

1.7 有理関数の不定積分

1.7.1 有理関数と部分分数展開

$P(x), Q(x)$ を x の多項式とする ($Q(x) \neq 0$)。このとき $\frac{P(x)}{Q(x)}$ を有理関数とよぶ。

有理関数において、分母が因子の積の形であらわされるとき、分数の和（差）に分解する操作を、部分分数展開と呼ぶ。

例 1.7.1. 部分分数展開の例

$$(1) \quad \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$(2) \quad \frac{2}{(x-1)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$(3) \quad \frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2+x+1}$$

$$(4) \quad \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+x+1}$$

$$(5) \quad \frac{x^4+x^2+2x+2}{(x+1)(x^2+1)} = x-1 + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1}$$

$$(6) \quad \frac{2x^2+1}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

☆ 分子の最大次数が分母の最大次数より小さい場合。

♡ point 1 部分分数展開では、分母の各因子が、各項の分母に分解される。

例:
$$\frac{P(x)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

♡ point 2 分子の最大次数は、【分母の次数 - 1】（以下）となる。

例:
$$\frac{P(x)}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

☆ 分子の最大次数が分母の最大次数以上の場合。

♡ point 3 この場合は、0 次以上の項がある。

例:
$$\frac{P(x)}{x+1} = Ax + B + \frac{C}{x+1}$$

♡ 確認 部分分数展開を行う方法は、いくつかある。ここでは、式の計算と係数比較で求める方法を考える。

例 1.7.2. 有理関数 $\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2}$ を $Ax + B + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ の形に変形する。

まず、 $2x^3 - 4x^2 + 1$ を $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ で割ると (多項式の割り算は OK?)、

$$2x^3 - 4x^2 + 1 = 2x(x^2 - 2x + 1) - 2x + 1$$

なので、

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} = 2x + \frac{-2x + 1}{(x-1)^2} = 2x - \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

となる。ここで、 $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}$ とおくと、

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{C(x-1) + D}{(x-1)^2} = \frac{Cx - C + D}{(x-1)^2}$$

となるので、係数比較により

$$C = 2, -C + D = -1$$

より、

$$C = 2, D = 1$$

が得られる。

以上より、

$$\frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} = 2x - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

となる。

問題 1.7.1. $\frac{-3x^2 + 1}{x(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$ の A, B, C, D を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Cx+D)x(x+1)}{x(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^3 + (A+C+D)x^2 + (A+B+D)x + A}{x(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

となるので、係数比較により

$$A + B + C = 0, A + C + D = -3, A + B + D = 0, A = 1$$

となり、

$$A = 1, B = 1, C = -2, D = -2$$

となる。

1.7.2 有理関数の不定積分

例 1.7.3. $\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} dx$ を考える。

例 1.7.2. より、

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{(x-1)^2} dx = \int \left(2x - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx \quad (*)$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} (*) &= \int 2x dx - \int \frac{2}{x-1} dx - \int (x-1)^{-2} dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \log |x-1| - \frac{1}{-1} (x-1)^{-1} + C \\ &= x^2 - 2 \log |x-1| + \frac{1}{x-1} + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

問題 1.7.2. $\int \frac{-3x^2 + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx$ を計算せよ。

問題 1.7.1. より、

$$\int \frac{-3x^2 + 1}{x(x+1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2+1} \right) dx \quad (*)$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} (*) &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{x}{x^2+1} dx - 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \log |x| + \log |x+1| - 2 \cdot \frac{1}{2} \log(x^2+1) - 2 \tan^{-1} x + C \\ &= \log |x(x+1)| - \log(x^2+1) - 2 \tan^{-1} x + C \\ &= \log \frac{|x(x+1)|}{x^2+1} - 2 \tan^{-1} x + C \quad (C : \text{積分定数}) \end{aligned}$$

となる。

1.7.3 演習問題

問題 1.7.3. 以下の有利関数を部分分数展開せよ。

$$(1) \quad \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3) \quad \frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$(5) \quad \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(7) \quad \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(8) \quad \frac{x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$(9) \quad \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$(10) \quad \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$(11) \quad \frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$$

$$(12) \quad \frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}$$

$$(13) \quad \frac{11}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

$$(14) \quad \frac{5x^2 - 19x + 29}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

