

1.8 ヘビサイドの方法

1.8.1 ヘビサイドの方法を使うために

部分分数展開を行う方法として、ヘビサイドの展開公式を紹介する。まず、最初に注意点としてこの講義では実数のみを扱うので、

分母 = 0 の解がすべて実数解であること

が必要である。

$$\text{可能: } \frac{P(x)}{(2x+1)(x+2)^3} \qquad \text{不可能: } \frac{P(x)}{(x+1)(x^2+1)}$$

1.8.2 ヘビサイドの方法 I

例 1.8.1. 以下の部分分数展開を考える。

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

まず、この式は任意の実数 $x \neq 1, 3$ で成り立つ。各式に $x-1$ をかけると、

$$\frac{2x+5}{x-3} = A + \frac{B(x-1)}{x-3}$$

となり、この式は任意の $x \neq 3$ で成り立つ。よって、 $x=1$ を代入すると、 $A = -\frac{7}{2}$ がえられる。同様に、

$$\frac{2x+5}{x-1} = \frac{A(x-3)}{x-1} + B$$

の式に $x=3$ を代入すると、 $B = \frac{11}{2}$ がえられる。

これを、形式的に書くと、

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{2x+5}{x-3} \right|_{x=1} = \frac{2 \cdot 1 + 5}{1-3} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}, \\ B &= \left. \frac{2x+5}{x-1} \right|_{x=3} = \frac{2 \cdot 3 + 5}{3-1} = \frac{11}{2} \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = \frac{-7/2}{x-1} + \frac{11/2}{x-3}$$

である。

1.8.3 ヘビサイドの方法 II

例 1.8.2. 以下の部分分数展開を考える。

$$\frac{x^3}{(x-5)^4} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} + \frac{C}{(x-5)^3} + \frac{D}{(x-5)^4}$$

まず、各式に $(x-5)^4$ をかけて、両辺を x で 3 回微分すると、

$$x^3 = A(x-5)^3 + B(x-5)^2 + C(x-5) + D \quad (0)$$

$$3x^2 = 3A(x-5)^2 + 2B(x-5) + C \quad (1)$$

$$3 \cdot 2x = 3 \cdot 2 \cdot A(x-5) + 2B \quad (2)$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot A \quad (3)$$

となる。式 (3) の左辺は $(x^3)'''$ であり、右辺は $3!A$ であることから

$$A = \frac{1}{3!}(x^3)''' \Big|_{x=5} = \frac{1}{3!}(3x^2)'' \Big|_{x=5} = \frac{1}{3!}(3 \cdot 2x)' \Big|_{x=5} = \frac{1}{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Big|_{x=5} = 1$$

である (制限 $x=5$ があるのは、次の例で紹介)。

以下同様に考えて、

$$B = \frac{1}{2!}(x^3)'' \Big|_{x=5} = \frac{1}{2!}(3x^2)' \Big|_{x=5} = \frac{1}{2!} \cdot 3 \cdot 2x \Big|_{x=5} = 15,$$

$$C = \frac{1}{1!}(x^3)' \Big|_{x=5} = \frac{1}{1!} \cdot 3x^2 \Big|_{x=5} = 75,$$

$$D = \frac{1}{0!}x^3 \Big|_{x=5} = 125$$

となる。よって、

$$\frac{x^3}{(x-5)^4} = \frac{1}{x-5} + \frac{15}{(x-5)^2} + \frac{75}{(x-5)^3} + \frac{125}{(x-5)^4}$$

である。

一般形として、有理関数 $\frac{P(x)}{(x-a)^n}$ が

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \cdots + \frac{A_i}{(x-a)^i} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} \quad (1 \leq i \leq n, A_i \in \mathbb{R})$$

と表されるとき

$$A_i = \frac{1}{(n-i)!} (P(x))^{(n-i)} \Big|_{x=a}$$

である。

1.8.4 ヘビサイドの方法 I+II

例 1.8.3. 以下の部分分数展開を考える。

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} = \boxed{\frac{A}{x-2}} + \boxed{\frac{B}{x-3}} + \boxed{\frac{C}{(x-3)^2}}$$

まず、 A は ヘビサイドの方法 I で求める。基本に戻れば、各項を $x-2$ 倍し、 $x=2$ を代入する。

$$\frac{x^2 + 4}{(x-3)^2} = A + \frac{B(x-2)}{x-3} + \frac{C(x-2)}{(x-3)^2}$$

すなわち、

$$A = \frac{x^2 + 4}{(x-3)^2} \Big|_{x=2} = \frac{2^2 + 4}{(2-3)^2} = \frac{4+4}{(-1)^2} = 8$$

