

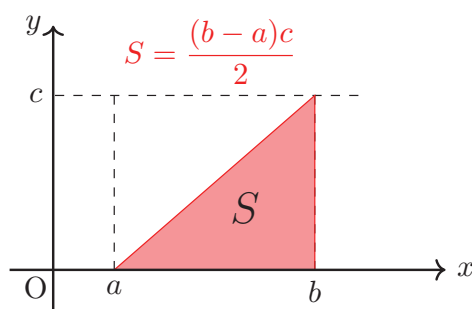
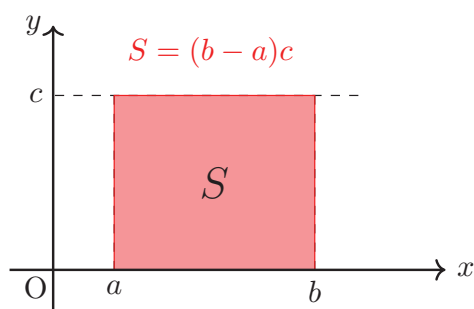
第2章

定積分と基本定理

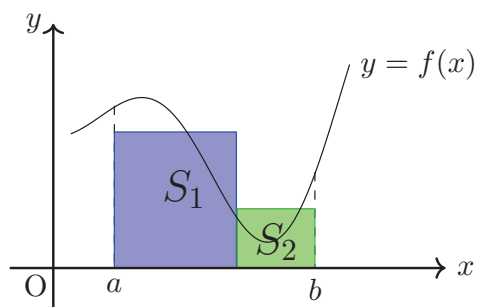
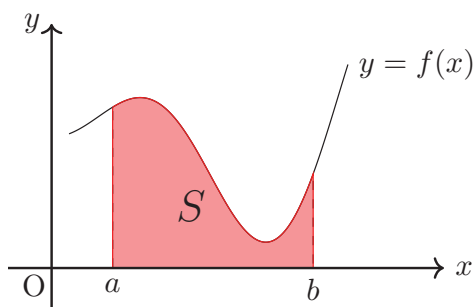
2.1 面積と積分法

2.1.1 面積

ある区間で、定数関数と x 軸 (長方形) や一次関数と x 軸 (直角三角形) の間の面積は



である。では、一般の関数と x 軸との間の面積は？



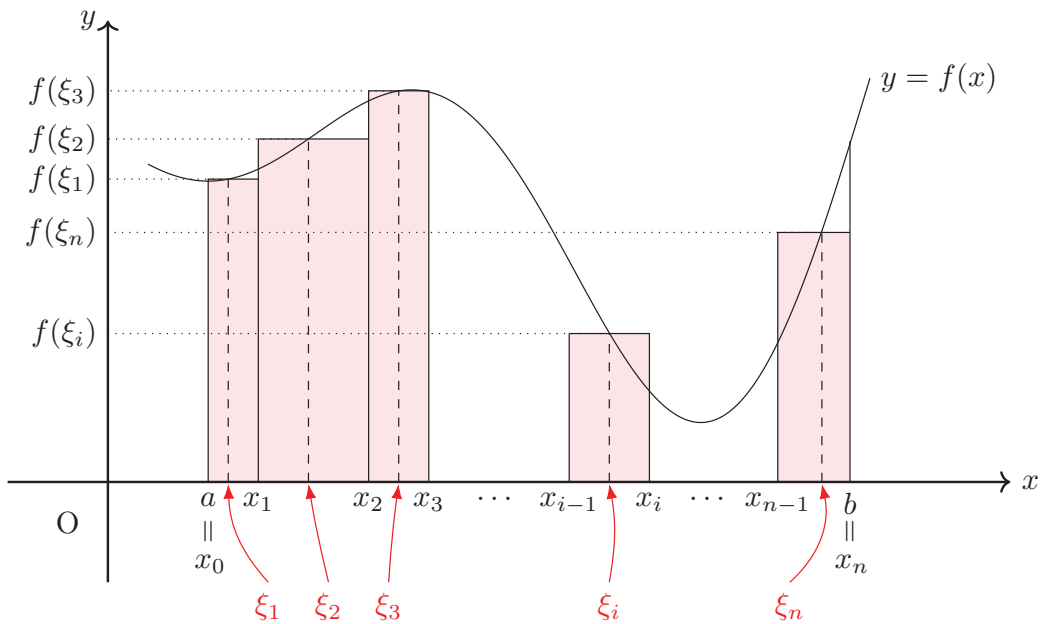
$$S \doteq S_1 + S_2 \text{ ?}$$

< 微分と積分の関係 >

$$\begin{array}{ccc} \text{微分} & \rightleftharpoons & \text{積分} \\ (\text{傾き、増加率}) & & (\text{面積}) \end{array}$$

2.1.2 リーマン和

$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{長方形の面積で近似} \\ \cdot \text{分割を細かくする} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) \text{ の } a \text{ から } b \text{ までの積分} \\ \int_a^b f(x) dx \\ \text{を定義する} \end{array}$



$\exists M, \exists m > 0, m \leq f(x) \leq M \ (a \leq x \leq b)$ であると仮定する。

♠ 注意! $\exists$ は存在する (exist) や、ある～という意味。

訳1) ある正の数 M, m に対して、 $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で $m \leq f(x) \leq M$

訳2) $f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で $m \leq f(x) \leq M$ を満たす正の数 M, m が存在する

分割 $\overset{\text{デルタ}}{\Delta}$ を

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

とする。小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の中に、それぞれ任意に $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned}
 S(\Delta) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\
 &= \sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{\text{長方形面積の和}}
 \end{aligned}$$

