# 第4章

# 線型写像

## 4.1 線型写像と線型変換 (一次変換)

### 4.1.1 一次変換の定義と性質

まず、一般的な定義を紹介しておく。

**定義 (線型写像)**

$n$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ から $m$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^m$ への写像 $f$ が、

$$f(k\mathbf{x}+l\mathbf{y}) = kf(\mathbf{x}) + lf(\mathbf{y}) \qquad \text{for } {}^\forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,\ {}^\forall k,l \in \mathbb{R}$$

を満たすとき、写像 $f$ を**線型写像**という。
特に $m=n$ のとき、線型写像 $f$ を **線型変換** または **一次変換**という。

この定義から、次の命題が成り立つ。

**命題 (線型性)**

線型写像 $f$ において、次の性質が成り立つ。

(1) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

(2) $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}) \quad \text{for } {}^\forall k \in \mathbb{R}$

この命題は上の定義において、$k=1, l=1$ とすれば (1)、$l=0$ とすれば (2) がいえることは容易にわかる。さらに、この性質 (2) から解るように、$k=0$ とすると

(0) $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$

が解る。これを 0 番目の命題とすることもある。実際に、ある写像が一次変換 (線型写像) か否か確認するとき、$\mathbf{o}$ の行先が $\mathbf{o}$ か確かめることは有用である。

♣ **補足** 線型写像の定義を、この命題で行う場合もある。すなわち、(1) と (2) を満たすような写像を線型写像と定義する。

**例題.** 写像 $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ をそれぞれ

$$f(x,y) = (x-y, -x), \quad g(x,y) = (y, x-1), \quad h(x,y) = (x^2, y^2)$$

で定めるとき、写像 $f, g, h$ は一次変換か否か答えよ。

$f$ は一次変換の命題 (1), (2) を満たすので 一次変換である。
$g$ は一次変換でない。$g$ は命題 (0) を満たさない。
$h$ は命題 (0) は満たすが、命題 (1), (2) は満たさないので、$h$ は一次変換でない。

現段階では一般的な線型写像を扱うのではなく、平面上の一次変換に限った場合を考える。その場合、次のように定義する。

**定義 (平面上の一次変換)**

平面上の点 $(x,y)$ に対して、平面上の点 $(x', y')$ への変換で、行列と列ベクトルを用いて

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される変換を**一次変換**または**線型変換**という。このとき、行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をこの一次変換の**表現行列**という。

**例 4.1.1.** 例題の写像 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x-y, -x)$ の表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ である。一次変換も、写像であるので、

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f : (x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$$

のように写像の記号を用いて表すこともある。

♠ **注意!** ”一次変換を求めよ”と”表現行列を求めよ”の違いを、明確に理解すること。

**例 4.1.2.** よく知られている平面上の変換は一次変換である。

[$x$ 軸に関する折返し] 平面上の点 $(x,y)$ は $(x,-y)$ に移る。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

[$y$ 軸に関する折返し] 平面上の点 $(x,y)$ は $(-x,y)$ に移る。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

[拡大縮小] $x$ 軸方向に $k$ 倍, $y$ 軸方向に $l$ 倍拡大, 縮小すると点 $(x, y)$ は $(kx, ly)$ に移る。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} kx \\ ly \end{pmatrix}$$

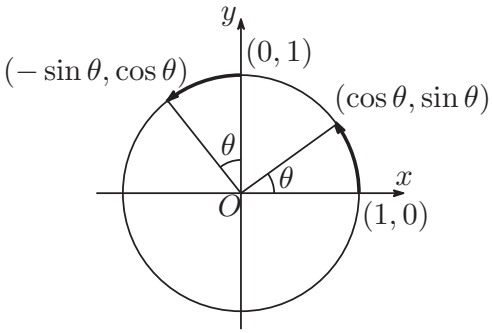
[回転] 点 $(x, y)$ を原点の周りに角度 $\theta$ だけ反時計回りに回転し得られる点 $(x', y')$ は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で与えられる。この変換を $f$ とすると

$$f : (1, 0) \mapsto (\cos\theta, \sin\theta), \ f : (0, 1) \mapsto (-\sin\theta, \cos\theta)$$

