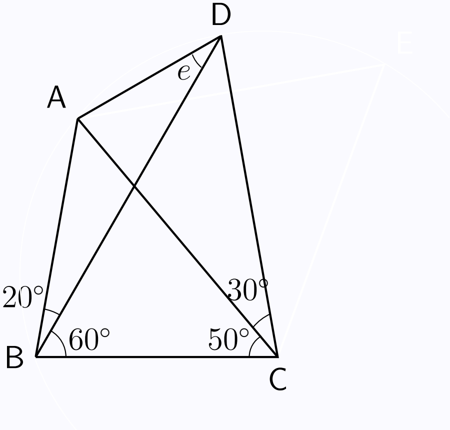
TeX 第 3 回目

表現とメディアの数理

第 8 回

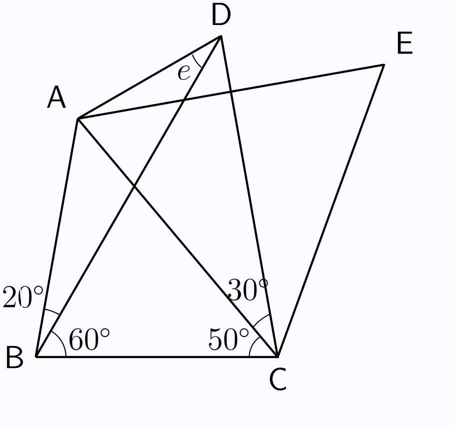
証明 1

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。



証明 1

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。



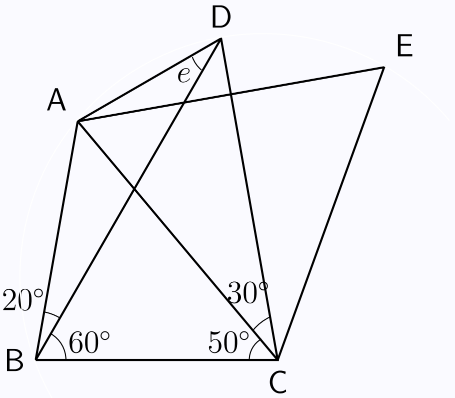
証明 1

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。

このとき、$\angle$BCA$= 50°$ で $\angle$CAB$= 50°$ より、

AB=BC

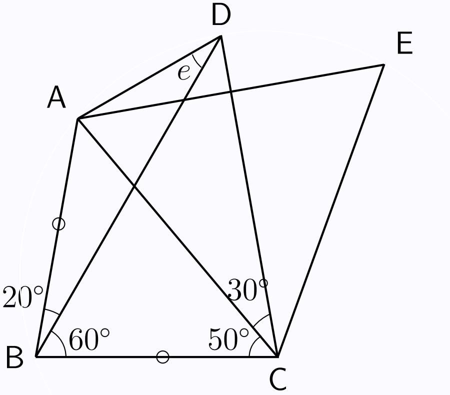
である。



証明 1

AB=BC

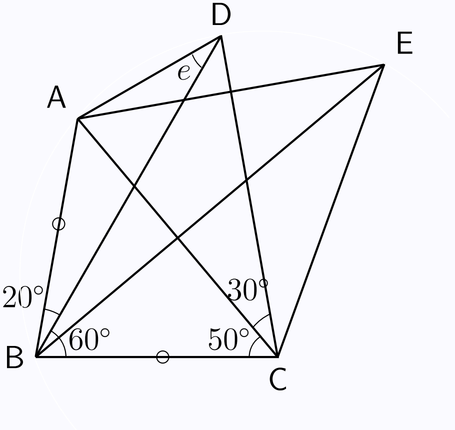
なので、



証明 1

AB=BC

なので、線分 BE は AC と直交し、四角形 ABCE は凧型であることがわかる。



証明 1

AB=BC

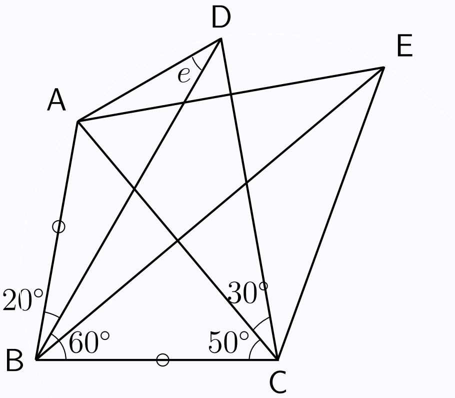
なので、線分 BE は AC と直交し、四角形 ABCE は凧型であることがわかる。

