２階線形微分方程式の解の振動性と漸近挙動入門

田中　敏　(岡山理科大学理学部応用数学科) *

1. ２階線形微分方程式

２階線形微分方程式

$$u'' + b(x)u' + a(x)u = 0 \quad (x \geqq x_0) \tag{1.1}$$

について, 特に振動と呼ばれる性質について紹介する. ここで, $a, b \in C[x_0, \infty)$ とする.

1.1. ２階線形微分方程式の例. ２階線形微分方程式は様々なところで現れる. 例えば, 直線上を運動する物体を考えると, 時刻 t におけるその物体の位置を $u(t)$ とすると, 速度は $u'(t)$, 加速度は $u''(t)$ であり, 運動方程式「質量×加速度＝力」により, その物体の運動は２階線形微分方程式で記述される. 他にも電気回路なども２階線形微分方程式で表すことができる.

例 1.1. 次の楕円型偏微分方程式

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{1.2}$$

を考える. ここで, $u = u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, Δ はラプラス作用素

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

である. いま $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおく. 方程式 (1.2) の解で, r のみに依存するものを球対称解をという. 方程式 (1.2) の球対称解 $U(r)$ は次の２階線形微分方程式

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{dU}{dr} + \lambda U = 0$$

を満たす.

問題 1.1. 例 1.1 を確認せよ.

1.2. 変数変換. 変数変換により, 方程式 (1.1) は $b(x) = 0$ の形, すなわち,

$$y'' + f(t)y = 0 \quad (t \geqq t_0) \tag{E}$$

に帰着させることができる.

命題 1.1. $c(x) = e^{\int_{x_0}^x b(s)ds}$ のとき, 方程式

$$(c(x)u')' + c(x)a(x)u = 0 \quad (x \geqq x_0) \tag{1.3}$$

は (1.1) と同値な式である.

証明. 微分積分学の基本定理より,

$$c'(x) = e^{\int_{x_0}^x b(s)ds}\left(\int_{x_0}^x b(s)ds\right)' = c(x)b(x).$$

よって,

$$\begin{aligned}(c(x)u')' + c(x)a(x)u &= c'(x)u' + c(x)u'' + c(x)a(x)u \\ &= c(x)b(x)u' + c(x)u'' + c(x)a(x)u \\ &= c(x)[u'' + b(x)u' + a(x)u].\end{aligned}$$

$c(x) > 0$ であることに注意すれば, (1.1) と (1.3) は同値であることがわかる. □

---

*

2016/12/14

命題 1.1 より, 方程式

$$(p(x)u')' + q(x)u = 0 \quad (x \geqq x_0) \tag{1.4}$$

を考えることにする. ここで, p, $q \in C[x_0, \infty)$, $p(x) > 0$, $x \geqq x_0$ とする. このとき

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds = \infty \quad \text{または} \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds < \infty$$

である.

定理 1.1. $u(x)$ を方程式 (1.4) の解とする. 次の (i), (ii) が成り立つ:

(i)

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds = \infty$$

のとき,

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{p(s)} ds, \qquad y(t) = u(x)$$

と変数変換すると, $y(t)$ は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(x)q(x)y = 0, \quad t \geqq 0$$

を満たす.

(ii)

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds < \infty$$

のとき,

$$t = \left(\int_{x}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds \right)^{-1}, \qquad y(t) = tu(x)$$

と変数変換すると, $y(t)$ は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + t^{-4}p(x)q(x)y = 0, \quad t \geqq t_0 := \left(\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds \right)^{-1}$$

を満たす.

証明. (i) 最初に, $dt/dx = 1/p(x)$ より, $dx/dt = p(x)$ に注意しておく. 従って,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = p(x)\frac{du}{dx}$$

であるから,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dt} = -p(x)q(x)u = -p(x)q(x)y$$

を満たす. また, x の範囲 $x_0 \leqq x < \infty$ は t の範囲 $0 \leqq t < \infty$ に対応する.

(ii) まず,

$$\frac{dt}{dx} = -\left(\int_{x}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds \right)^{-2} \left(\int_{x}^{\infty} \frac{1}{p(s)} ds \right)' = \frac{t^2}{p(x)}$$

より, $dx/dt = t^{-2}p(x)$ であることに注意する. よって,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(tu) = u + t\frac{du}{dt} = u + t\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u + t^{-1}p(x)\frac{du}{dx}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{du}{dt} + \frac{d}{dt}\left(t^{-1}p(x)\frac{du}{dx}\right) \\
&= \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} - t^{-2}p(x)\frac{du}{dx} + t^{-1}\frac{d}{dt}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) \\
&= t^{-1}\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{dt} \\
&= t^{-3}p(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) \\
&= -t^{-3}p(x)q(x)u \\
&= -t^{-4}p(x)q(x)y
\end{aligned}
$$

が成り立つ. x の範囲 $x_0 \leqq x < \infty$ は t の範囲 $t_0 \leqq t < \infty$ に対応する. □

以上により, 今後は2階線形微分方程式を (E) の形で考えることにする. 方程式 (E) を考えるとき, t_0 は任意にとることができる (問題 1.2).

問題 1.2. 方程式 (E) において

$$w(t) = y(t+c)$$

と変数変換すると, $w(t)$ は

$$w'' + f(t+c)w = 0 \quad (t \geqq t_0 - c)$$

を満たすことを示せ.

方程式 (E) は $y(t) \equiv 0$ という解をもつ. この $y(t) \equiv 0$ を (E) の**自明解**という. 自明解でない解 ($y(t) \not\equiv 0$ である解) を**非自明解**という.

2. 縮小写像の原理

X を $\mathbf{R}$ 上の線型空間とする. 任意の $u, v \in X$ に対して,

(2.1) $$\|u\| \geqq 0,$$

(2.2) $$\|u\| = 0 \iff u = 0$$

(2.3) $$\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\| \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

(2.4) $$\|u+v\| \leqq \|u\| + \|v\|$$

を満たす $\|\ \|$ を**ノルム**という. ノルム $\|\ \|$ をもった線型空間 $(X, \|\ \|)$ を**ノルム空間**という.

ノルムの例

(1) $X = \mathbf{R}$ のとき, 通常の絶対値 $|\ \ |$ はノルムになる.