となることは明らかである。



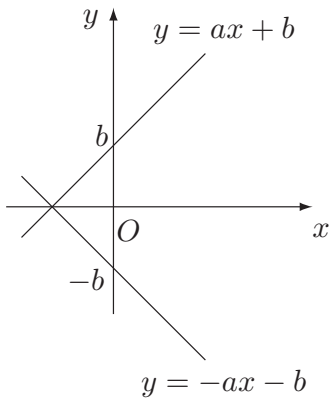

そこで、求める表現行列を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より反時計回りに角度 $\theta$ の回転に対する表現行列が求まる。

♣ **補足**　$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ や $f((x, y))$ のように ( や ) が 2 個続く場合、省略して 1 つにし、$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ や $f(x, y)$ と書くこともある。

### 4.1.2　直線の一次変換




直線を一次変換するには、まず、直線を平面上の点の集合

$$\text{"直線 } y = ax + b\text{"} = \{(t, at + b) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

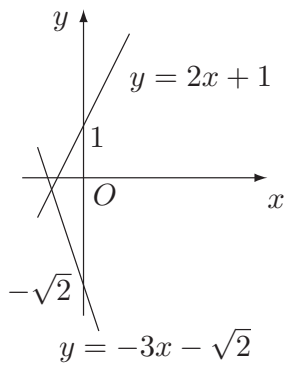
と思い、直線上の点を全て一次変換して得られる点の集まりを考えればよい。

**例 4.1.3.** 直線上の点を $x$ 軸に関する折返しをして得られる点は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ at + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -at - b \end{pmatrix}$$

である。このベクトル方程式から $t$ を消去すると直線の方程式 $y = -ax - b$ になる。よって、直線 $y = ax + b$ を $x$ 軸に関して折返すと直線 $y = -ax - b$ になる。

**例 4.1.4.** 直線 $y = 2x + 1$ を原点中心に反時計回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転して得られる集合は、直線であり、$y = -3x - \sqrt{2}$ となる。




### 4.1.3　基底

例 4.1.2 で、一次変換 (回転) の表現行列を求めるとき、

”2 つの点 (ベクトル) がどこに移されたか”

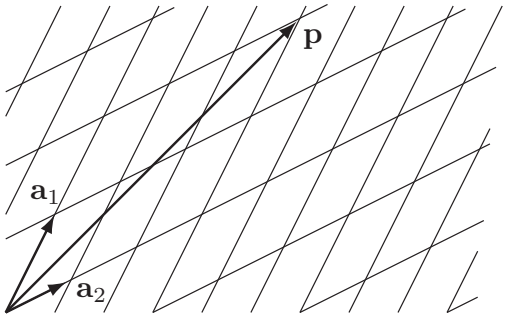
だけで表現行列を求めた。ここで重要なのは、

”方向の異なる 2 つのベクトル” がどのように移されたか

を考えたことである。(もちろん $\mathbf{o}$ はダメである。)

実際、2 つの方向の異なるベクトル $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ によって、平面上の任意の点の位置ベクトル $\mathbf{p}$ は、$\mathbf{p} = s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2 \quad (s, t \in \mathbb{R})$ と書ける。このようなベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ を (平面の) **基底** と呼ぶ。

$s, t$ を考える場合は、2 つのベクトルで出来る格子をイメージするとわかりやすい。

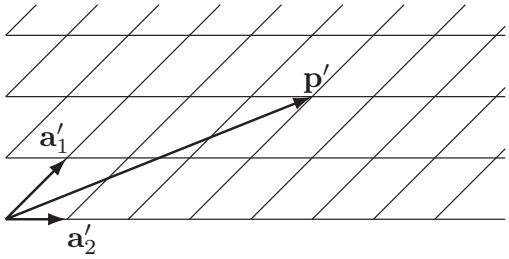



いま、一次変換 $f$ が与えられたとすると、一次変換の命題 (線型性) の (1), (2) より、

$$\mathbf{p}' = f(\mathbf{p}) = f(s\mathbf{a}_1 + t\mathbf{a}_2) = sf(\mathbf{a}_1) + tf(\mathbf{a}_2) = s\mathbf{a}_1' + t\mathbf{a}_2'$$

となる。

また、$\mathbf{a}_1' = f(\mathbf{a}_1), \mathbf{a}_2' = f(\mathbf{a}_2)$ であるので、2 つのベクトル $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ が $f$ によって、どのように移されたかが解れば、平面上の任意のベクトル $\mathbf{p}$ に対しても移る先がわかる。




$$\mathbf{p}' = f(\mathbf{p}) = f(2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2) = 2f(\mathbf{a}_1) + 3f(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{a}_1' + 3\mathbf{a}_2'$$