を分割 Δ に対する関数 $f(x)$ のリーマン和という。

いま、

$$|\Delta| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$$

とする。

$|\Delta| \rightarrow 0$ のとき、(すなわち、分割 Δ の幅を限りなく小さくするとき、)
分割の仕方及び ξ_i の選び方に依らず、 $S(\Delta)$ が一定の値 α に近づく。

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha$$

が成り立つならば、この極限值 α を $f(x)$ の区間 $[a, b]$ における (定) 積分といい、

$$\int_a^b f(x) dx$$

で表す。

※ 上端は [ジョウタン]、下端は [カタン] とよむ。[ウワバ]、[シタバ] と読むと建築用語。
 また、このとき、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ において、積分可能 であるという。

$\int_a^b f(x) dx$ を求めることを、 $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で 積分する という。

♠ 注意! $f(x) \leq 0$ の場合、 x 軸と $x = a$, $x = b$ 及び $f(x)$ で囲まれた面積に”-” を付けた値になる。また、

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx \quad (a < b),$$

$$\int_a^a f(x) dx := 0$$

とする。

♣ 補足 区間 $[a, b]$ において、 $f(x)$ の符号が変わるときは、区間を分けて考える (後述)。

定理 2.1.1. $f(x)$ に対して、

$$f(x) : [a, b] \text{ 上 連続} \implies f(x) : [a, b] \text{ 上 積分可能}$$

が成り立つ。

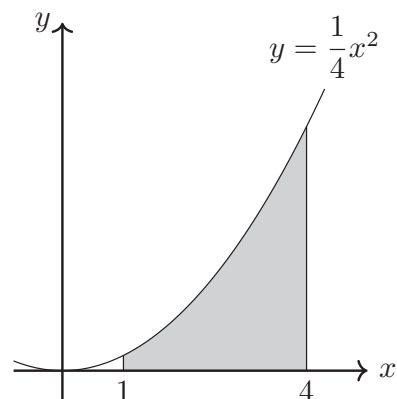
証明 2.1.1. 各自にゆだねる。

2.1.3 練習問題

問題 2.1.1. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ に対して、 $y = f(x)$, $x = 1$, $x = 4$ および x 軸で囲まれた部分の面積をリーマン和で近似することを考える。

次の分割 Δ , ξ_i に対して、関数 $f(x)$ のリーマン和を求めよ。

※ 分数で答えても良いが、小数の近似値 (小数点以下2位) で構わない。電卓使用可。



(1)

$$\Delta : 1 < 2 < 3 < 4$$

$$\xi_1 = 2, \xi_2 = 3, \xi_3 = 4$$

(2)

$$\Delta : 1 < 2 < 3 < 4$$

$$\xi_1 = 1, \xi_2 = 2, \xi_3 = 3$$

(3)

$$\Delta : 1 < \frac{3}{2} < 2 < \frac{5}{2} < 3 < \frac{7}{2} < 4$$

$$\xi_1 = \frac{3}{2}, \xi_2 = 2, \xi_3 = \frac{5}{2}, \xi_4 = 3, \xi_5 = \frac{7}{2}, \xi_6 = 4$$

(4) n は1以上の自然数とする。

$$\Delta : 1 < 1 + \frac{3}{n} < 1 + 2 \cdot \frac{3}{n} < 1 + 3 \cdot \frac{3}{n} < \cdots < 1 + (n-1) \cdot \frac{3}{n} < 1 + n \cdot \frac{3}{n} = 4$$

$$\xi_i = 1 + i \cdot \frac{3}{n} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

※ $n = 3$ のときが (1)、 $n = 6$ のときが (3)、すなわち、 n は分割の数である。

念のため

自然数の和、2乗の和の公式

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

2.1.4 練習問題 略解

略解 2.1.1. (1) 定義に $\Delta : 1 < 2 < 3 < 4$ と $\xi_1 = 2, \xi_2 = 3, \xi_3 = 4$ を当てはめると、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f(2)(2-1) + f(3)(3-2) + f(4)(4-3) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 + \frac{1}{4} \cdot 4^2 = \frac{29}{4} \end{aligned}$$

となる。

(2) (1) と同様に当てはめると、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f(1)(2-1) + f(2)(3-2) + f(3)(4-3) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 3^2 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3) これまで同様に当てはめると、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= f\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right) + f(2)\left(2-\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2}-2\right) \\ &\quad + f(3)\left(3-\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{7}{2}-3\right) + f(4)\left(4-\frac{7}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \left\{ \frac{3^2}{2^2} + 2^2 + \frac{5^2}{2^2} + 3^2 + \frac{7^2}{2^2} + 4^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^2} (3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2) = \frac{199}{32} \end{aligned}$$

となる。

(4) 定義に従うと、

$$\begin{aligned} S(\Delta) &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ f\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right) \left(\left(1 + i \cdot \frac{3}{n}\right) - \left(1 + (i-1) \cdot \frac{3}{n}\right) \right) \right\} \\ &= \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{3}{n}i\right)^2 = \frac{3}{4n} \sum_{i=1}^n \left(1 + 2 \cdot \frac{3}{n}i + \frac{3^2}{n^2}i^2\right) \\ &= \frac{3}{4n} \left\{ n + \frac{6}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{9}{n^2} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \right\} = \frac{21}{4} + \frac{45}{8n} + \frac{9}{8n^2} \end{aligned}$$

となる。

※ $n = 3$ のときが (1)、 $n = 6$ のときが (3) となっている。