(2) $X = \mathbf{R}^n$ のとき, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して,

$$\|x\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

や

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqq i \leqq n} |x_i|$$

はノルムになる. 1つの線型空間 X に対して, 複数のノルムがある.

(3) $g \in C[a,b]$, $g(t) > 0$ $(a \leqq t \leqq b)$ を1つとる.

(2.5) $$\|u\| := \max_{a \leqq t \leqq b} g(x)|u(t)| \quad (u \in C[a,b])$$

とおく. これは $C[a,b]$ におけるノルムになる.

問題 2.1. (2.5) が $C[a,b]$ のノルムであることを示せ.

ノルム空間 $(X, \| \ \|)$ 内の点列 $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ $(u_i \in X)$ が

$$\|u_i - u_j\| \to 0 \quad (i > j,\ j \to \infty)$$

を満たすとき $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ を**コーシー列**という. また, ある $u \in X$ に対して,

$$\|u_i - u\| \to 0 \quad (i \to \infty)$$

が成り立つとき, $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ は極限 u をもつといい,

$$u_i \to u \quad (i \to \infty)$$

と表し, $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ は u に**収束する**という.

収束列はコーシー列である. 実際, u_i が u に収束するとき, (2.1), (2.4) より,

$$0 \leqq \|u_i - u_j\| = \|(u_i - u) - (u_j - u)\| \leqq \|u_i - u\| + \|u_j - u\|$$

であるから, $i > j$ として, $i \to \infty$ とすると, $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ はコーシー列であることがわかる.

しかし, コーシー列は収束列であるとは限らない. それが成り立つとき, 即ち, X 内の任意のコーシー列が収束するとき, X はノルム $\| \ \|$ について**完備**であるという. このとき, ノルム空間 $(X, \| \ \|)$ を **バナッハ空間**という.

$\mathbf{R}$ や $\mathbf{R}^n$ は上の (1), (2) のノルムに対してバナッハ空間になる.

定理 2.1. *$C[a,b]$ は (2.5) のノルムについてバナッハ空間である.*

定理 2.2 (縮小写像の原理)**.** *$(X, \| \ \|)$ をバナッハ空間とする. $T\colon\ X \to X$ が縮小写像, すなわち, ある定数 c $(0 < c < 1)$ に対して*

$$\|Tu - Tv\| \leqq c\|u - v\| \quad (u, v \in X)$$

を満たすならば, $Tu = u$ を満たす $u \in X$ がただ1つ存在する.

証明. この証明は Palais [5] によるものである.

(2.4) より,

$$\begin{aligned} ||u - v|| &= ||(u - Tu) + (Tu - Tv) + (Tv - v)|| \\ &\leqq ||u - Tu|| + ||Tu - Tv|| + ||Tv - v|| \\ &\leqq ||u - Tu|| + c||u - v|| + ||Tv - v||, \end{aligned}$$

であるから,

$$(1 - c)||u - v|| \leqq ||u - Tu|| + ||Tv - v||,$$

即ち,

$$||u - v|| \leqq \frac{1}{1 - c}(||Tu - u|| + ||Tv - v||). \tag{2.6}$$

が成り立つ. この (2.6) より, もし, $Tu = u$, $Tv = v$, u, $v \in X$ ならば, $||u - v|| \leqq 0$ が成り立つので, (2.1), (2.2) より, $u = v$ を得る. 従って, $Tu = u$ を満たす $u \in X$ は存在すれば一意である.

次に $Tu = u$ を満たす $u \in X$ が存在することを示す. $u_0 \in X$ を1つとる.

$$u_i = Tu_{i-1} \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

とおく. そのとき,

$$\|u_{i+1} - u_i\| = \|Tu_i - Tu_{i-1}\| \leqq c\|u_i - u_{i-1}\|$$

である. これをくり返し使うと

$$\|u_{i+1} - u_i\| \leqq c\|u_i - u_{i-1}\| \leqq c^2\|u_{i-1} - u_{i-2}\| \leqq \cdots \leqq c^i\|u_1 - u_0\| \tag{2.7}$$

を得る．(2.6), (2.7) より，

$$\begin{aligned}\|u_i-u_j\| &\leqq \frac{1}{1-c}(||Tu_i-u_i||+||Tu_j-u_j||)\\ &=\frac{1}{1-c}(||u_{i+1}-u_i||+||u_{j+1}-u_j||)\\ &=\frac{c^i+c^j}{1-c}||u_1-u_0||\end{aligned}$$

が成り立つので，$\{u_i\}$ はコーシー列である．定理 2.1 より u_i の極限 $u\in X$ が存在する．(2.4) より，

$$\begin{aligned}\|Tu-u\| &= \|(Tu-Tu_i)+(Tu_i-u)\|\\ &\leqq \|Tu-Tu_i\|+\|Tu_i-u\|\\ &\leqq c\|u-u_i\|+\|u_{i+1}-u\|\end{aligned}$$

であるので，この不等式で $i\to\infty$ とすると $\|Tu-u\|\leqq 0$ を得る．(2.1), (2.2) より，$Tu=u$ を得る．[*] □

3. 初期値問題

方程式 (E) と次の初期条件を考える．

$$y(a)=\alpha,\qquad y'(a)=\beta \tag{3.1}$$

ここで，$\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ である．以下 $f\in C[a,b]$ とする．

定理 3.1 (初期値問題の解の存在と一意性)**.** $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ に対して，初期値問題 (E), (3.1) の解は区間 $[a,b]$ で存在して一意である．

注意 3.1. 非線形方程式の場合は初期値問題の解が一意でないことがある．例えば，次の初期値問題

$$\begin{cases} y''-6y^{\frac{1}{3}}=0\\ y(0)=0,\quad y'(0)=0\end{cases}$$

には２つの解 $y_1(t)\equiv 0$, $y_2(t)=t^3$ が存在する．

注意 3.2. 非線形方程式の場合はリプシッツ条件などの条件が満たされれば，初期値問題の解の一意性が成り立つ．

系 3.1. $y(t_1)=y'(t_1)=0$ を満たす (E) の解は $y(t)\equiv 0$ のみである．

証明. 定理 3.1 より $y(t_1)=y'(t_1)=0$ を満たす (E) の解はただ１つであり，$y(t)\equiv 0$ がその一意解である． □

問題 3.1. 次を示せ．

$$\int_a^t\left[\int_a^s g(r)dr\right]ds=\int_a^t(t-s)g(s)ds$$

補題 3.1. y が初期値問題 (E)–(3.1) の解であることと，y が

$$y(t)=\alpha+\beta(t-a)-\int_a^t(t-s)f(s)y(s)ds\qquad (a\leqq t\leqq b) \tag{3.2}$$