問題 1.7.4. 以下の関数の不定積分を求めよ。

$$(1) \quad \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(2) \quad \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(3) \quad \frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)}$$

$$(4) \quad \frac{1}{x^3 + 1}$$

$$(5) \quad \frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$$

$$(6) \quad \frac{1}{x^3 - x}$$

$$(7) \quad \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$(8) \quad \frac{x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$(9) \quad \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}$$

$$(10) \quad \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$(11) \quad \frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8}$$

$$(12) \quad \frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24}$$

$$(13) \quad \frac{11}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

$$(14) \quad \frac{5x^2 - 19x + 29}{(x - 4)(x^2 - 2x + 3)}$$

1.7.4 演習問題 略解

略解 1.7.1. 分母が展開された形の場合、分母の因数分解を行う。

(1) まず、 $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$ と変形し、

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

とおいて、 A, B を求める。右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad A-B=1$$

なので、 $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

となる。

(2) まず、 $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ と変形し、

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

とおいて、 A, B を求める。右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x + (-2A-B)}{(x-1)(x-2)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad -2A-B=1$$

なので、 $A = -1$, $B = 1$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

となる。

(3) 分母の次数より分子の次数の方が高いので分子を分母で割ると、

$$x^3 + 3x - 7 = (x - 1)(x^2 + x - 2) + 6x - 9$$

となるので、

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{6x - 9}{(x + 2)(x - 1)}$$

である。よって、

$$\frac{6x - 9}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} = \frac{Ax - A + Bx + 2B}{(x + 2)(x - 1)}$$

となるので、係数比較を行うと、

$$A + B = 6, \quad -A + 2B = -9$$

なので、 $A = 7$, $B = -1$ をえる。以上より、

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{7}{x + 2} - \frac{1}{x - 1}$$

となる。

(4) まず、 $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)}$ と変形し、

$$\frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$

において、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ &= \frac{(A + B)x^2 - (A - B - C)x + (A + C)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B = 0, \quad A - B - C = 0, \quad A + C = 1$$

なので、 $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

となる。

(5) まず、 x^3+3x^2-x-3 の因数分解を行うと、 $x^3+3x^2-x-3=(x-1)(x+1)(x+3)$ である。

よって、 $\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} = \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)(x+3)}$ と変形し、

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{Ax^2 + 4Ax + 3A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx^2 - C}{(x-1)(x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B + C = 0, \quad 4A + 2B = 3, \quad 3A - 3B - C = 2$$

なので、 $A = \frac{5}{8}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{7}{8}$ をえる。よって、

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} = \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x+3}$$

となる。

(6) まず、 $\frac{1}{x^3-x} = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$ と変形し、

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

とおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B + C = 0, \quad B - C = 0, \quad -A = 1$$

なので、 $A = -1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$ をえる。よって、

$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

となる。

(7) まず、 $\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}$ と変形し、

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

とにおいて、 A, B を求める。

右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - (2A+B)}{(x-1)(x-2)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=2, \quad -(2A+B)=3$$

なので、 $A=-5, B=7$ をえる。

よって、

$$\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = -\frac{5}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

となる。

(8) まず、 $\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = \frac{x+2}{(2x+1)(x-2)}$ と変形し、

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x-2)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-2}$$

とにおいて、 A, B を求める。

右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x-2) + B(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} = \frac{(A+2B)x - (2A-B)}{(2x+1)(x-2)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+2B=1, \quad -(2A-B)=2$$

なので、 $A=-\frac{3}{5}, B=\frac{4}{5}$ をえる。

よって、

$$\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2x+1} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-2}$$

となる。

$$(9) \frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2x^2 - x - 4}{x(x-1)(x+2)} \text{ と変形し、}$$

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

とにおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx}{x(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A+2B-C)x - 2A}{x(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B + C = 2, \quad A + 2B - C = -1, \quad -2A = -4$$

なので、 $A = 2, B = -1, C = 1$ をえる。よって、

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

となる。

$$(10) \frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} \text{ と変形し、}$$

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

とにおいて、 A, B, C を求める。右辺は

$$(\text{右辺}) = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 - (B-C)x + (A-C)}{(x-1)(x^2+1)}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A + B = 1, \quad -(B - C) = 1, \quad A - C = 2$$

なので、 $A = 2, B = -1, C = 0$ をえる。よって、

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

となる。

(11) まず、 $\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} = \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)(x-2)^3}$ と変形し、

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)(x-2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

において、 A, B, C, D を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x-2)^3 + B(x-1)(x-2)^2 + C(x-1)(x-2) + D(x-1)}{(x-1)(x-2)^3} \\ &= \frac{(A+B)x^3 - (6A+5B-C)x^2 + (12A+8B-3C+D)x}{(x-1)(x-2)^3} \\ &\quad + \frac{-8A-4B+2C-D}{(x-1)(x-2)^3} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad -6A-5B+C=3, \quad 12A+8B-3C+D=-9, \quad -8A-4B+2C-D=7$$

なので、 $A=-1, B=1, C=2, D=1$ をえる。よって、

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3}$$

となる。

(12) まず、 $\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(x+3)(x+4)}$ と変形し、

$$\frac{x-1}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4}$$

において、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x+3)(x+4) + B(x+2)(x+4) + C(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (7A+6B+5C)x + 12A+8B+6C}{(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B+C=0, \quad 7A+6B+5C=1, \quad 12A+8B+6C=-1$$

