$(15) \int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx = \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2 \log |x| - \frac{1}{x} + C$$

$$(16) \int \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C$$

$$(17) \int \frac{2x+3}{\sqrt{x}} dx = \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} + C$$

$$(18) \int \sqrt{x} \left(x^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(x^2\sqrt{x} - \frac{2}{x\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

$$(19) \int 2 \cos x dx = 2 \sin x + C$$

$$(20) \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + C$$

$$(21) \int 3 \cos 2x dx = \frac{3}{2} \sin 2x + C$$

$$(22) \int \cos(1-2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(1-2x) + C$$

$$(23) \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \tan 2x + C$$

$$(24) \int \frac{1}{\cos^2(1-x)} dx = -\tan(1-x) + C$$

$$(25) \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$(26) \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

$$(27) \int 3^{-x} dx = -\frac{1}{\log 3} \cdot 3^{-x} + C$$

$$(28) \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \log|x| + C$$

$$(29) \int (\sqrt{x} + 1)^3 dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + 3x + 3x^{\frac{1}{2}} + 1 \right) dx$$

$$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + 2x\sqrt{x} + x + C$$

$$(30) \int \frac{(\sqrt{x} + 1)^3}{x} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 3 + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} \right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 6\sqrt{x} + \log|x| + C$$

略解 1.6.2. (1) $f'(x) = 3x^2 - x + 1$ より、 $f(x)$ は

$$f(x) = \int (3x^2 - x + 1) dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

を満たす。ここで、 $f(0) = 2$ より $C = 2$ をえる。

よって、

$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

である。

(2) 与式を計算すると、

$$f(x) = \int (x^2 - 3x + 5) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$$

であり、 $f(1) = 1$ より $C = -\frac{17}{6}$ となる。

よって、

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{6}$$

である。

(3) 題意より

$$f(x) = \int (\sin x - 2) dx = -\cos x - 2x + C$$

であり、 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ より $C = \pi$ なので、

$$f(x) = -\cos x - 2x + \pi$$

である。

(4) 与式を計算すると、

$$f(x) = \int \frac{1}{2} \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin x + C$$

であり、 $f(0) = 1$ より、 $C = 1$ となる。

よって、

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$$

である。

(5) これまでと同様に計算すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3 \cos 2x + 4 \sin 2x) \, dx \\ &= \frac{3}{2} \sin 2x - 2 \cos 2x + C \end{aligned}$$

であり、 $f(0) = 0$ より $C = 2$ となる。

よって、

$$f(x) = \frac{3}{2} \sin 2x - 2 \cos 2x + 2$$

である。

(6) $f(x)$ の 2 階微分が $3x$ なので、1 階微分は

$$f'(x) = \int f''(x) \, dx = \frac{3}{2} x^2 + C_1$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\frac{3}{2} x^2 + C_1 \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^3 + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ を用いると、 $C_1 = -1$, $C_2 = 1$ を得る。

以上より、

$$f(x) = \frac{1}{2} x^3 - x + 1$$

となる。

(7) (6) と同様に、1 階微分を求めると、

$$f'(x) = \int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + C_1$$

である。よって、

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx = \log |x| + C_1 x + C_2$$

となる。ここで、 $f(1) = 3$, $f(e) = 2e + 1$ より $C_1 = \frac{2e-3}{e-1}$, $C_2 = \frac{e}{e-1}$ を得るので、

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x} + C_1 \right) dx = \log |x| + \frac{2e-3}{e-1} x + \frac{e}{e-1}$$

となる。

略解 1.6.3. 以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \int (1+x)^3 dx = \frac{1}{4}(1+x)^4 + C$$

$$(2) \int (2-x)^3 dx = -\frac{1}{4}(2-x)^4 + C$$

$$(3) \int (1-2x)^3 dx = -\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C$$

$$(4) \int \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \sin^{-1} 2x + C$$

$$(5) \int \frac{1}{x^2-4} dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$(6) \int \sqrt{5-x^2} dx = \frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} x \sqrt{5-x^2} + C$$

※ $\frac{5}{2} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{4} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) + C$ のような場合は、もう少し整理する。

$t = \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}}$ とすると、

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \sin t \cos t = 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} \\ &= 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) \sqrt{1 - \left(\sin \left(\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) \right)^2} \\ &= 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{5}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{5}} = \frac{2}{5} x \sqrt{5-x^2} \end{aligned}$$