である。 B, C は ヘビサイドの方法 II で求める。まず、各式に $(x-3)^2$ 倍し、左辺を $P(x)$ とおくと、

$$P(x) := \frac{x^2 + 4}{x-2} = \frac{A}{x-2}(x-3)^2 + B(x-3) + C$$

のように書き表すことができる。よって、

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1!} P'(x) \Big|_{x=3} \\ &= \frac{1}{1!} \cdot \left(\frac{x^2 + 4}{x-2} \right)' \Big|_{x=3} = \frac{1}{1!} \cdot \frac{2x(x-2) - (x^2 + 4) \cdot 1}{(x-2)^2} \Big|_{x=3} \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot (3-2) - (3^2 + 4)}{(3-2)^2} = \frac{6-13}{1} = -7, \\ C &= \frac{1}{0!} P(x) \Big|_{x=3} \\ &= \frac{1}{0!} \cdot \frac{x^2 + 4}{x-2} \Big|_{x=3} = \frac{9+4}{3-2} = 13 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{8}{x-2} + \frac{-7}{x-3} + \frac{13}{(x-3)^2}$$

である。

1.8.5 ヘビサイドの方法を利用するために

有理関数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ において、 $P(x)$ の最高次数が $Q(x)$ の最高次数以上のとき、

$$\left(\text{例} : \frac{x^3}{x^2-4}, \frac{x^4-x^3+1}{x^2-2x+1}, \frac{x^2}{x^2-4x+3} \right)$$

多項式の割り算を行い、 $P(x) = Q(x)S(x) + T(x)$ の形にし、

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$$

として $\frac{T(x)}{Q(x)}$ に対して、ヘビサイドの方法を利用する。

例 1.8.4. 有理関数 $\frac{x^3}{x^2-4}$ の部分分数展開を考える。

まず、 x^3 を x^2-4 で割ると、

$$x^3 = x(x^2-4) + 4x$$

となるので、

$$\frac{x^3}{x^2-4} = \boxed{x} + \boxed{\frac{4x}{x^2-4}}$$

と変形できる。

よって、

$$\frac{4x}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$A = \left. \frac{4x}{x+2} \right|_{x=2} = \frac{8}{4} = 2,$$

$$B = \left. \frac{4x}{x-2} \right|_{x=-2} = \frac{-8}{-4} = 2$$

となり、

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$$

である。

例 1.8.5. 以下の部分分数展開を考える。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ とする。

$$\frac{2x+5}{(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i}$$

各式に $x-i$ をかけると、

$$\frac{2x+5}{x+i} = A + \frac{B(x-i)}{x+i}$$

となる。ここで $x=i$ を代入すると、

$$A = \left. \frac{2x+5}{x+i} \right|_{x=i} = \frac{2i+5}{2i} = \frac{2-5i}{2}$$

がえられる。同様に、

$$B = \left. \frac{2x+5}{x-i} \right|_{x=-i} = \frac{-2i+5}{-2i} = \frac{2+5i}{2}$$

がえられる。よって、

$$\frac{2x+5}{(x-i)(x+i)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-5i}{x-i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2+5i}{x+i}$$

である。

1.8.6 演習問題

問題 1.8.1. 以下の有理関数に対して、ヘビサイドの方法が使えるものはヘビサイドの方法を使って部分分数展開を求め、ヘビサイドの方法使えない場合は、使えないと答えよ。

(1) $\frac{1}{x^2-1}$

(2) $\frac{1}{x^2-3x+2}$

(3) $\frac{x^3+3x-7}{(x+2)(x-1)}$

(4) $\frac{1}{x^3+1}$

(5) $\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3}$

(6) $\frac{1}{x^3-x}$

(7) $\frac{2x+3}{x^2-3x+2}$

(8) $\frac{x+2}{2x^2-3x-2}$

(9) $\frac{2x^2-x-4}{x^3+x^2-2x}$

(10) $\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2+x-1}$

(11) $\frac{2x}{(x-2)^2}$

(12) $\frac{x^2+x+2}{(x+3)^3}$

(13) $\frac{3x^2-9x+7}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}$

(14) $\frac{x^2-1}{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$

(15) $\frac{4}{x^2-2}$

(16) $\frac{x-2}{x^2-2x-4}$

1.8.7 演習問題 略解

略解 1.8.1. (1) まず、 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ より、分母 = 0 の実数解が求まる。