を満たすことは同値である．

---

[*] 実は，$Tu=u$ の証明は T が縮小写像であることから，T は連続であることがわかるので，$Tu_i=u_{i+1}$ で $i\to\infty$ とすれば直ちに得られる．ここでは T の連続性を使わずに証明した．

証明. y を (E)–(3.1) の解とする. 方程式 (E) を $[a,s]$ 上積分すると, $y'(a)=\beta$ より,

$$y'(s)-\beta+\int_a^s f(r)y(r)dr=0. \tag{3.3}$$

これをさらに, $[a,t]$ 上積分すると, $y(a)=\alpha$ より,

$$y(t)-\alpha-\beta(t-a)+\int_a^t\int_a^s f(r)y(r)drds=0. \tag{3.4}$$

問題 3.1 より, y は (3.2) を満たす.

逆に, y は (3.2) を満たすと仮定する. 問題 3.1 より, y は (3.4) を満たす. (3.4) の両辺を微分すると, (3.3) を得る. さらに, (3.3) の両辺を微分すると y は (E) の解であることがわかる. (3.2), (3.3) より y は (3.1) を満たすこともわかる. □

定理 3.1 の証明.

$$A:=\max_{a\leqq t\leqq b}|f(t)|+1>0,\quad \|y\|:=\max_{a\leqq x\leqq b}e^{-2A(b-a)t}|y(t)|$$

とおく. 第 2 節のようにこの $\|\ \|$ は (2.1)–(2.4) を満たす. いま,

$$(Ty)(t)=\alpha+\beta(t-a)-\int_a^t(t-s)f(s)y(s)ds$$

と定義すると, $T\colon C[a,b]\to C[a,b]$ である. 任意の $u,v\in C[a,b]$ に対して, $a\leqq x\leqq b$ のとき,

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t)-(Tv)(t)| &= \left|\int_a^t(t-s)f(s)[u(s)-v(s)]ds\right| \\
&\leqq \int_a^t|t-s||f(s)||u(s)-v(s)|ds \\
&\leqq A(b-a)\int_a^t|u(s)-v(s)|ds \\
&= A(b-a)\int_a^t e^{2A(b-a)s}e^{-2A(b-a)s}|u(s)-v(s)|ds \\
&\leqq A(b-a)||u-v||\int_a^t e^{2A(b-a)s}ds \\
&= A(b-a)||u-v||\left[\frac{1}{2A(b-a)}e^{2A(b-a)s}\right]_a^t \\
&= \frac{1}{2}||u-v||(e^{2A(b-a)t}-e^{2A(b-a)a}) \\
&\leqq \frac{1}{2}||u-v||e^{2A(b-a)t}
\end{aligned}$$

であり,

$$e^{-2A(b-a)t}|(Tu)(t)-(Tv)(t)|\leqq\frac{1}{2}||u-v||$$

を得る. この両辺で区間 $[a,b]$ 上の最大値をとると,

$$||Tu-Tv||\leqq\frac{1}{2}||u-v||$$

を得るので, T は縮小写像である. 定理 2.2 より, ある $y\in C[a,b]$ に対して, $Ty=y$ であり, しかもこのような $y\in C[a,b]$ は一意である. 即ち, (3.2) を満たす $y\in C[a,b]$ が存在して, そのようなものは一意である. 従って, 補題 3.1 より, 定理 3.1 を得る. □

4. 一般解

問題 4.1 (重ね合わせの原理)**.** y_1, y_2 が (E) の解のとき, 任意の c_1, $c_2 \in \mathbf{R}$ に対して

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

も (E) の解であることを示せ.

問題 4.2 (ラグランジュの恒等式)**.** y_1, y_2 が (E) の解のとき,

$$(y_1y_2' - y_1'y_2)' \equiv 0$$

が成り立つことを示せ.

2つの関数 y_1, y_2 に対して

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

を y_1, y_2 の**ロンスキー行列式** (**ロンスキアン**) という. 問題4.2 より, 次を得る.

定理 4.1. y_1, y_2 が (E) の解のとき, $W(y_1, y_2)(t)$ は定数関数である.

2つの関数 y_1, y_2 ($y_1 \not\equiv 0$, $y_2 \not\equiv 0$) に対して

$$\text{ある } (c_1, c_2) \neq (0, 0) \text{ に対して } c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \equiv 0 \tag{4.1}$$

が成り立つとき, y_1, y_2 は**1次従属**という. そうでないとき, **1次独立**という.

命題 4.1. y_1, y_2 ($y_1 \not\equiv 0$, $y_2 \not\equiv 0$) は1次従属であることと, ある定数 $C \neq 0$ に対して $y_1(t) \equiv Cy_2(t)$ であることは同値である.

証明. y_1, y_2 は1次従属であると仮定する. そのとき, (4.1) が成り立つ. そのとき, $c_1 \neq 0$ である. もし, $c_1 = 0$ とすると,

$$c_1y_1(t) + c_2y_2(x) = c_2y_2(t) \equiv 0$$

となり, これは矛盾である. 同様に $c_2 \neq 0$ である. 従って, $C = -c_2/c_1$ とおくと, $y_1(t) \equiv Cy_2(t)$ が成り立つ.

逆に, ある $C \neq 0$ に対して, $y_1(t) \equiv Cy_2(t)$ が成り立つと仮定すると, $(c_1, c_2) = (1, -C)$ に対して, (4.1) が成り立つ. 従って, y_1, y_2 は1次従属である. □

定理 4.2. y_1, y_2 を (E) の非自明解とする. そのとき, y_1, y_2 が1次従属であることと, $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ は同値である.

証明. y_1, y_2 は1次従属と仮定する. そのとき, (4.1) が成り立つ. 従って, $c_1y_1'(t) + c_2y_2'(t) \equiv 0$ であるから,

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

従って, (4.2) の左辺の行列は逆行列をもたない. 即ち, $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ を得る.