よって、

$\angle$ABE= $\angle$ ABC$/2 = 40°$

$\angle$BEA= $\angle$ CEA$/2 = 30°$

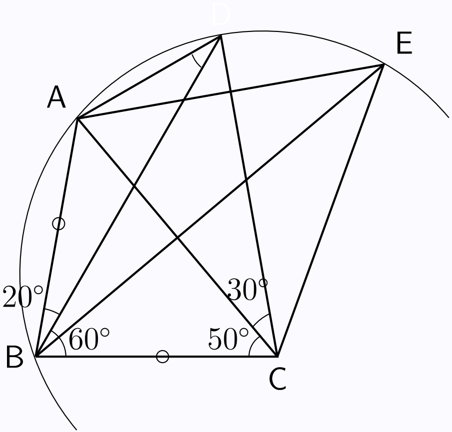
となる。



また、$\angle$ACD$= 30°$ であり、三角形 ACE は正三角形なので、線分 CD は辺 AE の垂直二等分線になっている。

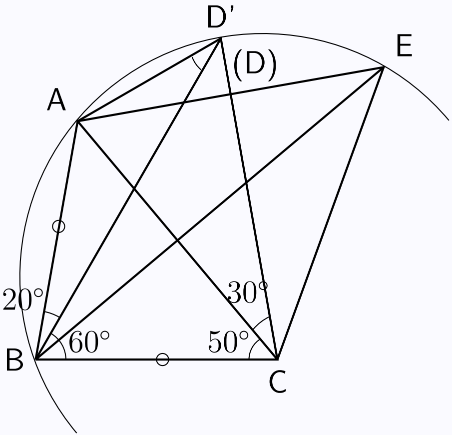
証明 1

ここで、三角形 ABE の外接円 O を考える。



証明 1

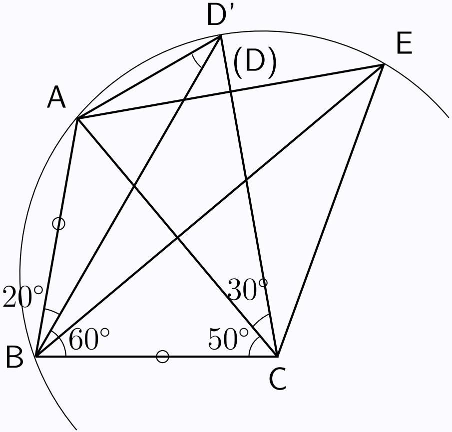
ここで、三角形 ABE の外接円 O を考える。
この外接円と直線 CD の交点を D' とし、D' と D が一致することを示す。



証明 1

ここで、三角形 ABE の外接円 O を考える。
この外接円と直線 CD の交点を D' とし、D' と D が一致することを示す。
D' は円 O 上の点であり、対称性により、

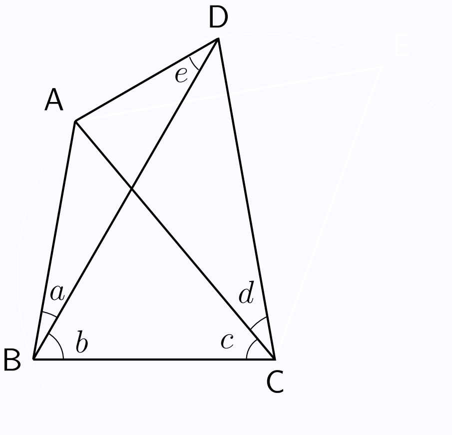
$$\overset{\frown}{\mathrm{AD'}} = \overset{\frown}{\mathrm{D'E}}$$



がいえるので、∠ABD'= ∠D'BE= ∠ABE$/2 =$ ∠ABD となり、
D と D' は一致する。よって、∠ADB= ∠AEB= 30° となる。

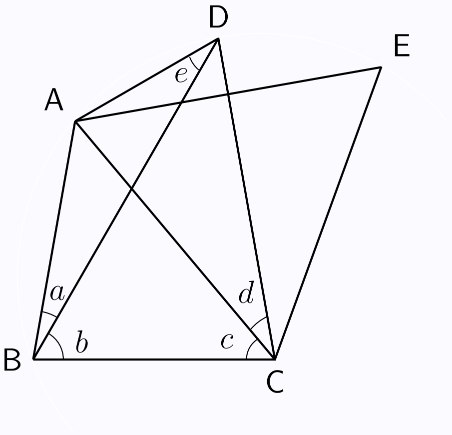
証明 1(改)

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。



証明 1(改)