従って、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

とおくと、

$$A = \frac{1}{x + 1} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2},$$

$$B = \frac{1}{x - 1} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$$

となる。

以上より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 1} &= \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

である。

(2) まず、 $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ より、分母 = 0 の実数解が求まる。

従って、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2}$$

とおくと、

$$A = \frac{1}{x - 2} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1 - 2} = -1,$$

$$B = \frac{1}{x - 1} \Big|_{x=2} = \frac{1}{2 - 1} = 1$$

となる。

以上より、

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2}$$

である。

(3) 分母の最高次数 (2 次) より分子の最高次数 (3 次) の方が高い。

そこで、 $x^3 + 3x - 7$ を $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$ で割ってみると

$$x^3 + 3x - 7 = (x - 1)(x^2 + x - 2) + 6x - 9$$

なので

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{6x - 9}{(x + 2)(x - 1)}$$

をえる。

ここで、分母 = 0 の実数解が求まるので、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{6x - 9}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{6x - 9}{x - 1} \right|_{x=-2} = \frac{-12 - 9}{-2 - 1} = 7,$$

$$B = \left. \frac{6x - 9}{x + 2} \right|_{x=1} = \frac{6 - 9}{1 + 2} = -1$$

となる。

以上より、

$$\frac{x^3 + 3x - 7}{(x + 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{7}{x + 2} + \frac{-1}{x - 1}$$

である。

(4) 分母 = $x^3 + 1 = 0$ を解くと、 $x = -1, \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ となり、複素数解がえられる。

従って、ヘビサイドの方法は使えない。

(5) 分母 = $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ の方程式を解くと、 $x = -3, -1, 1$ をえるので、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{3x + 2}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{3x + 2}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{3x + 2}{(x + 1)(x - 1)} \right|_{x=-3} = \frac{-9 + 2}{(-2) \cdot (-4)} = \frac{-7}{8},$$

$$B = \left. \frac{3x + 2}{(x + 3)(x - 1)} \right|_{x=-1} = \frac{-3 + 2}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4},$$

$$C = \left. \frac{3x + 2}{(x + 3)(x + 1)} \right|_{x=1} = \frac{3 + 2}{4 \cdot 2} = \frac{5}{8}$$

となる。

以上より、

$$\frac{3x+2}{x^3+3x^2-x-3} = -\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{x+3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{x-1}$$

である。

(6) まず、 $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ より、分母 = 0 の実数解が求まる。
従って、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right|_{x=0} = \frac{1}{(-1) \cdot 1} = -1, \\ B &= \left. \frac{1}{x(x-1)} \right|_{x=-1} = \frac{1}{(-1) \cdot (-2)} = \frac{1}{2}, \\ C &= \left. \frac{1}{x(x+1)} \right|_{x=1} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$\frac{1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$$

である。

(7) 分母は (2) と同じなので、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{2x+3}{x-2} \right|_{x=1} = \frac{2+3}{1-2} = -5, \\ B &= \left. \frac{2x+3}{x-1} \right|_{x=2} = \frac{4+3}{2-1} = 7 \end{aligned}$$

となる。

以上より、

$$\frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{-5}{x-1} + \frac{7}{x-2}$$

である。

(8) まず、 $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$ より、分母 = 0 の実数解が求まるため、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+1}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{x+2}{2x+1} \right|_{x=2} = \frac{2+2}{4+1} = \frac{4}{5},$$

$$B = \left. \frac{x+2}{x-2} \right|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{1}{2}-2} = -\frac{3}{5}$$

となる。

以上より、

$$\frac{x+2}{2x^2-3x-2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2x+1}$$

である。

(9) まず、分母 $= x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2) = 0$ となるため、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{2x^2 - x - 4}{(x-1)(x+2)} \right|_{x=0} = \frac{-4}{(-1) \cdot 2} = 2,$$

$$B = \left. \frac{2x^2 - x - 4}{x(x+2)} \right|_{x=1} = \frac{2-1-4}{1 \cdot 3} = -1,$$

$$C = \left. \frac{2x^2 - x - 4}{x(x-1)} \right|_{x=-2} = \frac{8+2-4}{(-2) \cdot (-3)} = 1$$

となる。

以上より、

$$\frac{2x^2 - x - 4}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$$

である。

(10) 分母 $= x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ の方程式を解くと、

$$x = 1, \pm\sqrt{-1}$$

となり、複素数解がえられる。従って、ヘビサイドの方法は使えない。

(11) この問題は、ヘビサイドの方法 II を用いる。

まず、

$$\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

として、公式に当てはめると

$$A = \frac{1}{1!}(2x)' \Big|_{x=2} = \frac{1}{1!}(2) \Big|_{x=2} = 2$$

$$B = \frac{1}{1!}(2x) \Big|_{x=2} = 4$$

となる。

以上より、

$$\frac{2x}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

である。

(12) この問題も、ヘビサイドの方法 II を用いる。

まずは、

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x+3)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2} + \frac{C}{(x+3)^3}$$