逆に, $W(y_1, y_2)(t) \equiv 0$ を仮定すると, (4.2) を満たす $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ が存在する. 従って, (4.1) が成り立つので, y_1, y_2 は1次従属である. □

定理 4.3. 方程式 (E) は1次独立な解 y_1, y_2 をもつ.

証明. y_1 を $y(a) = 1$, $y'(a) = 0$ を満たす (E) の解, y_2 を $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$ を満たす (E) の解とする. 定理3.1 より, y_1, y_2 は存在する. そのとき,

$$W(y_1, y_2)(a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから, 定理4.2 より, y_1, y_2 は1次独立である. □

定理 4.4. y_1, y_2 は (E) の１次独立な解とする．(E) の任意の解（**一般解**）y は

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \qquad (c_1,\, c_2 \in \mathbf{R})$$

と表すことができる．

証明. いま,

$$A = \begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix}$$

とおく．そのとき, 定理 4.2 より, $|A| = W(y_1, y_2)(a) \neq 0$ である．よって, A の逆行列 A^{-1} が存在する．

y を (E) の任意の解とし,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix}$$

とおく．そのとき,

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

である．いま,

$$z(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

とおくと, 問題 4.1 より, z は (E) の解である．さらに, (4.3) より, $z(a) = y(a)$, $z'(a) = y'(a)$ が成り立つ．従って, 定理 3.1 より, $z(t) \equiv y(t)$ を得る． □

例 4.1. $\lambda > 0$ を定数とする．次の微分方程式

$$y'' + \lambda y = 0 \tag{4.4}$$

は１次独立な解の組 $y_1 = \cos\sqrt{\lambda}t$, $y_2 = \sin\sqrt{\lambda}t$ をもつ．実際, y_1, y_2 が解であることは, (4.4) に代入すればわかるし，１次独立であることは

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}t & \sin\sqrt{\lambda}t \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}t & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda}\cos^2\sqrt{\lambda}t + \sqrt{\lambda}\sin^2\sqrt{\lambda}t = \sqrt{\lambda} \neq 0$$

であるから, 定理 4.2 より, y_1, y_2 は１次独立である．従って, 定理 4.4 より,

$$c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}t$$

は $\lambda > 0$ のときの (4.4) の一般解である．

5. スツルムの比較定理

２つの微分方程式

$$y'' + f(t)y = 0, \tag{E}$$

$$Y'' + F(t)Y = 0 \tag{E*}$$

を考える．ここで, f, $F \in C[t_1, t_2]$ である．

$y(c) = 0$ を満たす c を $y(t)$ の**零点**という．

定理 5.1 (スツルムの比較定理)**.** (E) の解 y で

$$y(t_1) = y(t_2) = 0, \quad y(t) \neq 0 \ \ (t_1 < t < t_2)$$

を満たすものが存在することを仮定する．もし

$$F(t) \geqq f(t) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

ならば (E*) の任意の解 Y は $[t_1, t_2]$ 内に少なくとも１つ零点をもつ．

上に加えて, さらに

$$F(t) \not\equiv f(t) \quad (t_1 \leqq t \leqq t_2) \tag{5.1}$$

ならば (E*) の任意の解 Y は (t_1, t_2) 内に少なくと1つ零点をもつ.

証明. 区間 (t_1, t_2) 上で $y(t) > 0$ または $y(t) < 0$ である. $y(t) > 0$ と仮定しても一般性を失わない. もし, $y(t) < 0$ ならば, $-y$ も (E) の解なので, $-y$ を y とすればよい. このとき, 系 3.1 より, $y'(t_1) > 0$ かつ $y'(t_2) < 0$ である. $Y(t)$ を (E*) の任意の解とする. 区間 $[t_1, t_2]$ で $Y(t) \neq 0$ と仮定する. そのとき, 上と同様の理由で, 区間 $[t_1, t_2]$ で $Y(t) > 0$ としてよい.

$$(y'Y - yY')' = y''Y - yY'' = [F(t) - f(t)]yY$$

であるので, これを区間 $[t_1, t_2]$ 上積分すると,

$$y'(t_2)Y(t_2) - y'(t_1)Y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [F(t) - f(t)]y(t)Y(t)dt =: I \geqq 0 \tag{5.2}$$

を得る. 一方, $Y(t_1) > 0$, $Y(t_2) > 0$, $y'(t_1) > 0$, $y'(t_2) < 0$ であるので, 矛盾が生じる. よって, Y は区間 $[t_1, t_2]$ 内に零点をもつ.

さらに, (5.1) を仮定する. そのとき, $I > 0$ である. もし, 区間 (t_1, t_2) で $Y(t) \neq 0$ と仮定する. 区間 (t_1, t_2) で $Y(t) > 0$ としてよい. このとき, $Y(t_1) \geqq 0$, $Y(t_2) \geqq 0$, $y'(t_1) > 0$, $y'(t_2) < 0$ であるので, (5.2) に矛盾する. 従って, Y は区間 (t_1, t_2) 内に零点をもつ. □

例 5.1. 次の2つの方程式を考える.

$$y'' + y = 0, \tag{5.3}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \tag{5.4}$$

ここで $\lambda > 0$ である. 方程式 (5.3) は, $y = \sin t$ という解をもつ. そのとき, $y(0) = y(\pi) = 0$ である. スツルムの比較定理より, $\lambda > 1$ のとき, (5.4) の任意の解は $(0, \pi)$ 内に零点をもつ.

例 4.1 より,

$$Y = c_1 \cos\sqrt{\lambda}t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}t$$

は (5.4) の一般解である. この Y は

$$Y = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\sin(\sqrt{\lambda}t + \alpha)$$

と表すことが出来る. このことから, Y の隣り合う零点の間隔は $\pi/\sqrt{\lambda}$ である. 従って, $\lambda > 1$ のとき Y は $(0, \pi)$ 内に零点をもつ. このことはスツルムの比較定理の結果と一致する.

大雑把に言えば, スツルムの比較定理から, (E) の解は $f(t)$ が大きいほど振動しやすいことがわかる.