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。



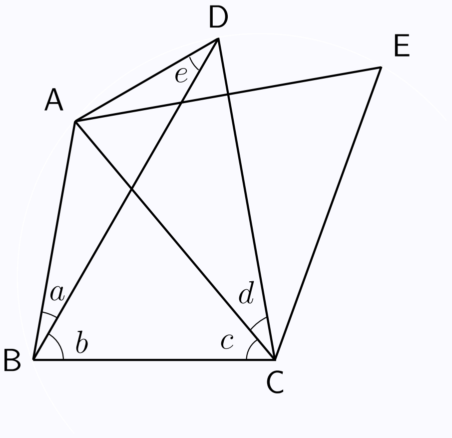
証明 1(改)

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。

このとき、<u>$\angle$BCA$=c$</u> で <u>$\angle$CAB$=c$ ならば、</u>

AB$=$BC

が言える。



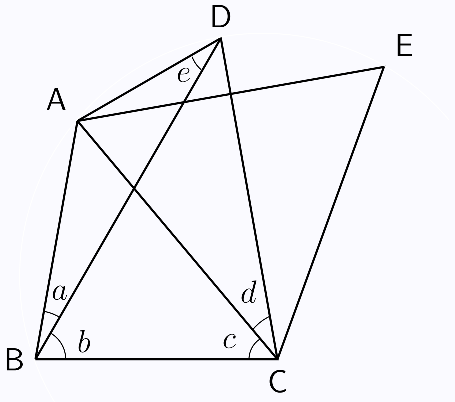
証明 1(改)

まず、辺 AC を 1 辺とする正三角形を、辺 AC からみて B の逆にとり、A,C 以外の頂点を E とする。

このとき、$\angle$BCA$= c$ で $\angle$CAB$= c$ ならば、

AB=BC

が言える。

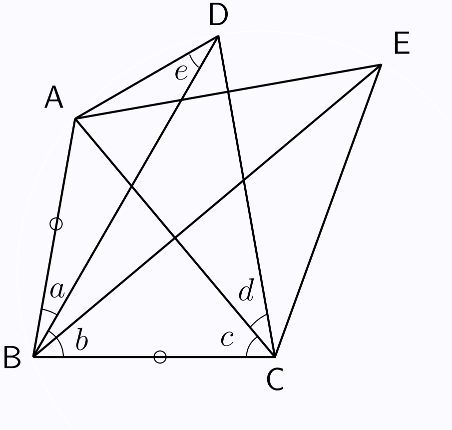


よって、条件、$a + b + c + c = 180°$ が得られる。

証明 1(改)

AB=BC

ならば、線分 BE は AC と直交し、四角形 ABCE は凧型であることがわかる。



証明 1(改)

AB=BC

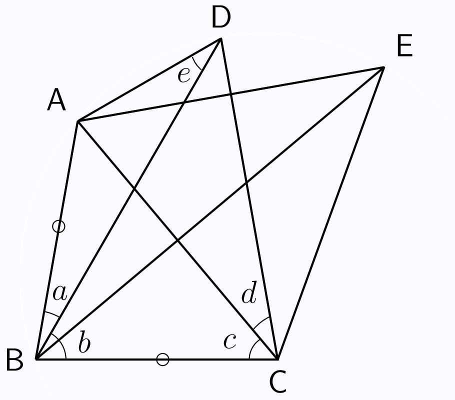
ならば、線分 BE は AC と直交し、四角形 ABCE は凧型であることがわかる。

よって、

$\angle$ABE= $\angle$ ABC/2 $= \dfrac{a+b}{2}$

$\angle$BEA= $\angle$ CEA/2 $= 30^\circ$

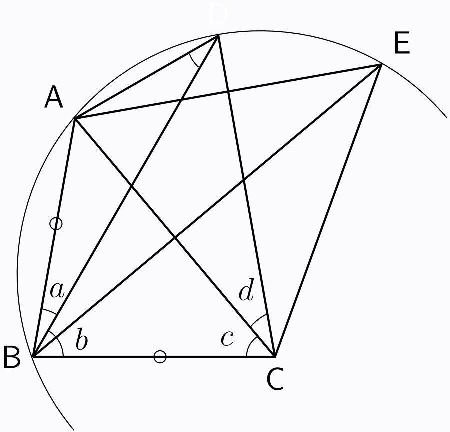
となる。



また、$\angle$ACD= 30° であり(条件 $d = 30^\circ$ 追加)、三角形 ACE は正三角形なので、線分 CD は辺 AE の垂直二等分線になっている。

