

2.2 区分求積法

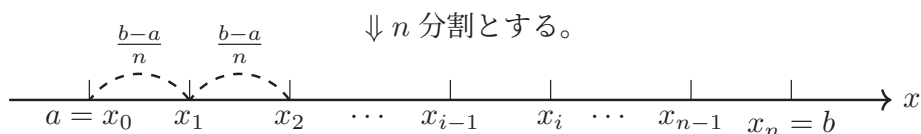
2.2.1 リーマン和から区分求積法

復習 (リーマン和)

区間 $[a, b]$ の分割を $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ⁽¹⁾ として、分割幅の最大を $|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ で定める。また、小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意の ξ_i ⁽²⁾ をとる。このとき、以下をリーマン和という。

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

(1) 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$



このとき、各小区間の幅 $(x_i - x_{i-1})$ は、 $\frac{b-a}{n}$ となり、 $|\Delta| = \frac{b-a}{n}$ である。
ちなみに

$$\Delta : a < a + \frac{b-a}{n} < a + \frac{b-a}{n} \cdot 2 < \cdots < a + \frac{b-a}{n} \cdot n = b$$

であり、 $|\Delta| \rightarrow 0$ は、 $n \rightarrow \infty$ である。

(2) 小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ 内に任意の ξ_i

↓ 小区間の左端か、右端にする。

$$\xi_i = x_{i-1} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1) \text{ または } \xi_i = x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$$

以上の変更によって、

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot (i-1)\right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i\right) \cdot \frac{b-a}{n} \end{cases}$$

となる。この方法を**区分求積法**という。

2.2.2 区分解積分法とは

まず、 $f(x)$ は $[a, b]$ 上積分可能とする。 $[a, b]$ を n 等分すると、各小区間の幅は、

$$\frac{b-a}{n}$$

である。よって、各分点は

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

と表される。

小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ において、左端 x_{i-1} または 右端 x_i のどちらかを ξ_i とする。
すなわち、

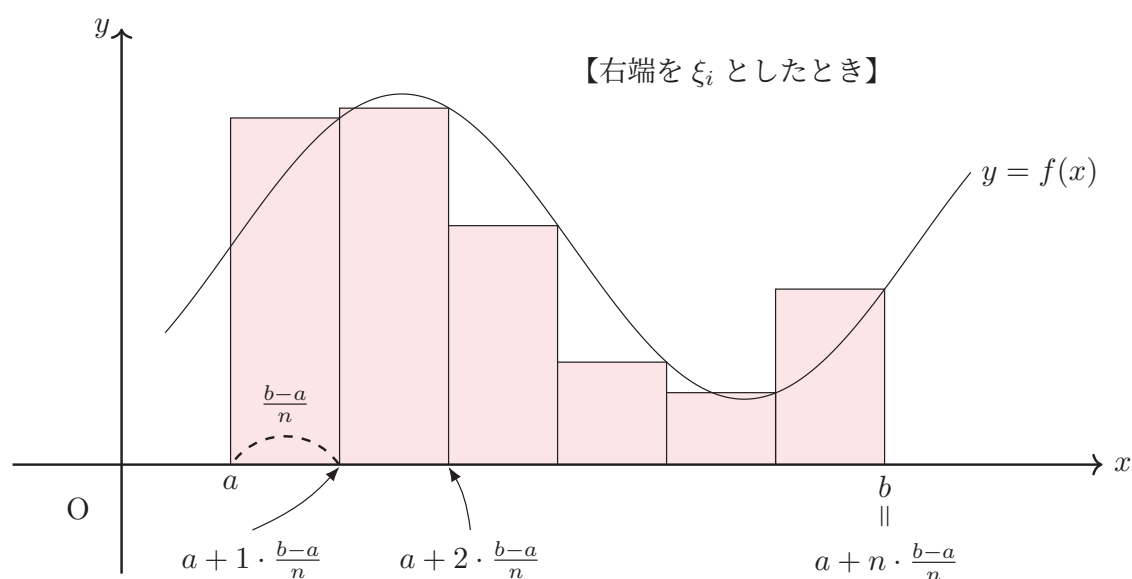
$$\xi_i = x_{i-1} \quad \text{or} \quad \xi_i = x_i$$

とすることにより、

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}(i-1)\right) & (\xi_i = x_{i-1} : \text{左端の場合}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) & (\xi_i = x_i : \text{右端の場合}) \end{cases}$$

こっちを使う！

となる。



例 2.2.1. 区分別積法を用いて $\int_0^1 x^3 dx$ を求めよ。

まず、

$$\int_0^1 x^3 dx = \int_a^b f(x) dx$$

なので、 $a = 0, b = 1, f(x) = x^3$ として ($\xi_i = x_i$: 右端の場合を) 考える。

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \\ \int_0^1 x^3 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n \left(0 + \frac{1-0}{n}i\right)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \end{aligned}$$

3 乗の和の公式は、1 乗の和の公式の 2 乗

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

例 2.2.2. (定数関数の積分)

区間 $[a, b]$ において、定数関数 $f(x) = c$ と x 軸の間の面積を求めよ ($c \in \mathbb{R}$)。言い換えると $\int_a^b c dx = c(b-a)$ を示せ。

$\forall x \in \mathbb{R}$ に対して、 $f(x) = c$ であるから、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right) \\ \int_a^b c dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n c \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \cdot nc \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(b-a)c}_{n \text{ に無関係}} \\ &= (b-a)c \end{aligned}$$