$y \in C[t_0, \infty)$ とする. y が**振動**であるとは, 次を満たす数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することである.

$$y(t_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, \qquad \lim_{n\to\infty} t_n = \infty.$$

そうでないとき y は**非振動**であるという.

y が非振動である場合は, ある T に対して,

$$y(t) \neq 0 \quad (t \geqq T)$$

が成り立つ. 従って, y が非振動であることと, ある T に対して,

$$y(t) > 0 \quad (t \geqq T) \tag{5.5}$$

または

$$y(t) < 0 \quad (t \geqq T) \tag{5.6}$$

は同値である．y がある T に対して, (5.5) [(5.6)] を満たすとき, y は**終局的に正** [**終局的に負**] であるという．さらに, (E) のすべての非自明解が振動のとき **(E) は振動である**といい, (E) のすべての非自明解が非振動のとき **(E) は非振動である**という．

定理 5.2. 方程式 (E) は振動であるか, または, 非振動である．(即ち, (E) の振動解と非振動解は共存しない.)

証明. y を (E) の非自明解とする．y は振動または非振動である．y が振動のときは, スツルムの比較定理より, すべての非自明解は振動である．y が非振動と仮定する．もし, 振動解が存在したとすると, スツルムの比較定理より, すべての非自明解は振動解となるが, これは矛盾である．従って, 非自明な振動解は存在せず, 非自明解はすべて非振動である． □

スツルムの比較定理 (定理 5.1) より次を得る．

系 5.1. 次の 2 つの方程式を考える．

$$y'' + f(t)y = 0, \tag{E}$$

$$Y'' + F(t)Y = 0, \tag{E*}$$

を考える．ここで, $f, F \in C[t_0, \infty)$ かつ

$$F(t) \geqq f(t) \quad (t \geqq t_0)$$

とする．そのとき, 次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) (E) が振動であるならば (E*) もそうである．
(ii) (E*) が非振動であるならば (E) もそうである．

証明. (ii) は (i) の対偶であるから, (i) を示せば十分である．(E) が振動であると仮定する．(E) の非自明な振動解 y を 1 つとる．そのとき, $y(t_n) = 0$ ($n \in \mathbf{N}$), $t_n \to \infty$ ($n \to \infty$) を満たす数列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．Y を (E*) の任意の非自明解とする．スツルムの比較定理より, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して, $Y(a_n) = 0$ を満たす $a_n \in [t_n, t_{n+1}]$ が存在する．$a_n \geqq t_n$ より, $a_n \to \infty$ ($n \to \infty$) であるから, Y は振動である．従って, (E*) は振動である． □

6. Kneser の判定法

補題 6.1. オイラーの微分方程式

$$y'' + \frac{\lambda}{t^2} y = 0 \tag{6.1}$$

について

(i) $\lambda < 1/4$ のとき,

$$y(t) = c_1 t^{\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}} + c_2 t^{\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}}.$$

(ii) $\lambda = 1/4$ のとき,

$$y(t) = c_1 \sqrt{t} + c_2 \sqrt{t} \log t.$$

(iii) $\lambda > 1/4$ のとき,

$$y(t) = c_1 \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} \log t\right) + c_2 \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} \log t\right).$$

は一般解である．従って,

(a) $\lambda > 1/4$ ならば (6.1) は振動である．
(b) $\lambda \leqq 1/4$ ならば (6.1) は非振動である．

証明. $u(x)=y(e^x)$ とおく. そのとき,

$$u'(x)=y'(e^x)e^x$$

であり,

$$u''(x)=y''(e^x)e^{2x}+y'(e^x)e^x=-\frac{\lambda}{e^{2x}}y(e^x)e^{2x}+u'(x)=-\lambda u(x)+u'(x)$$

であるから, u は定数係数 2 階線形微分方程式

$$u''-u'+\lambda u=0$$

の解である. この方程式に対する特性方程式は

$$r^2-r+\lambda=0$$

でその解は

$$r=\frac{1\pm\sqrt{1-4\lambda}}{2}$$

である.

(i) $\lambda<1/4$ のとき, 特性方程式の解は 2 つの実数解であるので,

$$y(e^x)=u(x)=c_1e^{\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}x}+c_2e^{\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}x}=c_1\left(e^x\right)^{\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}}+c_2\left(e^x\right)^{\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}}$$

を得る. 従って,

$$y(t)=c_1t^{\frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}}+c_2t^{\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}}$$

を得る.

(ii) $\lambda=1/4$ のとき, 特性方程式の解は重解 $r=1/2$ であるので,

$$y(e^x)=u(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2xe^{\frac{1}{2}x}=c_1\sqrt{e^x}+c_2x\sqrt{e^x}$$

を得る. 従って, $e^x=t$ とおくと $x=\log t$ より,

$$y(t)=c_1\sqrt{t}+c_2\sqrt{t}\log t$$

を得る.

(iii) $\lambda>1/4$ のとき, 特性方程式の解は虚数解

$$r=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}i$$

であるから,

$$y(e^x)=u(x)=c_1e^{\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x\right)+c_2e^{\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}x\right)$$

を得る. 従って, $e^x=t$ とおくと $x=\log t$ より,

$$y(t)=c_1\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\log t\right)+c_2\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{4\lambda-1}}{2}\log t\right)$$

を得る. □

系 6.1 (Kneser の判定法)**.** 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) 次の $T,\delta>0$ が存在すると仮定する.

$$t^2f(t)\geqq\frac{1}{4}+\delta\quad(t\geqq T).$$

そのとき (E) は振動である.

(ii) 次の T が存在すると仮定する.

$$t^2 f(t) \leqq \frac{1}{4} \quad (t \geqq T).$$

そのとき (E) は非振動である.

証明. (i) $\lambda = (1/4) + \delta$ とおくと,

$$f(t) \geqq \frac{\lambda}{t^2} \quad (t \geqq T).$$

補題 6.1 より,(6.1) は振動である. 系 5.1 より, (E) は振動である.
(ii) $\lambda = 1/4$ とおくと,

$$f(t) \leqq \frac{\lambda}{t^2} \quad (t \geqq T).$$

補題 6.1 より,(6.1) は非振動である. 系 5.1 より, (E) は非振動である. □

Kneser の判定法から次を得る.