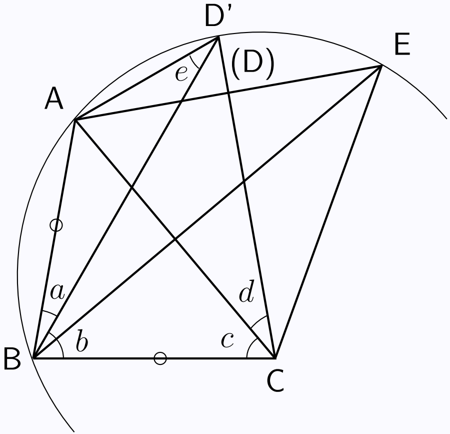
証明 1(改)

ここで、三角形 ABE の外接円 O を考える。



証明 1(改)

ここで、三角形 ABE の外接円 O を考える。
この外接円と直線 CD の交点を D' とし、D' と D が一致する条件を探す。



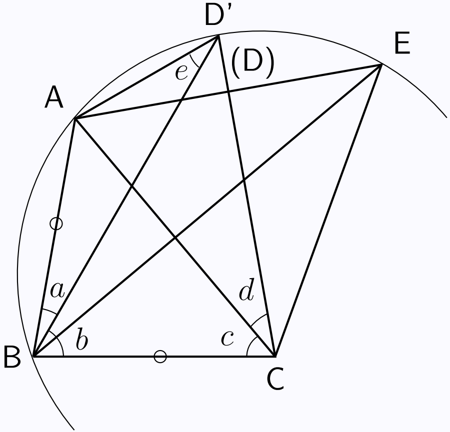
証明 1(改)

ここで、三角形 ABE の外接円 O を考える。
この外接円と直線 CD の交点を D' とし、D' と D が一致する条件を探す。

D' は円 O 上の点であり、対称性により、

$$\overset{\frown}{\text{AD'}} = \overset{\frown}{\text{D'E}}$$

がいえるので、



$$\angle \text{ABD'} = \angle \text{D'BE} = \angle \text{ABE}/2$$

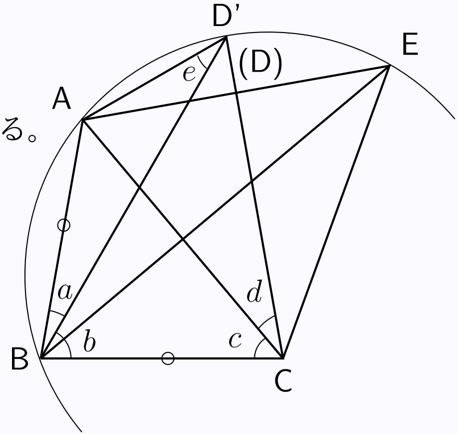
である。

証明 1(改)

よって、

$$\angle \mathrm{ABE}/2 = \angle \mathrm{ABD}$$

が言えれば、D と D' は一致する。



証明 1(改)

よって、

$$\angle \mathrm{ABE}/2 = \angle \mathrm{ABD}$$

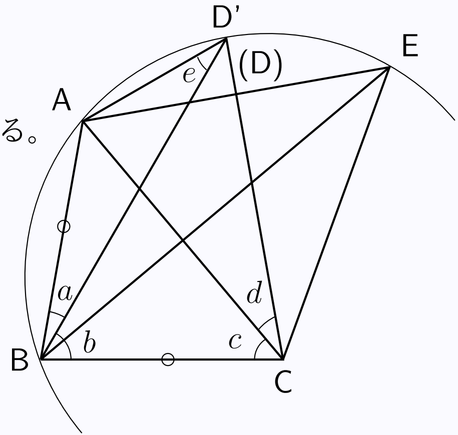
が言えれば、D と D' は一致する。

よって、

$$\angle \mathrm{ABE}/2 = \frac{a+b}{2}/2$$

$$\angle \mathrm{ABD} = a$$

より、条件 $b = 3a$ をえる。



証明 1(改)

以上より、条件

$$a + b + 2c = 180^\circ$$

$$d = 30^\circ$$

$$b = 3a$$

を満たせば、$e = 30^\circ$ が得られる。

証明 1(改)