なので、 $A=-\frac{3}{2}, B=4, C=-\frac{5}{2}$ をえる。よって、

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+4}$$

となる。

(13) まず、

$$\frac{11}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

において、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x^2-2x+3) + (Bx+C)(x-4)}{(x-4)(x^2-2x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 - (2A+4B-C)x + 3A-4C}{(x-4)(x^2-2x+3)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=0, \quad -2A-4B+C=0, \quad 3A-4C=11$$

なので、 $A=1, B=-1, C=-2$ をえる。よって、

$$\frac{11}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{1}{x-4} - \frac{x+2}{x^2-2x+3}$$

となる。

(14) (13) と分母が同じなので、途中までは (13) と同じ。

まず、

$$\frac{5x^2-19x+29}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+3}$$

において、 A, B, C を求める。右辺は

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{A(x^2-2x+3) + (Bx+C)(x-4)}{(x-4)(x^2-2x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 - (2A+4B-C)x + 3A-4C}{(x-4)(x^2-2x+3)} \end{aligned}$$

と変形できるので、係数比較を行うと、

$$A+B=5, \quad -2A-4B+C=-19, \quad 3A-4C=29$$

なので、 $A=3, B=2, C=-5$ をえる。よって、

$$\frac{5x^2-19x+29}{(x-4)(x^2-2x+3)} = \frac{3}{x-4} + \frac{2x-5}{x^2-2x+3}$$

となる。

略解 1.7.2. 部分分数展開が前問で得られているので、それを用いて積分を行う。

なお、以下の C はすべて積分定数とし、計算途中では省略する場合もある。また、 $\log$ の和, 差を積, 商に変形していない。

(1)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx &= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \log|x-2| - \log|x+1| + C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x-7}{(x+2)(x-1)} dx &= \int x dx - \int 1 dx + 7 \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + 7 \log|x+2| - \log|x-1| + C\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1 \boxed{+1}}{x^2-x+1} + \frac{2}{3} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1} \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

※ $\boxed{+1}$ はその右の項に移動。 $-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

(5)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} dx &= \frac{5}{8} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{7}{8} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{5}{8} \log|x-1| + \frac{1}{4} \log|x+1| - \frac{7}{8} \log|x+3| + C\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)(x+1)} dx &= -\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx \\ &= -\log|x| + \frac{1}{2} \log|x-1| + \frac{1}{2} \log|x+1| + C\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2-3x+2} dx &= -5 \int \frac{1}{x-1} dx + 7 \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -5 \log|x-1| + 7 \log|x-2| + C\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{2x^2-3x-2} dx &= -\frac{3}{5} \int \frac{1}{2x+1} dx + \frac{4}{5} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\frac{3}{10} \log|2x+1| + \frac{4}{5} \log|x-2| + C\end{aligned}$$

※ 計算方法によっては、 $-\frac{3}{10} \log\left|x + \frac{1}{2}\right| + \frac{4}{5} \log|x-2| + C'$ となる。

(9)

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x-4}{x^3+x^2-2x} dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= 2 \log|x| - \log|x-1| + \log|x+2| + C\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1} dx &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= 2 \log|x-1| - \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-9x+7}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8} dx \\ &= -\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx + \int \frac{1}{(x-2)^3} dx \\ &= -\log|x-1| + \log|x-2| - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{2(x-2)^2} + C\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} dx \\
&= -\frac{3}{2} \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x+3} dx - \frac{5}{2} \int \frac{1}{x+4} dx \\
&= -\frac{3}{2} \log|x+2| + 4 \log|x+3| - \frac{5}{2} \log|x+4| + C
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{11}{(x-4)(x^2-2x+3)} dx \\
&= \int \frac{1}{x-4} dx - \int \frac{x+2}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2+6}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx - \int \frac{3}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \log|x^2-2x+3| - \int \frac{3}{x^2-2x+3} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \log|x^2-2x+3| - \int \frac{3}{(x-1)^2 + (\sqrt{2})^2} dx \\
&= \log|x-4| - \frac{1}{2} \log|x^2-2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

(14) 部分分数展開の場合と同様に、(13) と分母が同じなので有程度 (13) の結果を用いることができる。

$$\begin{aligned}
& \int \frac{5x^2 - 19x + 29}{(x-4)(x^2-2x+3)} dx \\
&= 3 \int \frac{1}{x-4} dx + \int \frac{2x-5}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \int \frac{2x-5}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \int \frac{2x-2-3}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \int \frac{2x-2}{x^2-2x+3} dx - \int \frac{3}{x^2-2x+3} dx \\
&= 3 \log|x-4| + \log|x^2-2x+3| - \frac{3}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$