バナッハ環の基礎理論とその応用

応用解析学研究室　Ｓ０４MM１１
堀　井　裕　太

緒言

本論文では、バナッハ空間であり、しかも環の構造を併せもつバナッハ環の基礎理論を紹介する。その応用として、ボルテラ差分方程式における基本解の総和可能性、及び Wiener の lemma を導く。

第１章においてバナッハ環の定義を与える。第２章において極大イデアル空間とその周辺定理について述べる。第３章においてボルテラ差分方程式の基本解の総和可能性について述べ、さらに Wiener の lemma の証明を与える。

1　バナッハ環の定義

定義 1

A を $\mathbb{C}$ 上のバナッハ空間とする。A 内の任意の元 x に対して積 xy が定義され、次の条件を満たすとき A をバナッハ環 (バナッハ代数) と呼ぶ。

${}^\forall x, y, z \in A, {}^\forall \lambda \in \mathbb{C}$ に対し、

(i) $(xy)z \;=\; x(yz)$　(結合法則)

(ii) $x(y+z) \;=\; xy + xz$　(分配法則)

(iii) $\lambda(xy) \;=\; (\lambda x)y \;=\; x(\lambda y)$

(iv) $\|xy\| \;\leqq\; \|x\|\|y\|$

バナッハ環 A において、

$$ {}^\forall x, y \in A \;:\; xy \;=\; yx $$

が成り立つとき、A を可換バナッハ環と呼ぶ。

$$ {}^\exists e \in A \quad (\|e\| = 1) \;:\; ex = xe = x \quad ({}^\forall x \in A) $$

が成立するならば、e は A の単位元と呼ばれる。このとき、A は単位元を持つバナッハ環となる。A を単位元をもつバナッハ環とするとき、$x \in A$ のスペクトルを $\sigma(x)$ で表し、そのスペクトル半径を $r_\sigma(x)$ で表す:

$$ r_\sigma(x) \;=\; \sup\{|\lambda| \;:\; \lambda e - x \text{ が } A \text{ で可逆}\} $$

2　バナッハ空間の指標とイデアル

A を単位元 e をもつ可換バナッハ環とする。関数 $\phi : A \to \mathbb{C}$ が

$$\begin{cases} \phi(\lambda a + \mu b) &= \lambda\phi(a) + \mu\phi(b) \\ \phi(ab) &= \phi(a)\phi(b) \end{cases} \qquad ({}^\forall a, b \in A,\ \ {}^\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$$

を満たすとき、ϕ を (A 上の) 指標と呼ぶ。$\mathcal{M}$ を A 上の非自明な指標全体としよう:

$$\mathcal{M} \ = \{\phi : A \to \mathbb{C} \mid \phi \text{は} A \text{上の非自明な指標}\}$$

$\mathcal{M}$ は A の極大イデアル空間と呼ばれる。
$x \in A$ とする。このとき、

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x) \qquad ({}^\forall \phi \in \mathcal{M})$$

によって写像 $\hat{x} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ を定義する。対応 $\hat{}: x \in A \mapsto \hat{x}$ を Gelfand 表現と呼ぶ。Gelfand 表現について以下の定理が成り立つ。

定理 1　(Gelfand 表現定理)

A を (単位元 e をもつ) 可換バナッハ環とし、$\mathcal{M}$ を A の (Gelfand 位相をもつ) 極大イデアル空間とする。このとき、Gelfand 表現 $\hat{}: x \in A \mapsto \hat{x}$ は準同型写像であり、関係式

$$r_\sigma(x) \ = \ \|\hat{x}\|_\infty \ \leqq \|x\| \qquad ({}^\forall x \in A)$$

を満たす。さらに次の性質を持つ:

(a) $\sigma(x) \ = \ \{\hat{x} \ : \ \phi \in \mathcal{M}\} \ = \ (\hat{x}\text{の値域})$

(b) $\|\hat{x}\|_\infty \ = \ r_\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$

(c) x が A 内で可逆 $\iff$ $\hat{x}(\phi) \neq 0 \qquad ({}^\forall \phi \in \mathcal{M})$

3　バナッハ環の応用

3.1　ボルテラ差分方程式への応用

ボルテラ差分方程式

$$\text{(E)} \qquad x(n+1) \ = \ \sum_{j=0}^{n} q(n-j)x(j), \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