これを満たす (a, b, c, d) の組を 10 度きざみで見つけると、

$$(10, 30, 70, 30),\ (20, 60, 50, 30),\ (30, 90, 30, 30),\ (40, 120, 10, 30)$$

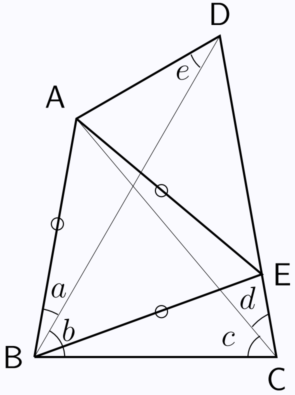
の 4 組である。

ちなみに、第 3 者は $a = d$ より、明らか。

また、第 4 者は $a > d$ のため、$(30, 10, 120, 40)$ に分類される

$(e = 10^\circ + 120^\circ - 30^\circ = 100^\circ)$。

証明 2



線分 DC 上に ∠EBC$= 20°$ となるように、

点 E をとる。

∠BCE$=$ ∠CEB$= 80°$ より、BC=BE

∠BCA$=$ ∠BAC$= 50°$ より、BC=BA

よって、BA=BE となり ∠ABE$= 60°$ より、

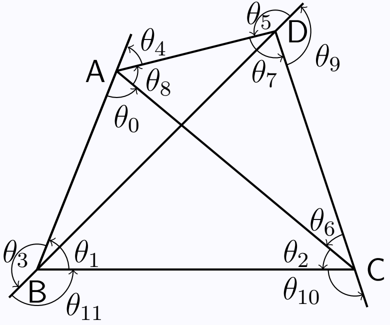
三角形 ABE は正三角形。

∠DBE$=$ ∠EDB$= 40°$ なので、

DE=BE=AE である。

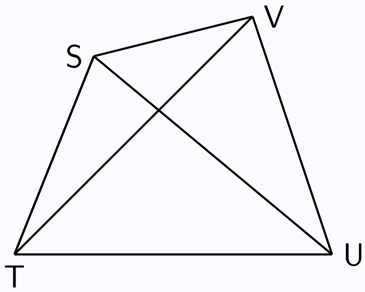
したがって、3 点 A,B,D は E を中心とする同一円周上にあり、円周角の定理より ∠BDA$=$ ∠BEA$/2 = 30°$ である。

線角について



$$
\begin{aligned}
&\theta_0 = {}^*\angle\ \mathsf{CAB}, && \theta_1 = {}^*\angle\ \mathsf{ABC}, && \theta_2 = {}^*\angle\ \mathsf{BCA},\\
&\theta_3 = {}^*\angle\ \mathsf{DBA}, && \theta_4 = {}^*\angle\ \mathsf{BAD}, && \theta_5 = {}^*\angle\ \mathsf{ADB},\\
&\theta_6 = {}^*\angle\ \mathsf{ACD}, && \theta_7 = {}^*\angle\ \mathsf{CDA}, && \theta_8 = {}^*\angle\ \mathsf{DAC},\\
&\theta_9 = {}^*\angle\ \mathsf{BDC}, && \theta_{10} = {}^*\angle\ \mathsf{DCB}, && \theta_{11} = {}^*\angle\ \mathsf{CBD}
\end{aligned}
$$

線角について



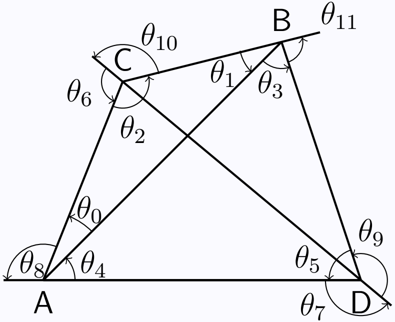
ここで、上記の S,T,U,V の組は、

$$(\mathrm{S,T,U,V}) = (\mathrm{A,B,C,D}),\ (\mathrm{A,C,B,D}),\ (\mathrm{A,D,B,C}),$$
$$(\mathrm{A,B,D,C}),\ (\mathrm{A,C,D,B}),\ (\mathrm{A,D,C,B})$$

のローテンションでえられる。

線角について

例えば、(S,T,U,V)=(C,A,D,B) の場合、$\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{11}$ は以下の通りである。



系列 1-1 について

$x \neq 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$ のとき、

$$\begin{array}{lll}
\theta_0 \equiv x, & \theta_1 \equiv 30^\circ, & \theta_2 \equiv 150^\circ - x, \\
\theta_3 \equiv 60^\circ + x, & \theta_4 \equiv x, & \theta_5 \equiv 120^\circ - 2x, \\
\theta_6 \equiv 60^\circ + x, & \theta_7 \equiv 120^\circ + x, & \theta_8 \equiv -2x, \\
\theta_9 \equiv 120^\circ + x, & \theta_{10} \equiv 150^\circ, & \theta_{11} \equiv 90^\circ - x
\end{array}$$