である。(別解: $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \alpha$ で示す。)

2.2.3 演習問題

問題 2.2.1. 区分求積法を用いて、以下の関数の与えられた区間における定積分を求めよ。

- (1) 関数 : $3x - 1$, 区間 : $[1, 2]$
 (2) 関数 : $3x^2$, 区間 : $[0, 1]$
 (3) 関数 : e^x , 区間 : $[a, b]$ ただし、 $0 < a < b$

問題 2.2.2. 以下の極限が $\int_a^b f(x) dx$ に等しいとき、関数 $f(x)$, 下端 a , 上端 b を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{n^3} - \frac{3}{n} \right) \qquad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \left(-\frac{i^2}{n^3} + \frac{6}{n^2} i \right)$$

問題 2.2.3. 以下の極限が $\int_a^b f(x) dx$ に等しいとき、関数 $f(x)$, 下端 a , 上端 b を求めよ。

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right)$$

(2) k は 2 以上の自然数とする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+kn} \right)$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{9n^2 + 1} + \frac{n^2}{9n^2 + 4} + \frac{n^2}{9n^2 + 9} + \cdots + \frac{n^2}{9n^2 + n^2} \right)$$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$$

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k}$$

2.2.4 演習問題 略解

略解 2.2.1. (1) 例 2.2.1. を参考に考える。

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 (3x-1) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-1}{n} \sum_{i=1}^n \left(3 \cdot \left(1 + \frac{2-1}{n} i \right) - 1 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{3}{n} i \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ 2n + \frac{3}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{3}{2n} (n+1) \right\} = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

(2) 例 2.2.1. を参考に考える。

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 3x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-0}{n} \sum_{i=1}^n 3 \left(0 + \frac{1-0}{n} i \right)^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} \cdot (n+1)(2n+1) = 1
 \end{aligned}$$

(3) 定義にしたがって考える。ただし、 $\delta = \frac{b-a}{n}$ とおく。

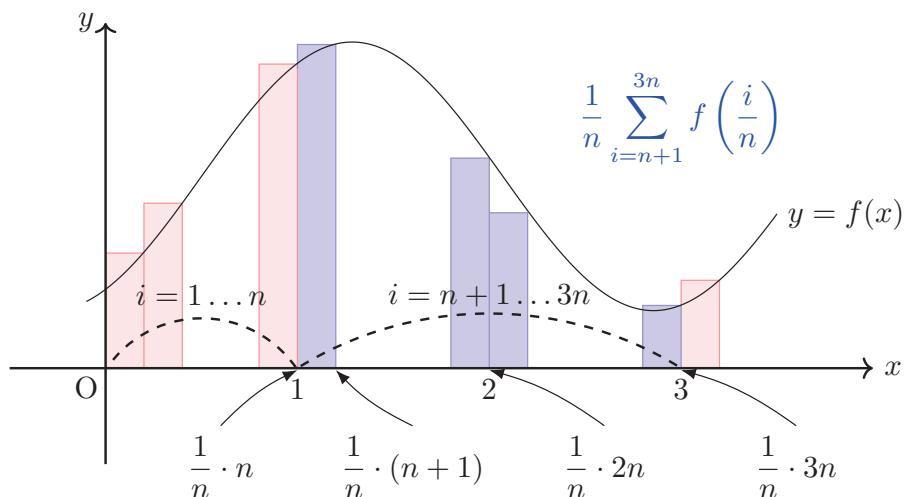
$$\begin{aligned}
 \int_a^b e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n e^{a + \frac{b-a}{n} i} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot e^a \cdot e^\delta \left\{ 1 + e^\delta + e^{2\delta} + \cdots + e^{(n-1)\delta} \right\} \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \cdot e^a \cdot e^\delta \cdot \frac{1 - e^{n\delta}}{1 - e^\delta} \\
 &= (e^a - e^b) \lim_{\delta \rightarrow 0} (-1) \cdot \frac{-\delta}{e^{-\delta} - 1} \\
 &= (e^a - e^b) \cdot (-1) = e^b - e^a
 \end{aligned}$$

略解 2.2.2.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i^2}{n^3} - \frac{3}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{i^2}{n^2} - 3 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\left(0 + \frac{i}{n} \right)^2 - 3 \right) \\
 &= \int_0^1 (x^2 - 3) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \left(-\frac{i^2}{n^3} + \frac{6}{n^2} i \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{3n} \frac{1}{n} \left(-\frac{i^2}{n^2} + 6 \cdot \frac{i}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=n+1}^{3n} \left(-\left(\frac{i}{n} \right)^2 + 6 \left(\frac{i}{n} \right) \right) \\
 &= \int_1^3 (-x^2 + 6x) dx
 \end{aligned}$$

(注)



略解 2.2.3.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{i}{n})^2}} \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+kn} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n}} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{kn}{n}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{kn} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \\
&= \int_0^k \frac{1}{1+x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n^2}{9n^2+1} + \frac{n^2}{9n^2+4} + \frac{n^2}{9n^2+9} + \cdots + \frac{n^2}{9n^2+n^2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{9+(\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{9+(\frac{2}{n})^2} + \frac{1}{9+(\frac{3}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{9+(\frac{n}{n})^2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{9+(\frac{i}{n})^2} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{9+x^2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{i}{n})^2}} \\
&= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2n+1}^{3n} \frac{1}{i} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=2n+1}^{3n} \frac{1}{\frac{i}{n}} \\
&= \int_2^3 \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$