線形積分微分方程式に対する基本解の指数減少性

応用解析学研究室　Ｓ０４MM０４
大　坪　秀　人

諸言

本論文では、積分微分方程式

$$(\mathbf{E_0}) \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)x(s)\,ds + f(t), \quad t \geqq 0$$

または、

$$(\mathbf{E}) \qquad \dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-\infty}^t B(t-s)x(s)\,ds + p(t), \quad t \geqq \sigma$$

を扱う。ここで、A は $N \times N$ 行列、$f(t)$ と $p(t)$ は (有界な) N 列ベクトル関数、$B(\cdot)$ は $N \times N$ 行列値連続関数で　$\exists \gamma > 0 : \int_0^\infty \|B(s)\| e^{\gamma s}\,ds < \infty$ とする。

第１節では、解の存在と一意性、第２節では、解の表現公式を示した。第３節では、ラプラス変換の逆公式を用いて、基本解の指数減少性を示した。一方、第４章では、第３章と異なる方法、つまり、解作用素と解作用素の生成素のスペクトルを解析することで、解作用素の指数減少性を示した。

また、解作用素の指数減少性（定理 4.2 ）から、基本解の指数減少性を導くことが可能である。逆に、基本解の指数減少性（定理 3.2 ）から、解作用素の指数減少性を導くことも可能である。

1　解の存在と一意性

縮小写像の原理を用いることで、次の定理が得られる。

定理 1.1　任意の $x_0 \in \mathbb{C}^N$ に対して、 $\mathbb{R}^+$ で定義され、初期条件 $x(0) = x_0$ を満たす積分微分方程式 $(\mathbf{E_0})$ の解 $x(\cdot)$ が１つ、しかも唯１つ存在する。

特に、 $x(\cdot)$ は指数位の関数である。すなわち、

$$\exists K > 0, \delta > 0 : |x(t)| \leqq Ke^{\delta t} \qquad (\forall\, t \geqq 0)$$

さらに、定理 1.1 から、次の定理を導くことができる。

定理 1.2　任意の $\phi \in C^\gamma$ に対して、 $\mathbb{R}^+$ で定義され、初期条件

$$x(\sigma + \theta) = \phi(\theta) \qquad (\forall\, \theta \leqq 0)$$

を満たす積分微分方程式 $(\mathbf{E})$ の解 $x(\cdot)$ が1つ、しかも唯1つ存在する。
特に、 $x(\cdot)$ は指数位の関数である。
ここで、相空間 C^γ は $R^- = (-\infty, 0]$ とし

$$C^\gamma := C^\gamma(\mathbb{R}^-; \mathbb{C}^N) = \{\phi : \mathbb{R}^- \mapsto \mathbb{C}^N \mid \phi \text{ は連続} \,\&\, \lim_{\theta \to -\infty} |\phi(\theta)| e^{\gamma\theta} = 0\}$$

で定義する。

2 基本解による解の表現公式

$R(t)$ を

$$R'(t) = AR(t) + \int_0^t B(t-s)\, R(s)\, ds\,, \qquad R(0) = E \quad (N \times N \text{ 単位行列})$$

の（行列）解とする。 $R(t)$ は積分微分方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_0^t B(t-s)\, x(s)\, ds$$

の基本解（または基本行列）と呼ばれる。
ラプラス変換を利用して、 $(\mathbf{E_0})$ と $(\mathbf{E})$ に対する解の表現公式を導くことができる。

定理 2.1 初期条件 $x(0) = x_0$ を満たす積分微分方程式 $(\mathbf{E_0})$ の解は次式で与えられる：

$$x(t) = R(t)\, x_0 + \int_0^t R(t-s)\, f(s)\, ds$$

定理 2.2 初期条件 $x(\sigma + \theta) = \phi(\theta) \quad (\forall \theta \leqq 0)$ を満たす積分微分方程式 $(\mathbf{E})$ の解 $x(\cdot; \sigma, \phi, p)$ は次式で与えられる：

$$\begin{aligned} x(t; \sigma, \phi, p) \;&=\; R(t-\sigma)\, \phi(0) + \int_\sigma^t R(t-u) \left(\int_{-\infty}^0 B(u - \sigma - \tau)\, \phi(\tau)\, d\tau \right) du \\ &\qquad + \int_\sigma^t R(t-u)\, p(u)\, du\,, \quad t \geqq \sigma \end{aligned}$$

3 ラプラス変換の逆公式と基本解の指数減少性

定理 3.1 （ラプラス変換の逆公式）

c を $\displaystyle\int_0^\infty |g(t)|\, e^{-ct}\, dt < \infty$ を満たす任意の数とする。さらに、 g と g' が各有限区間上で区分連続であるとする。このとき、

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \hat{g}(z)\, e^{zt}\, dz = \frac{g(t-0) + g(t+0)}{2} \qquad (t > 0)$$

ここで、 $\hat{g}$ は g のラプラス変換である： $\hat{g}(z) := \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt$

s を未知数とする方程式

$$\det(\, sE - A - \hat{B}(s)\,) = 0 \qquad (\mathrm{Re}\; s > -\frac{\gamma}{2})$$

