第2章

行列

2.1 行列の演算

2.1.1 行列とは

定義 (行列)

下のように"数"を正方形 (長方形) の形に並べ、丸カッコ (と) 又は 角カッコ [と] で囲んだものを**行列**といい、並べた各数を、その行列の**成分**という。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

行列を表す記号は、**大文字**のアルファベットを使うことが多い。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

などである。

行列の成分の横の並びを**行**、たての並びを**列**という。行は上から順に、第 1 行, 第 2 行,.... といい、列は左から順に第 1 列, 第 2 列,.... という。

上の例で、行列 A の第 1 行は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix}$ で、第 2 列は $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ である。

♠ **注意!** この行を**行ベクトル (横ベクトル)**、列を**列ベクトル (縦ベクトル)** と言うこともある。逆に、行ベクトルや列ベクトルも行列の 1 種である。

行列の第 i 行、第 j 列の交点にある成分を i **行** j **列成分** または (i, j) **成分**という。行列 A の (2,1) 成分は 3 である。

♠ 余談　行ベクトルは $(a\ b)$ や $(a\ b\ c)$ と表す。しかし、後に出てくるベクトルは (a, b) と表すことになる。したがって、$(a\ b)$ や $(a\ b\ c)$ をベクトルと呼ぶことに抵抗があるかもしれないが、演算等で不都合が出ないため、気にせず使ってもらいたい。

2.1.2　正方行列と対角成分

一般の行列は、行の数と列の数は同じではないが、ここでは行と列の数が同じものを扱う。行の数と列の数が同じ n の行列を n **次正方行列**という。

また、正方行列の 1 行 1 列成分、2 行 2 列成分、3 行 3 列成分, ... を、その正方行列の**対角成分**という。

先の例の場合は、行列 A が 2 次正方行列、行列 B が 3 次正方行列である。例えば、行列 A の対角成分の和を求めよ。と言われたら、$-1+2=1$ である。

2.1.3　行列の和、差、定数倍

定義 (行列の相等)

行列 A と B は、それぞれの行数, それぞれの列数が同じなら、**同じ形の行列**といい、さらに対応する成分がすべて等しとき A と B は等しいといい、$A=B$ で表す。

例 2.1.1.

$$\begin{pmatrix} 4/2 & 1.5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

行列の演算として、行列の和、行列の定数倍を定義し、行列の差を定義する。 和や差は同じ形の行列に対して定義することができ、それらは 2 次正方行列の場合と同様に定義することができる。

したがって、以下の演算の定義は 2 次正方行列の場合で定義していく。

定義 (行列の和)

2 つの 2 次正方行列 A と B に対して、行列の和 $A+B$ を

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する。

2 次正方行列と 2 次正方行列の和は**2 次正方行列**となることに注意。

例 2.1.2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2.1.3. 2 次正方行列以外も同様に定義でき、演算することが可能である。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定義 (行列の定数倍)

実数 k に対して、2 次正方行列 A を k 倍した行列 kA を次で定義する。

$$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

例 2.1.4.

$$3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 2 \\ -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

♠ **注意!** 行列 A の -1 倍、$(-1)A$ を $-A$ と書く。

行列の和と定数倍を定義することによって、行列の差が簡単に定義される。

定義 (行列の差)

同じ形の行列 A と B に対して、行列の差 $A - B$ を次で定義する。

$$A - B = A + (-1)B$$

発展問題 . 以下の計算をせよ。

$$3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} =$$

行列の和、定数倍に関して次の計算法則が成り立つ。

行列の計算法則

A, B, C を 2 次 (または 3 次) 正方行列とし、k, l を実数とするとき以下が成り立つ。

(i) $A + B = B + A$ (行列の和の交換法則)

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (行列の和の結合法則)

(iii) $k(A + B) = kA + kB$ (行列の定数倍の行列に関する分配法則)

(iv) $(k + l)A = kA + lA$ (行列の定数倍の定数に関する分配法則)

(v) $(kl)A = k(lA)$ (行列の定数倍の結合法則)

2.1.4　演習問題 III

問題 2.1.1. 行列 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。

(1) A は何行何列の行列か。(行の数と、列の数を答えよ。)

(2) A の (2,1) 成分 (要素) は何か。　(3) A の (2,2) 成分 (要素) は何か。

(4) A の第 2 行をベクトルの形で答えよ。　(5) A の第 1 列をベクトルの形で答えよ。

問題 2.1.2. 以下の行列の計算をせよ。

(1) $3\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$　(2) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$　(5) $2\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3 \\ 3/2 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 10 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$　(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$　(9) $\frac{1}{5}\left\{ 0.5\begin{pmatrix} 50 & 100 \\ -50 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

(10) $1.3\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 0.5\left\{ 3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \right\}$

問題 2.1.3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ について、次の問に答えよ。

(1) A の (3,2) 成分 (要素) は何か。　(2) A の (1,3) 成分 (要素) は何か。

(3) A の第 2 行をベクトルの形で答えよ。　(4) A の第 3 列をベクトルの形で答えよ。

(5) A の対角成分の和を求めよ。

問題 2.1.4. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ y-2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} z & x+2y \\ w & xz \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えよ。

(1) $3A - B = O$ を満たす w, x, y, z を求めよ。

(2) $A - 2B = O$ を満たす w, x, y, z を求めよ。

(3) $A + B = O$ を満たす w, x, y, z を求めよ。