系 6.2. 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) ある $c > 0$ に対して $f(t) \geqq c$ $(t \geqq t_0)$ ならば (E) は振動である.
(ii) $f(t) \leqq 0$ $(t \geqq t_0)$ ならば (E) は非振動である.

7. Wintner の判定法

補題 7.1. 次の (i)–(iii) は同値である.

(i) (E) は非振動である.
(ii) 次の Riccati 方程式がある区間 $[T, \infty)$ において解をもつ.

$$z' + z^2 + f(t) = 0. \tag{7.1}$$

(iii) 次の Riccati 方程式がある区間 $[T, \infty)$ において解をもつ.

$$w' = w^2 + f(t). \tag{7.2}$$

証明. 最初に (ii) と (iii) が同値であることを示す. z を (7.1) の $[T, \infty)$ 上の解とする. そのとき, $w = -z$ は $[T, \infty)$ 上で

$$w' = -z' = z^2 + f(t) = w^2 + f(t)$$

を満たす. 即ち, w は (7.1) の $[T, \infty)$ 上の解である. 逆に, w を (7.2) の $[T, \infty)$ 上の解とすると, 同様に $z = -w$ は (7.1) の $[T, \infty)$ 上の解であることがわかる. 従って, (ii) と (iii) は同値である.

次に, (i) ならば (ii) を示す. (i) を仮定する. そのとき (E) の非振動解 y が存在する. ある T に対して, $[T, \infty)$ 上 $y(t) \neq 0$ である. $z = y'/y$ とおくと, $[T, \infty)$ において

$$z' = \frac{y''y - y'y'}{y^2} = \frac{y''y}{y^2} - \frac{y'y'}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \frac{-f(t)y}{y} - z^2 = -f(t) - z^2$$

が満たされる. よって, (ii) が成り立つ.

最後に, (ii) ならば (i) を示す. これを示せばこの補題の証明は完了する. (ii) を仮定する.

$$y(t) = e^{\int_T^t z(s)ds}$$

とおく. そのとき, $[T, \infty)$ において $y(t) > 0$ であり,

$$y'(t) = e^{\int_T^t z(s)ds} \left(\int_T^t z(s)ds\right)' = y(t)z(t)$$

であるから, (7.1) より,

$$y'' = y'z + yz' = (yz)z + y(-z^2 - f(t)) = -f(t)y$$

が成り立つ. 従って, y は (E) の非振動解である. 定理 5.2 より, (E) は非振動である. □

補題 7.2. 微分不等式

$$W' \geqq W^2 \quad (t \geqq T) \tag{7.3}$$

は $W(t) > 0$ $(t \geqq T)$ となる解をもたない.

証明. W を $[T,\infty)$ において $W(t) > 0$ である (7.3) の解とする. そのとき, $[T,\infty)$ において

$$(-W^{-1})' = W^{-2}W' \geqq 1$$

であるから, これを両辺 $[T,t]$ 上積分すると

$$-(W(t))^{-1} + (W(T))^{-1} \geqq t - T \quad (t \geqq T)$$

が成り立つ. $W(t) > 0$ より,

$$(W(T))^{-1} \geqq t - T \quad (t \geqq T)$$

を得るが, $t \to \infty$ とすると矛盾が生じる. 従って, $[T,\infty)$ において $W(t) > 0$ である (7.3) の解 W は存在しない. □

定理 7.1 (Wintner の判定法)**.** もし

$$\int_{t_0}^{\infty} f(s)ds = \lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} f(s)ds = \infty \tag{7.4}$$

ならば (E) は振動である.

証明. (E) は非振動であると仮定する. 補題 7.1 より, (7.2) は $[T,\infty)$ において解 w をもつ. 方程式 (7.2) の両辺を $[T,t]$ 上積分すると,

$$w(t) - w(T) = \int_T^t (w(s))^2 ds + \int_T^t f(s)ds \quad (t \geqq T)$$

を得る. いま,

$$F(t) = \int_T^t f(s)ds + w(T)$$

とおくと,

$$w(t) = \int_T^t (w(s))^2 ds + F(t) \quad (t \geqq T) \tag{7.5}$$

が成り立つ. ここで,

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds - \int_{t_0}^T f(s)ds + w(T)$$

であるから, (7.4) より, $F(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ であることに注意する. よって, $T_1 > T$ を十分大きくとると,

$$F(t) > 0 \quad (t \geqq T_1)$$

が成り立つ. 従って, (7.5) より, $[T_1,\infty)$ において $w(t) > 0$ である. そこで,

$$W(t) = \int_T^t (w(s))^2 ds$$

とおくと, W は $t \geqq T_1 + 1$ のとき,

$$W(t) = \int_T^{T_1} (w(s))^2 ds + \int_{T_1}^{T_1+1} (w(s))^2 ds + \int_{T_1}^{t} (w(s))^2 ds \geqq \int_{T_1}^{T_1+1} (w(s))^2 ds > 0$$

かつ

$$W'(t) = (w(t))^2$$

を満たす. (7.5) より,

$$w(t) = W(t) + F(t) > W(t) > 0 \quad (t \geqq T_1 + 1),$$

従って,

$$(w(t))^2 > (W(t))^2 \quad (t \geqq T_1 + 1)$$

が成り立つ. 区間 $[T_1+1, \infty)$ において, $W'(t) = (w(t))^2$ であったから, W は $[T_1+1, \infty)$ において, $W' > W^2$ かつ $W(t) > 0$ を満たす. これは, 補題 7.2 に矛盾である. 従って, (E) は振動である. □

次の 2 つ例のように, 定理 7.2 (Wintner の判定法) と系 6.2 (Kneser の判定法) ではお互いに長所と短所がある.