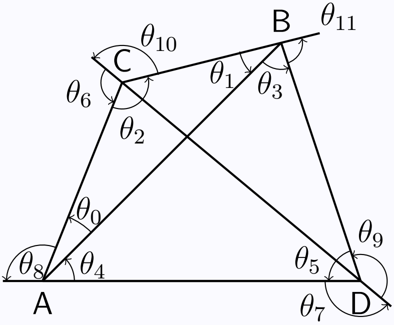
が成り立つ。

このとき、底辺は 4 通り

AD, DB, BC, CA

考えられる。(鏡映はここでは考えない)

底辺 AD を考える。



右図に当てはめると、

$a = \theta_0 \ (\equiv x)$,

$b = \theta_4 \ (\equiv x)$,

$c = -\theta_7 \ (\equiv -120^\circ - x)$,

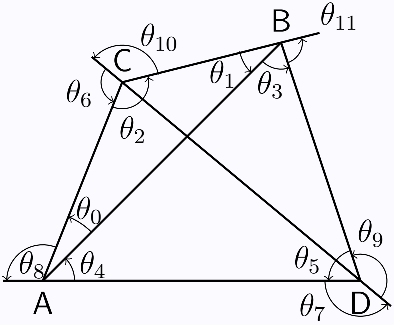
$d = -\theta_9 \ (\equiv -120^\circ - x)$,

である。

$x = 10^\circ$ のとき、$(a, b, c, d) = (10^\circ, 10^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$ である。

逆に、$(a, b, c, d) = (20^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 40^\circ)$ が与えれると、$x = 20^\circ$ が得られ、$(a, b, c, d) = (20^\circ, 20^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$ が与えれると条件を満たす x は存在しない。

底辺 DB を考える。



右図に当てはめると、

$a = -\theta_7 \ (\equiv -120^\circ - x)$,

$b = -\theta_9 \ (\equiv -120^\circ - x)$,

$c = \theta_3 \ (\equiv 60^\circ + x)$,

$d = \theta_1 \ (\equiv 30^\circ)$

である。

$x = 10^\circ$ のとき、$(a, b, c, d) = (50^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 30^\circ)$ である。

逆に、$(a, b, c, d) = (20^\circ, 20^\circ, 100^\circ, 30^\circ)$ が与えれると、$x = 40^\circ$ が得られ、$(a, b, c, d) = (20^\circ, 20^\circ, 90^\circ, 30^\circ)$ が与えれると条件を満たす x は存在しない。

底辺 DB を考える。

ちなみに、

$$(50^\circ, 50^\circ, 70^\circ, 30^\circ)$$

は、$a < d$ より

$$(30^\circ, 70^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$$

を採用する。

すなわち、底辺 BD を採用している。

(S,T,U,V)=(C,A,D,B) のまとめ

(S,T,U,V)=(C,A,D,B) のとき、(a, b, c, d) は、

$$
\begin{aligned}
(a, b, c, d) =& (\theta_0, \theta_4, -\theta_7, -\theta_9), (-\theta_7, -\theta_9, \theta_3, \theta_1), \\
& (\theta_3, \theta_1, -\theta_{10}, -\theta_6), (-\theta_{10}, -\theta_6, \theta_0, \theta_4)
\end{aligned}
$$

の 4 パターン (鏡映を入れれば 8 パターン) になる。 ここで、系列 $1-1$ を考えるなら与えられた (a, b, c, d) に対して、

$$
\begin{aligned}
&\theta_0 \equiv x, && \theta_1 \equiv 30^\circ, && \theta_3 \equiv 60^\circ + x, && \theta_4 \equiv x, \\
&\theta_6 \equiv 60^\circ + x, && \theta_7 \equiv 120^\circ + x, && \theta_9 \equiv 120^\circ + x, && \theta_{10} \equiv 150^\circ
\end{aligned}
$$

をみたす x $(\neq 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ)$ を見つければよい。

まとめ

(S,T,U,V)=(C,A,D,B) において、以下、

$$\text{系列 } 1-2, 1-3, \ldots, 1-17, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4$$

を考えればよい。

さらに (同様に)、

(S,T,U,V) =(A,B,C,D), (A,C,B,D), ~~(A,D,B,C)~~,

(A,B,D,C), (A,C,D,B), (A,D,C,B)

を考えればよい。

メモ

(S,T,U,V)=(C,A,D,B) で、

$$\begin{aligned}(a,b,c,d) =&(\theta_0,\theta_4,-\theta_7,-\theta_9),(-\theta_7,-\theta_9,\theta_3,\theta_1),\\ &(\theta_3,\theta_1,-\theta_{10},-\theta_6),(-\theta_{10},-\theta_6,\theta_0,\theta_4)\end{aligned}$$