を $(\mathbf{E_0})$ の特性方程式と呼ぶ。また、特性方程式の解を $(\mathbf{E_0})$ の特性根と呼ぶ。

ラプラス変換の逆公式を利用することで、基本解 $R(t)$ の指数減少性を示すことができる。

$\boxed{\textbf{定理 3.2}}$ ある数 $\gamma > 0$ に対し、 $\int_0^\infty \|B(t)\|\, e^{\gamma t}\, dt < \infty$ とする。
このとき、次の２つの命題は同値である：

（i） $(\mathbf{E_0})$ の特性根の実部はすべて負である。すなわち、

$$\det(\, zE - A - \int_0^\infty B(t)\, e^{-zt}\, dt\,) \neq 0 \qquad (\forall\, \mathrm{Re}\; z \geqq 0)$$

（ii） $(\mathbf{E_0})$ の基本解 $R(t)$ は指数減少性を満たす。すなわち、

$$\exists\, M > 0\,,\, \varepsilon > 0 \,:\, \|R(t)\| \leqq M\, e^{-\varepsilon t} \qquad (\forall\, t \geqq 0)$$

4　コンパクト作用素と解半群の指数減少性

任意の $t \geqq 0$ に対し、相空間 C^γ 上の作用素 $T(t)$ を

$$T(t)\phi = x_t(0, \phi, 0) \qquad (\forall\, \phi \in C^\gamma)$$

と定義する。ここで、記号 $x_t(0,\phi,0)$ は $x_t(\theta; 0, \phi, 0) = x(t+\theta; 0, \phi, 0) \quad (\forall\, \theta \leqq 0)$ で定義された $\mathbb{R}^-$ 上の関数を表し、 C^γ に属する。実際には、解作用素 $T(t)$ が C^γ 上の強連続半群をなすことから、$T(t)$ を解半群と呼ぶことが多い。

バナッハ空間 X 上の強連続半群 $T(t)$ に対し、極限 $\lim_{h \to +0} \frac{T(h)x - x}{h}$ が X が内に存在するような x 全体を $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ で表す：

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\, x \in X \,:\, \lim_{h \to +0} \frac{T(h)x - x}{h} \text{ が } X \text{ 内に存在する} \,\}$$

明らかに、 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ は X の部分空間となる。各 $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ に対し、

$$\mathcal{A}x = \lim_{h \to +0} \frac{T(h)x - x}{h} = \left(\frac{d}{dt}^{+} T(t)x \right)\Bigg|_{t=0}$$

とおく。 $\mathcal{A}$ は $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ から X への線形作用素である。$\mathcal{A}$ を半群 $T(t)$ の生成素 (generator) と呼ぶ。線形作用素 $\mathcal{A}$ は必ずしも有界ではない。

$\boxed{\textbf{定理 4.1}}$ $\mathrm{Re}\; \lambda_0 > -\gamma$ とする。このとき、次の３つの命題は同値である。

（i） $\lambda_0 \in \sigma(\mathcal{A})$

（ii） $\lambda_0 \in P_\sigma(\mathcal{A})$

（iii） $\det \Delta(\lambda_0) = 0$

この場合、 $\mathcal{A}$ の λ_0 に対する固有空間は次式で与えられる：

$$\mathcal{N}(\mathcal{A} - \lambda_0 I) = \{\, e^{\lambda_0 *} b \,:\, b \in \mathbb{C}^N \ \&\ \Delta(\lambda_0) b = 0 \,\}$$

命題 4.1 $e^{-\gamma} < \delta < 1$ とする。このとき、十分大きな正数 t_0 に対して、次の関係が成り立つ：

$$[\sigma(T(t_0)\,) \cap \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > \delta\}\,] \subset e^{t_0 \sigma(\mathcal{A})}$$

特に、条件

$$(*) \qquad \det \Delta(z) := \det(zE - A - \int_0^\infty B(t) e^{-zt}\, dt) \neq 0 \qquad (\forall \operatorname{Re} z \geqq 0)$$

を仮定すると、 $T(t_0)$ のスペクトル半径は 1 より小さい： $r_\sigma(T(t_0)\,) < 1$

命題 4.1 を用いることで、解半群 $T(t)$ の指数減少性を示すことができる。

定理 4.2 積分微分方程式 (**E**) において、条件 $(*)$ が成り立つとする。このとき、解半群 $T(t)$ は指数的に減少する。すなわち、

$$\exists\, M \geqq 1, \quad \alpha > 0 \,:\, \|T(t)\| \leqq M e^{-\alpha t}, \qquad (\forall\, t \geqq 0)$$

特に、 (**E**) の零解は指数漸近安定である。

参考文献

[1] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators and applications to Partial Differential Equations*, Springer–Verlag, 1983

[2] 田辺広城著：関数解析　上、実教出版

[3] 村上悟、示野信一著：現象の数理、岡山理科大学応用数学科編

[4] 村上悟著：無限次元解析へのプレリュード（時間遅れをもつ方程式の線形理論を中心として)、岡山理科大学応用数学科編