例 7.1. 次の方程式を考える.

$$y'' + \lambda t^\sigma y = 0 \quad (t \geqq 1). \tag{7.6}$$

ここで $\lambda > 0$, $\sigma \in \mathbf{R}$ である. このとき $f(t) = \lambda t^\sigma$ であり, $\sigma \neq -1$ のとき

$$\int_1^t f(s)ds = \lambda \int_1^t s^\sigma ds = \lambda \left[\frac{1}{\sigma+1} s^{\sigma+1} \right]_1^t = \frac{\lambda}{\sigma+1}(t^{\sigma+1} - 1).$$

$\sigma = -1$ のとき

$$\int_1^t f(s)ds = \lambda \int_1^t \frac{1}{s} ds = \lambda \Big[\log |s| \Big]_1^t = \lambda \log |t|.$$

以上より,

$$\int_1^\infty f(s)ds = \begin{cases} \infty, & \sigma \geqq -1, \\ -\dfrac{\lambda}{\sigma+1}, & \sigma < -1. \end{cases}$$

定理 7.2 より, $\sigma \geqq 1$ のとき (7.6) は振動である. 一方, $t^2 f(t) = \lambda t^{\sigma+2}$ であるから系 6.2 より, (7.6) は $\sigma > -2$ のとき振動であり, $\sigma < -2$ のとき非振動である. さらに $\sigma = -2$ のとき $t^2 f(t) = \lambda$ より, (7.6) は $\lambda > 1/4$ のとき振動であり, $\lambda \leqq 1/4$ のとき非振動である. 以上より, 方程式 (7.6) に対しては系 6.1 の方が定理 7.2 より優れている.

例 7.2. 次の方程式を考える.

$$y'' + (1 + 2\cos t)y = 0 \quad (t \geqq 0). \tag{7.7}$$

このとき

$$\int_0^t f(s)ds = \int_0^t (1 + 2\cos s)ds = \Big[s + 2\sin s \Big]_0^t = t + 2\sin t \geqq t - 2 \to \infty \quad (t \to \infty).$$

従って, 定理 7.2 より, (7.7) は振動である. しかし, 方程式 (7.7) に対して系 6.1 は適用できない.

定理 7.2 は $f(t)$ が符号変化する関数であっても適用可能である. しかしながら, $f(t)$ が符号変化する関数の場合は定理 7.2 以上の結果を得ることは困難である. そこで, $f(t)$ が定符号の場合を考える. $f(t) \leqq 0$ の場合は系 6.2 (ii) より (E) は非振動であるので, 以下では, $f(t) \geqq 0$ の場合を考える. また, 定理 7.2 より (7.4) のときは振動であるから,

$$\int_{t_0}^\infty f(t)dt < \infty$$

の場合を考える.

8. Hille-Wintner の比較定理

補題 8.1. $f \in C[t_0, \infty)$ かつ $\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt$ が収束することを仮定する. ある区間 $[T, \infty)$ において (7.1) が解 z をもつならば

$$\int_T^{\infty} (z(t))^2 dt < \infty, \quad \lim_{t\to\infty} z(t) = 0. \tag{8.1}$$

証明. (7.1) の両辺を $[T, t]$ 上積分すると

$$z(t) - z(T) + \int_T^t (z(s))^2 ds + \int_T^t f(s)ds = 0 \tag{8.2}$$

即ち,

$$z(t) + \int_T^t (z(s))^2 ds = z(T) - \int_T^t f(s)ds$$

を得る. この式の右辺は $t \to \infty$ とするとある定数 L に収束するので,

$$\lim_{t\to\infty} \left[z(t) + \int_T^t (z(s))^2 ds \right] = L \tag{8.3}$$

が成り立つ. また, $\int_T^t (z(s))^2 ds$ は t について増加であるから,

$$\text{(a)} \ \int_T^{\infty} (z(s))^2 ds = \infty \quad \text{または} \quad \text{(b)} \ \int_T^{\infty} (z(s))^2 ds < \infty$$

の一方が成立する.

(a) を仮定する. (8.3) より, 十分大きなある $T_1 \geqq T$ に対して,

$$z(t) + \int_T^t (z(s))^2 ds \leqq L + 1 \quad (t \geqq T_1)$$

が成り立つ. いま,

$$W(t) = \int_T^t (z(s))^2 ds - L - 1$$

とおくと,

$$W(t) \leqq -z(t) \quad (t \geqq T_1) \tag{8.4}$$

であり, (a) より, $W(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$ が成り立つ. よって, ある $T_2 \geqq T_1$ に対して, $[T_2, \infty)$ において, $W(t) > 0$ が成り立つ. (8.4) より,

$$(W(t))^2 \leqq (-z(t))^2 = (z(t))^2 \quad (t \geqq T_2)$$

を得る. 一方, $W'(t) = (z(t))^2$ であるから, W は

$$(W(t))^2 \leqq W'(t) \quad (t \geqq T_2)$$

を満たす. これは補題 7.2 に矛盾する. 従って, (a) は起こらず, (b) が成立する.

(8.2) より,

$$z(t) = z(T) - \int_T^t (z(s))^2 ds - \int_T^t f(s)ds$$

を得る. これより, ある定数 l に対して,

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = l$$

が成り立つ. $l = 0$ を示せばこの補題の証明が完了する. $l \neq 0$ と仮定する. $(z(s))^2 \to l^2$ $(t \to \infty)$ より, ある $T_3 \geqq T$ に対して,

$$(z(s))^2 \geqq \frac{l^2}{2} \quad (s \geqq T_3)$$

が満たされる．従って，

$$\int_T^t (z(s))^2 ds = \int_T^{T_3} (z(s))^2 ds + \int_{T_3}^t (z(s))^2 ds \geqq \int_{T_3}^t \frac{l^2}{2} ds = \frac{l^2}{2}(t - T_3)$$

が成り立ち，これで $t \to \infty$ とすると，

$$\int_T^\infty (z(s))^2 ds = \infty$$

を得る．しかし，これは (b) に矛盾する．よって，$l = 0$ が成り立つ． □

補題 8.2. $f \in C[t_0, \infty)$ かつ $\int_{t_0}^\infty f(t)dt$ が収束することを仮定する．そのとき，次の (i), (ii) は同値である．