となる場合を見つけるプログラムを考える (ため、符号を変える)。

$$(\theta_0,\theta_4,\theta_7,\theta_9),(\theta_7,\theta_9,\theta_3,\theta_1),(\theta_3,\theta_1,\theta_{10},\theta_6),(\theta_{10},\theta_6,\theta_0,\theta_4)$$

$$\begin{aligned}&\theta_0\equiv x, &&\theta_1\equiv 30^\circ, &&\theta_3\equiv 60^\circ+x, &&\theta_4\equiv x,\\ &\theta_6\equiv 120^\circ-x, &&\theta_7\equiv 60^\circ-x, &&\theta_9\equiv 60^\circ-x, &&\theta_{10}\equiv 30^\circ\end{aligned}$$

をみたす x ($\neq 0^\circ,30^\circ,60^\circ,90^\circ,120^\circ,150^\circ$) を見つる。

メモ

```
int ADBC11(int a,int b,int c,int d){
  int u[10]={1,0,1,1,-1,-1,-1,0};
  int v[10]={0,30,60,0,120,60,60,30};
  int m[4][4]={{0,3,5,6},{5,6,2,1},{2,1,7,4},{7,4,0,3}};
  int x,y;
  for(y=0;y<4;y++){
    for(x=1;x<180;x++){
    if(x!=30 && x!=60 && x!=90 && x!=120 && x!=150){
      if(a==senkaku(u[m[y][0]]*x+v[m[y][0]])&&
      b==senkaku(u[m[y][1]]*x+v[m[y][1]])&&
      c==senkaku(u[m[y][2]]*x+v[m[y][2]])&&
      d==senkaku(u[m[y][3]]*x+v[m[y][3]]))
        return y+1;
      }
    }
  }
  return 0;
}
```

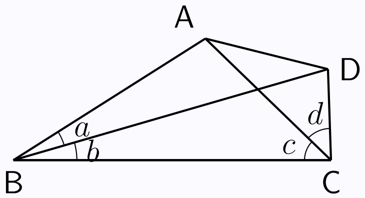
逆に...

与えれた a, b, c, d が

$$a = b = x, c = d = 60^\circ - x$$

を満たす x が存在するようなとき、

∠BDA の値が 30° と言えるのか。



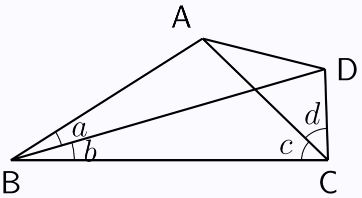
逆に...

与えれた a, b, c, d が

$$a = b = x, c = d = 60° - x$$

を満たす x が存在するようなとき、

∠BDA の値が 30° と言えるのか。



まず、AC と BD の交点を E とする。

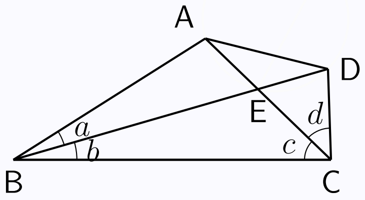
逆に...

与えれた a, b, c, d が

$$a = b = x, c = d = 60^\circ - x$$

を満たす x が存在するようなとき、

$\angle$BDA の値が 30° と言えるのか。



まず、AC と BD の交点を E とする。

さらに、直線 BA と直線 CD の交点を F とする。

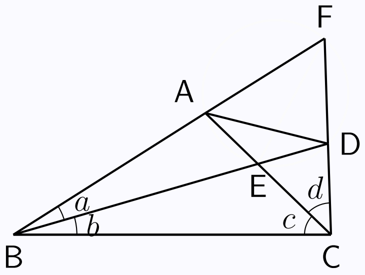
逆に...

与えれた a, b, c, d が

$$a = b = x, c = d = 60^\circ - x$$

を満たす x が存在するようなとき、

∠BDA の値が 30° と言えるのか。



まず、AC と BD の交点を E とする。

さらに、直線 BA と直線 CD の交点を F とする。

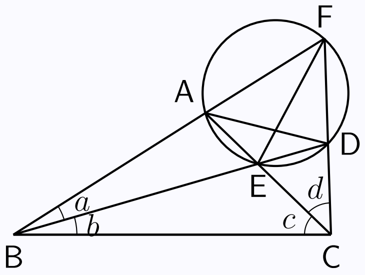
逆に...