として、公式に当てはめると

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2!}(x^2 + x + 2)'' \Big|_{x=-3} \\ &= \frac{1}{2}(2x + 1)' \Big|_{x=-3} = \frac{1}{2}(2) \Big|_{x=-3} = 1, \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{1!}(x^2 + x + 2)' \Big|_{x=-3} = (2x + 1) \Big|_{x=-3} = -5,$$

$$C = \frac{1}{1!}(x^2 + x + 2) \Big|_{x=-3} = 8$$

となる。

以上より、

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x+3)^3} = \frac{1}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2} + \frac{8}{(x+3)^3}$$

である。

(13) まず、分母 $= x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8 = (x-1)(x-2)^3$ となるため、ヘビサイドの方法が使える。

$$\begin{aligned}\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} &= \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-1)(x-2)^3} \\ &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}\end{aligned}$$

とおくと、まず、

$$A = \left. \frac{3x^2 - 9x + 7}{(x-2)^3} \right|_{x=1} = \frac{3-9+7}{(1-2)^3} = \frac{1}{(-1)^3} = -1$$

である。

次に、 $P(x) = \frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{2!} P''(x) \Big|_{x=2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1} \right)'' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(6x-9)(x-1) - (3x^2 - 9x + 7) \cdot 1}{(x-1)^2} \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2} \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(x-1)^3} \Big|_{x=2} \\ &= 1, \\ C &= \frac{1}{1!} P'(x) \Big|_{x=2} = \left(\frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1} \right)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{3x^2 - 6x + 2}{(x-1)^2} \Big|_{x=2} \\ &= 2, \\ D &= \frac{1}{0!} P(x) \Big|_{x=2} = \frac{3x^2 - 9x + 7}{x-1} \Big|_{x=2} \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\frac{3x^2 - 9x + 7}{x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 8} = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-2)^3}$$

である。

(14) まず、分母の因数分解を行う。

$$x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24 = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

となり、分母、分子のどちらも因数 $x+1$ をもつので、

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = \frac{x-1}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4}$$

と変形して、ヘビサイドの方法を利用すると、

$$A = \left. \frac{x-1}{(x+3)(x+4)} \right|_{x=-2} = \frac{-2-1}{1 \cdot 2} = -\frac{3}{2},$$

$$B = \left. \frac{x-1}{(x+2)(x+4)} \right|_{x=-3} = \frac{-3-1}{(-1) \cdot 1} = 4,$$

$$C = \left. \frac{x-1}{(x+2)(x+3)} \right|_{x=-4} = \frac{-4-1}{(-2) \cdot (-1)} = -\frac{5}{2}$$

となる。以上より、

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{4}{x+3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x+4}$$

である。

(15) まず、

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

より、分母 = 0 の実数解が求まる。従って、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{4}{x^2 - 2} = \frac{A}{x - \sqrt{2}} + \frac{B}{x + \sqrt{2}}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{4}{x + \sqrt{2}} \right|_{x=\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

$$B = \left. \frac{4}{x - \sqrt{2}} \right|_{x=-\sqrt{2}} = \frac{4}{-\sqrt{2} - \sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

となる。

以上より、

$$\frac{4}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{2}}{x - 1} - \frac{\sqrt{2}}{x + 1}$$

である。

(16) まず、分母は

$$x^2 - 2x - 4 = (x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5})$$

と因数分解できる。

よって、分母 = 0 の実数解が求まるので、ヘビサイドの方法が使える。

$$\frac{x-2}{x^2-2x-4} = \frac{A}{x-1+\sqrt{5}} + \frac{B}{x-1-\sqrt{5}}$$

とおくと、

$$A = \left. \frac{x-2}{x-1-\sqrt{5}} \right|_{x=1-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{5}-2}{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

$$B = \left. \frac{x-2}{x-1+\sqrt{5}} \right|_{x=1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}-2}{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

となる。

以上より、

$$\frac{x-2}{x^2-2x-4} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{x-1+\sqrt{5}} + \frac{1}{10} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{x-1-\sqrt{5}}$$

である。

※ 有理数でない解が求まる場合は、途中の計算が複雑になるが、部分分数展開は確かに可能である。