を考え、基本解 $r(n)$ の総和可能性についての結果を与えよう。さて、空間

$$l^1(\mathbb{Z}^+) \ = \ \left\{ a : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C} \ \middle| \ \sum_{n=0}^{\infty} |a(n)| < \infty \right\}$$

を考え、$l^1(\mathbb{Z}^+)$ の任意の元 $a = \{a(n)\} = \big(a(0), a(1), a(2), \dots\big)$, $b = \{b(n)\} = \big(b(0), b(1), b(2), \dots\big)$ に対して、結合積

$$(a*b)(n) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a(n-k)b(k) \qquad ({}^\forall n \in \mathbb{Z})$$

として積を導入する。このとき $l^1(\mathbb{Z}^+)$ は可換バナッハ環であり、単位元 $e = (1, 0, 0, \dots)$ をもつ。

$l^1(\mathbb{Z}^+)$ の極大イデアル空間を求め、定理 1 を利用することにより、次の定理を導くことができる。

定理 2

$a = \{a(n)\} \in l^1(\mathbb{Z}^+)$ は次の条件を満たすものとする。

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(k)\omega^k \ \neq 0 \qquad ({}^\forall \omega \in \mathbb{C},\ |\omega| \leqq 1)$$

このとき、a は $l^1(\mathbb{Z}^+)$ において可逆である。それ故、

$${}^\exists b = \{b(n)\} \in l^1(\mathbb{Z}^+)\ :\ a*b = b*a = e$$

さて、$q = \{q(n)\} \in l^1(\mathbb{Z}^+)$ として、(スカラー) ボルテラ差分方程式 (E) を考える。漸化式

$$r(0) = 1, \quad r(n+1) = \sum_{j=0}^{n} q(n-j)r(j), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

によって定まる $r := \{r(n)\}_{n=0}^{\infty}$ を (E) の基本解と呼ぶ。定理 2 を利用することにより次の結果が導かれる。

定理 3

方程式 (E) において $q \in l^1(\mathbb{Z}^+)$ と仮定する。このとき次の (i),(ii) は同値である。

(i) (E) の特性方程式が $|z| \geqq 1$ で解をもたない。すなわち

$$z - \sum_{k=0}^{\infty} q(k)z^{-k} \neq 0 \qquad \left({}^\forall |z| \geqq 1\right)$$

をみたす。

(ii) (E) の基本解 $r(n)$ は総和可能: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |r(n)| \ < \infty$

方程式

$$(\mathrm{E}_\infty) \qquad x(n+1) \ = \ \sum_{j=-\infty}^{n} q(n-j)x(j) \qquad (n \in \mathbb{R}^+)$$

の解 $x(\cdot\,;\phi)$ は基本解を用いて

$$x(n;\phi) \ = \ r(n)\phi(0) + \sum_{s=0}^{n-1} r(n-s-1)\Big(\sum_{j=-\infty}^{-1} q(s-j)\phi(j)\Big)$$

と表される。この式を利用することにより次の関係が導かれる:

$$r \in l^1(\mathbb{Z}^+) \ \Rightarrow \ (\mathrm{E}_\infty) \text{ の零解は一様漸近安定}$$

3.2 Wener の lemma

定理 1 を利用して以下の定理を導くことができる。

定理 4 (Wiener の Lemma)

$f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ は連続で、絶対収束するフーリエ級数に展開可能とする：

$$\begin{cases} f(t) \ = \ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n)e^{int}, \qquad t \in [0, 2\pi) \\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(n)| < \infty \end{cases}$$

さらに、

$$f(t) \neq 0 \qquad \Big({}^\forall t \in [0, 2\pi)\Big)$$

とする。このとき、$\frac{1}{f(t)}$ は絶対収束するフーリエ級数に展開される:

$${}^\exists b = \{b(n)\} \in l^1(\mathbb{Z}) : \frac{1}{f(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b(n)e^{int} \qquad \Big({}^\forall t \in [0, 2\pi)\Big)$$

参考文献

[1] W.Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1988.

[2] A.E. Taylor and D.C. Lay, *Introduction to Functional Analysis*, Jhon Willy & Sons, 1980.

[3] 村上悟著, 無限次元解析へのプレリュード, 岡山理科大学大学院応用数学専攻講義テキスト