より、

$$\frac{5}{4} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{5}} \right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{5} x \sqrt{5-x^2} = \frac{1}{2} x \sqrt{5-x^2}.$$

$$(7) \int (\sqrt{2} + x)^3 dx = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + x)^4 + C$$

$$(8) \int (ex + 1)^3 dx = \frac{1}{4e}(ex + 1)^4 + C$$

$$(9) \int (1 - \sqrt{2}ex)^3 dx = -\frac{1}{4\sqrt{2}e}(1 - \sqrt{2}ex)^4 + C$$

$$(10) \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^{-1} \sqrt{3}x + C$$

$$(11) \int \frac{4}{4-x^2} dx = -\log \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$(12) \int \sqrt{3-2x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{3-2x^2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \sin^{-1} \frac{\sqrt{6}}{3}x + C$$

$$(13) \int \cos(3x-2) dx = \frac{1}{3} \sin(3x-2) + C$$

$$(14) \int \sin(5-4x) dx = \frac{1}{4} \cos(5-4x) + C$$

$$(15) \int \tan(2-7x) dx = \frac{1}{7} \log |\cos(2-7x)| + C$$

$$(16) \int 3x^2 e^{-x^3} dx = -e^{-x^3} + C$$

$$(17) \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \log |e^x+1| + C$$

$$(18) \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx = \sqrt{1+e^{2x}} + C$$

$$(19) \int \sin^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

$$(20) \int \cos^3 x \sin x dx = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$$

※ 解き方によつては $\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + C$ となる。が、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x &= \frac{1}{4} \sin^2 x (2 - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 x) (1 + 1 - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^2 x) (1 + \cos^2 x) \\ &= \frac{1}{4} (1 - \cos^4 x) \end{aligned}$$

となり、

$$\frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4} \sin^4 x + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C'.$$

$$(21) \int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$

$$(22) \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx = -\log |\cos(x)| + \frac{1}{2} \cos^2 x + C$$

$$(23) \int \tan^3 x \, dx = \log |\cos x| + \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

$$(24) \int \cos^4 x \, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$(25) \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x \, dx = \frac{2}{3} \sin x \sqrt{\sin x} - \frac{2}{7} \sin^3 x \sqrt{\sin x} + C$$

$$(26) \int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} \, dx = -\frac{1}{2} \log |1 + 2 \cos x| + C$$

$$(27) \int \frac{1}{\tan^2 x} \, dx = -\frac{1}{\tan x} - x + C$$

$$(28) \int e^{1-5x} \, dx = -\frac{1}{5} e^{1-5x} + C$$

$$(29) \int 8e^{4x+3} \, dx = 2e^{4x+3} + C$$

$$(30) \int 2^{-3x+2} \, dx = -\frac{2^{-3x+2}}{3 \log 2} + C$$

略解 1.6.4. 以下の C はすべて積分定数とする。

$$(1) \int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$(2) \int (1-x) \sin x \, dx = x \cos x - \sin x - \cos x + C$$

$$(3) \int (2x+1) \cos x \, dx = 2x \sin x + \sin x + 2 \cos x + C$$

$$(4) \int x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$(5) \int x \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$$

$$(6) \int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$$

$$(7) \int x^3 \sin x \, dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

$$(8) \int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C$$

$$(9) \int x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$$

$$(10) \int x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 \sin 2x + \frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + C$$

$$(11) \int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x - \frac{1}{4} \sin^{-1} x + \frac{1}{4}x \sqrt{1-x^2} + C$$

$$(12) \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$(13) \int x^3 e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}x^3 e^{-ax} - \frac{3}{a^2}x^2 e^{-ax} - \frac{6}{a^3}x e^{-ax} - \frac{6}{a^4}e^{-ax} + C$$

$$(14) \int x e^{2x} \, dx = \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$(15) \int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}x^2 e^{ax} - \frac{2}{a^2}x e^{ax} + \frac{2}{a^3}e^{ax} + C$$

$$(16) \int \log x \, dx = x \log |x| - x + C$$

$$(17) \int x \log x \, dx = \frac{1}{2}x^2 \log |x| - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$(18) \int (\log x)^2 \, dx = x \log^2 |x| - 2x \log |x| + 2x + C$$

$$(19) \int x^2 \log x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \log |x| - \frac{1}{9}x^3 + C$$

$$(20) \int x \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{2}(x^2 \tan^{-1} x + \tan^{-1} x - x) + C$$

$$(21) \int \frac{\log x}{x^2} \, dx = -\frac{\log |x| + 1}{x} + C$$

$$(22) \int \sin(\log x) \, dx = \frac{1}{2}x \{\sin(\log |x|) - \cos(\log |x|)\} + C$$

$$(23) \int \cos(\log x) \, dx = \frac{1}{2}x \{\cos(\log |x|) + \sin(\log |x|)\} + C$$

$$(24) \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \log \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C$$