Multiple-precision arithmetic on MATLAB and its application to the real inverse Laplace transform

Hiroshi Fujiwara (Graduate School of Informatics, Kyoto Univ.)
藤原宏志 (京大・情報)

Abstract

In this talk we will introduce a new multiple-precision arithmetic environment on MATLAB. One of the main difficulties in numerical treatments of inverse problems is ill-posedness in the sense of Hadamard, and it causes numerical instability and rapid growth of computational errors. Multiple-precision arithmetic enables us to approximate real numbers and their arithmetic with arbitrary accuracy. As a result, it realizes reliable and high-accurate numerical treatments of unstable processes arising from inverse problems. We also exhibit its applications to real inversion of the Laplace transform.

1 Numerical instability and multiple-precision arithmetic

逆問題の多くは Hadamard の意味で非適切 (ill-posed) であり，特に数値的取り扱いにおいては離散問題が数値的に不安定となり，計算誤差が急激に増大して計算が破綻する．計算誤差としては，函数方程式の離散化から生じる離散化誤差のみならず，電子計算機での実数の近似に起因する丸め誤差も考慮する必要がある．通常は Tikhonov の正則化法に代表される安定化をおこなって数値計算をおこなうが，これは同時に，逆問題の解として重要な不連続性なども平滑化し，解の特異性を高精度に再構成できない場合がある．

現在では電子計算機での実数近似には IEEE754 で定められる倍精度が利用されており，10 進で約 16 桁の精度での表現と演算がなされている．一方，多倍長計算は任意の精度で実数を近似する手法であり，丸め誤差を必要なだけ小さくすることができる．近年，この多倍長計算および離散化誤差を同時に小さくする高精度離散化スキームを併用することで，非適切問題の直接計算の可能性が示されている [1, 2].

2 Proposed environment based on exflib

科学・技術計算で広く利用される MATLAB でも標準では倍精度が利用される．多倍長計算環境は Variable Precision Arithmetic (VPA) として提供されるが，VPA の利用には別途 Symbolic Math Toolbox および Simulink が必要となる．

そこで本研究では [2] などで利用されている高速多倍長計算環境 exflib [3] を MATLAB で利用するためのインターフェースを開発した．算術式には組込み型とほぼ同じ記法を実現し，四則演算は exflib 内のアセンブリ言語で実装されたルーチンで処理することで高速演算を実現している．現在までに実数型の四則演算，行列に対する `mldivide` (\) 演算，比較，10 進法での入出力，基本的な組込み函数等を提供している．現在は MacOSX (Version 10.11.2) と Linux の MATLAB 2015b に対応しており，Windows では 64 ビットの exflib とともに開発中である．

```
addpath('/Users/..../MATLAB/exflib');    % MEX directory
N = 10;

for i=1:N
  for j=1:N
    A(i,j) = exfloat( 1 ) / (i+j-1);
  end
  B(i) = exfloat( 1 )
end

x = A \ B;    % solve Ax = B

% Tikhonov regularization in the Euclid norm
a = exfloat( '1e-30' );
y = ( a*exflib_eye(N) + A'*A ) \ ( A'*B );
```

(a) Solving a Linear equation and Tikhonov regularization in the proposed environment

```
classdef exfloat

  properties (Constant, Access=private)

    precision10 = 1000;  % required precision in decimal digits
    ...
  end
  ...
end
```