与えれた a, b, c, d が

$$a = b = x, c = d = 60° - x$$

を満たす x が存在するようなとき、

∠BDA の値が 30° と言えるのか。



まず、AC と BD の交点を E とする。

さらに、直線 BA と直線 CD の交点を F とする。

点 F と E を結び、A,E,D を通る円を描く。

底辺 BD を考える。

右図に当てはめると (右図は DB なので)、

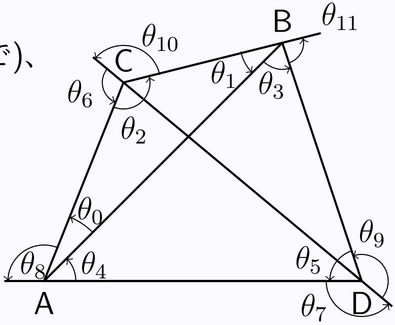
$a = \theta_1 \ (\equiv 2x)$,

$b = \theta_3 \ (\equiv 90^\circ - 3x)$,

$c = -\theta_9 \ (\equiv 2x - 150^\circ \equiv 2x + 30^\circ)$,

$d = -\theta_7 \ (\equiv 2x - 150^\circ \equiv 2x + 30^\circ)$

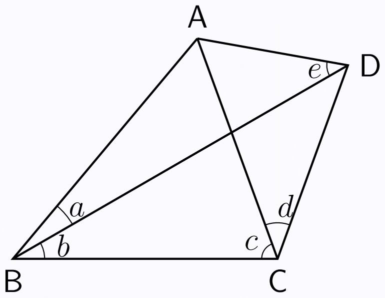
である。



$x = 10^\circ$ のとき、$(a, b, c, d) = (20^\circ, 60^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$ である。

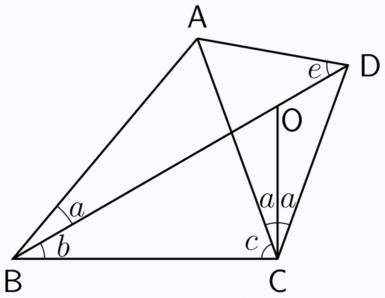
$d = 2a, 2c + d = 180°$

まず $d = 2a$ なので、∠ACD の二等分線をかき、線分 BD との交点を O とする。



$d = 2a, 2c + d = 180^\circ$

まず $d = 2a$ なので、∠ACD の二等分線をかき、線分 BD との交点を O とする。



このとき、

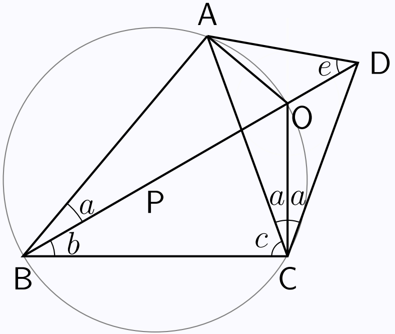
$$\angle \text{OCA} = \angle \text{OBA}$$

なので、4 点 A,B,C,O は同一円周上にある。

そこで、この円の中心を P とする。

$d = 2a, 2c + d = 180^\circ$

また、P と A, P と C を線分で結ぶ。



$d = 2a, 2c + d = 180°$

また、P と A, P と C を線分で結ぶ。

このとき、

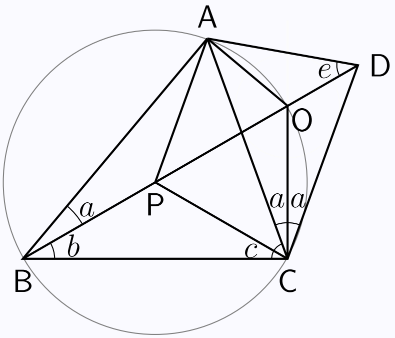
∠CAP= ∠CAB−∠PAB

$= 180° - a - b - c - a$

$= 180° - 2a - b - c$

∠CDP= $180° - 2a - b - c$

なので、4 点 A,P,C,D は同一円周上にある。



$d = 2a, 2c + d = 180^\circ$

よって、△PBC は二等辺三角形より

$e = \angle$PCA$= c - b$

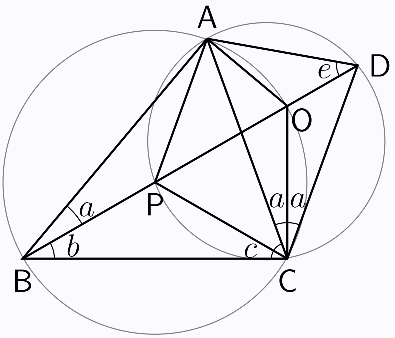
である。

条件 $d = 2a, 2c + d = 180^\circ$ より、

$2c + 2a = 180^\circ \Rightarrow a + c = 90^\circ$

$e = c - b = 90^\circ - a - b$

ともかける。



【補足】 点 O が △ACD の内心であることを示して、e を求める方法もある。