### 4.1.4　空間内の一次変換

空間 ($\mathbb{R}^3$) においても一次変換は 平面 ($\mathbb{R}^2$) と同様に定義できる。

**定義 (空間内の一次変換)**

空間における一次変換は、空間上の点 $(x, y, z)$ を $(x', y', z')$ に移す変換で

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

によって定められる。

そして、$\mathbb{R}^2$ で成り立った命題 (線型性) も成り立つ。

また、空間内でもよく知られた変換も一次変換となっている。以下に少し掲載しておく。

**例 4.1.5.** $x$-$y$ 平面に関する折返しは、空間内の点 $(x, y, z)$ は $(x, y, -z)$ に移る。この変換は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。$y$-$z$ 平面、$z$-$x$ 平面に関する折返しも同様に考えられる。

**例 4.1.6.** $z$ 軸の周りの角 $\theta$ 回転 (正の方向は $+\infty$ から見て反時計回り) は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。$x$ 軸, $y$ 軸に関する回転も同様に考えられる。(各自求めよ。)

**例 4.1.7.** $x$-$y$ 平面への射影は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表される。$y$-$z$ 平面、$z$-$x$ 平面への射影も同様に考えられる。(各自求めよ。)

♣ **補足**　平面内も同様であるが、空間内においても、平行移動は写像 (変換) であるが、線型写像 (一次変換) ではない。明らかに性質 (0) を満たさない。

♢ **発展**　さらには、

$$f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f_3(x, y, z) = (x - 2y, x + 3z)$$

のような線型写像 (変換ではない) も考えられる。

### 4.1.5　演習問題 X

**問題 4.1.1.** 平面上の点 A$(2,1)$, B$(0,-2)$, C$(3,-1)$, D$(-2,1)$ に対して以下の座標を答えよ。

(1) 点 A を $x$ 軸に関して折り返して得られる点 A'.

(2) 点 B を $y$ 軸に関して折り返して得られる点 B'.

(3) 点 C を原点中心に反時計回りで角度 $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる点 C'.

(4) 点 D を $x$ 軸方向に 5 倍、$y$ 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍して得られる点 D'.

(5) (3) の点 C' を原点中心に反時計回りで角度 $\frac{3}{4}\pi$ 回転して得られる点 C".

**問題 4.1.2.** 平面上の直線 $l : y = 2x - 3$ に対して以下の直線の方程式を答えよ。

(1) 直線 $l$ を $x$ 軸に関して折り返して得られる直線 $l_1$.

(2) 直線 $l$ を $y$ 軸に関して折り返して得られる直線 $l_2$.

(3) 直線 $l$ を原点中心に反時計回りで角度 $\frac{\pi}{4}$ 回転して得られる直線 $l_3$.

(4) 直線 $l$ を $x$ 軸方向に 5 倍、$y$ 軸方向に $\frac{1}{3}$ 倍して得られる直線 $l_4$.

**問題 4.1.3.** 次の写像 $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ は一次変換か否か答え、一次変換の場合は表現行列を求めよ。

(1) $f_1(x,y) = (x+y, x-y)$

(2) $f_2(x,y) = (x+y, xy)$

(3) $f_3(x,y) = (x+1, y+1)$

(4) $f_4(x,y) = (\sin x, \cos y)$

(5) $f_5(x,y) = (2x, 2y)$

(6) $f_6(x,y) = (x, 0)$

**問題 4.1.4.** ある日、Y.M さんは埋められた宝の位置を示す紙を見つけた。その紙には、

> 庭に梅の木、桃の木、桜の木が一本ずつ立っている。
> 梅から桜に向って歩数を数えならが歩き、桜の木に着いたら右に 90 度向きを変えて、同じ歩数だけ歩け。そこに棒 1 を立てよ。
> また、梅から桃に向かって歩数を数えながら歩き、桃の木に着いたら左に 90 度向きを変え、同じ歩数だけ歩け。そこに棒 2 を立てよ。この 2 本の棒を結ぶ線の中点に宝が有る。

と書かれていた。

しかし、今では庭の梅の木は枯れてしまい、跡形も無くなっている。(T_T)

桃の木と桜の木の位置から、宝が埋められている場所を Y.M さんに教えてあげよ。