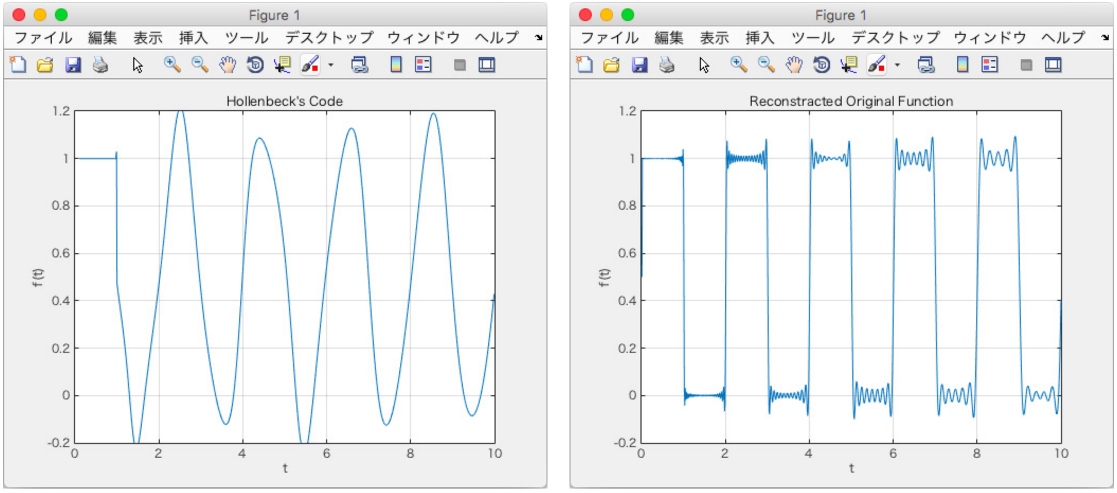
(b) Specification of computational precision in `@exfloat/exfloat.m`

Fig 1: MATLAB codes with the proposed multiple-precision arithmetic environment

提案する環境は `@exfloat` および `exflib` の 2 つのフォルダに含まれるファイルからなる．前者は多倍長数クラスと演算子等を定義し，後者は exflib による演算の実装である．ユーザファイルは `@exfloat` と同じフォルダに作成し，ファイル中で `exflib` フォルダの絶対パスを指定する．Hilbert 行列による連立方程式の求解および Tikhonov 正則化を計算するプログラム例を Fig. 1(a) に示す．現在の実装では，計算精度はユーザファイル中ではなく，`@exfloat` フォルダ中の `exfloat.m` ファイルで指定する (Fig. 1(b))．

3 Real inversion of the Laplace transform

Laplace 変換は種々の分野の数理科学的手法で現れる．そこでは逆変換とその近似計算も重要となるが，逆変換は直接的には第一種積分方程式であるため典型的な非適切問題であり，計算誤差への対処が必要となる．Bromwich 積分の離散化など種々の方法が提案されており，MATLAB 用にも逆変換プログラムが公開されている [5]．一方近年，多倍長計算により正則化法と高精度離散化を活用するアルゴリズムも提案されている [4]．そこでこれらの手法により，変換像が $F(s) = 1/s(1+e^{-s})$ となる原函数を数値的に求めた結果を Fig. 2 に示す．厳密解は全ての正の整数点上で不連続であるが，倍精度演算によるコード [5] の結果 Fig. 2(a) では，不連続性はほとんど再現されていない．一



(a) Results by Hollenbeck's code [5], double precision

(b) Results by [4] and the proposed multiple-precision arithmetic, 600 decimal digits

Fig 2: Numerical Real Inversions of the Laplace Transform on MATLAB

方，提案する多倍長計算環境により 600 桁の精度を利用し，[4] で正則化パラメータを $\alpha = 10^{-400}$ とすると Fig. 2(b) の結果を得る．図より不連続性が精度よく捉えられており，多倍長計算環境が数値的不安定性に対する計算に効果的であることがわかる．

謝辞　本研究の遂行にあたり科研費 (基盤 (C) 26400198) の助成を受けました．提案する環境の開発にあたり Chien-Hong Cho 氏 (National Chung Cheng University) と有益な議論をいただきました．長岡武宏氏 (京大) からは文献 [5] をご教示いただきました．

References

[1] H. Imai and T. Takeuchi, Some advanced applications of the spectral collocation method, *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.*, Vol. 17 (2002), pp. 323–335.

[2] H. Fujiwara and Y. Iso, Application of multiple-precision arithmetic to direct numerical computation of inverse acoustic scattering, *J. Physics Conference Series*, Vol. 73 (2007), Article No.012007.

[3] `http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/exflib/`

[4] H. Fujiwara and N. Higashimori, Numerical real inversion of the Laplace transform by using multiple-precision arithmetic, *Lib. Math. (N.S.)*, Vol. 34 (2014), pp. 5–21.

[5] K. Hollenbeck, `http://www.mathworks.com/matlabcentral/answers/uploaded_files/1034/invlap.m`