(i) (E) は非振動である．

(ii) 次の積分方程式が十分大きな t に対して解をもつ．

$$z(t) = \int_t^\infty (z(s))^2 ds + \int_t^\infty f(s)ds. \tag{8.5}$$

証明. (i) を仮定する．補題 7.1 により，(7.1) はある区間 $[T, \infty)$ で解 z をもつ．補題 8.1 より，(8.1) が成り立つ．従って，(7.1) の両辺を $[t, \infty)$ 上積分すると，

$$-z(t) + \int_t^\infty (z(s))^2 ds + \int_t^\infty f(s)ds = 0$$

を得る．よって，(ii) が成立する．

(ii) を仮定する．z を (8.5) のある区間 $[T, \infty)$ 上の解とする．そのとき，$[T, \infty)$ において，z は

$$z'(t) = -(z(t))^2 - f(t)$$

を満たす．よって，(7.1) は $[T, \infty)$ で解 z をもつ．補題 7.1 より，(i) が成立する． □

定理 8.1 (Hille-Wintner の比較定理)**.** 次の 2 つの方程式を考える．

$$y'' + f(t)y = 0, \tag{E}$$

$$Y'' + F(t)Y = 0, \tag{E*}$$

を考える．ここで，$f, F \in C[t_0, \infty)$ かつ $\int_{t_0}^\infty f(t)dt$, $\int_{t_0}^\infty F(t)dt$ がともに収束し，$[t_0, \infty)$ において

$$0 \leqq \int_t^\infty f(s)ds \leqq \int_t^\infty F(s)ds$$

が成り立つことを仮定する．そのとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i) (E) が振動であるならば (E*) もそうである．

(ii) (E*) が非振動であるならば (E) もそうである．

注意 8.1. $f(t) \leqq F(t)$ ならば

$$\int_t^\infty f(s)ds \leqq \int_t^\infty F(s)ds$$

が成り立つ．逆は一般に成り立たない．従って，Hille-Wintner の比較定理 (定理 8.1) は系 5.1 を部分的に改良するものである．

定理 8.1 の証明. (i) は (ii) の対偶である．(ii) を示す．(E*) は非振動であると仮定する．補題 8.2 より，ある $[T, \infty)$ において，

$$Z(t) = \int_t^\infty (Z(s))^2 ds + \int_t^\infty F(s)ds \geqq \int_t^\infty (Z(s))^2 ds + \int_t^\infty f(s)ds$$

を満たす Z が存在する. いま,

$$z(t) = \int_t^\infty (Z(s))^2 ds + \int_t^\infty f(s)ds$$

とおくと, $[T,\infty)$ において, $Z(t) \geqq z(t) \geqq 0$ であるから,

$$z' = -Z^2 - f(t) \leqq -z^2 - f(t) \quad (t \geqq T)$$

が成り立つ. さらに,

$$y(t) = e^{\int_T^t z(s)ds}$$

とおくと,

$$y'(t) = e^{\int_T^t z(s)ds}\left(\int_T^t z(s)ds\right)' = y(t)z(t)$$

であるから,

$$y'' = y'z + yz' \leqq (yz)z + y(-z^2 - f(t)) = -f(t)y \quad (t \geqq T),$$

即ち,

$$y'' + f(t)y \leqq 0 \quad (t \geqq T)$$

を得る. いま,

$$\varphi(t) = -\frac{y''(t) + f(t)y(t)}{y(t)} \geqq 0 \quad (t \geqq T)$$

とおくと,

$$y''(t) + [f(t) + \varphi(t)]y(t) = 0.$$

よって, この方程式は非振動である. $f(t) + \varphi(t) \geqq f(t)$ であるから, 系 5.1 により, (E) は非振動である. □

9. Hille の判定法

Hille-Wintner の比較定理 (定理 8.1) から, 次を得ることができる.

定理 9.1 (Hille の判定法)**.** $f \in C[t_0,\infty)$ かつ $\int_{t_0}^\infty f(t)dt$ が収束することを仮定する.

(i) 次の T, $\delta > 0$ が存在すると仮定する.

$$t\int_t^\infty f(s)ds \geqq \frac{1}{4} + \delta \quad (t \geqq T). \tag{9.1}$$

そのとき (E) は振動である.

(ii) 次の T が存在すると仮定する.

$$0 \leqq t\int_t^\infty f(s)ds \leqq \frac{1}{4} \quad (t \geqq T). \tag{9.2}$$

そのとき (E) は非振動である.

注意 9.1. Hille の判定法 (定理 9.1) は Kneser の判定法 (系 6.1) の部分的な改良である. 実際, $t^2 f(t) \geqq (1/4) + \delta$ ならば

$$t\int_t^\infty f(s)ds \geqq t\int_t^\infty \left(\frac{1}{4} + \delta\right) s^{-2} ds = t\left(\frac{1}{4} + \delta\right)\left[-s^{-1}\right]_t^\infty = \frac{1}{4} + \delta.$$

同様に $t^2 f(t) \leqq 1/4$ ならば $t\int_t^\infty f(s)ds \leqq 1/4$ が成り立つ.

定理 9.1 の証明. 最初に $t > 0$ のとき,

$$\int_t^\infty \frac{1}{s^2} ds = [-t^{-1}]_x^\infty = t^{-1}$$

であることに注意する. $T = \max\{1, t_0\}$ とおく.

(i) $\lambda = (1/4) + \delta$ とおく, (9.1) より, $t \geqq T$ のとき,

$$\int_t^\infty f(s) ds \geqq \lambda t^{-1} = \int_t^\infty \frac{\lambda}{s^2} ds \geqq 0$$

補題 6.1 より, (6.1) は振動である. 定理 8.1 より (E) は振動である.

(ii) $\lambda = 1/4$ とおく, (9.2) より, $t \geqq T$ のとき,

$$0 \leqq \int_t^\infty f(s) ds \leqq \lambda t^{-1} = \int_t^\infty \frac{\lambda}{s^2} ds$$

補題 6.1 より, (6.1) は非振動である. 定理 8.1 より (E) は非振動である. □

10. 微分方程式系の解の漸近挙動 1

方程式 (E) の解 y は

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -f(t)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

を満たす. そこで, この節では次の微分方程式系

$$\boldsymbol{y}' = A(t)\boldsymbol{y} \tag{10.1}$$

の解の漸近挙動について考察する. ここで, $\boldsymbol{y}$ は 2 次元ベクトル値関数, $A(t)$ は 2 次正方行列値関数で, 各成分は $[t_0, \infty)$ において連続であると仮定する. 微分方程式系 (10.1) に初期条件 $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0$ を加えた初期値問題はただ 1 つの解をもち, $[t_0, \infty)$ で存在することが知られている.

以下,

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \beta(t) \\ \gamma(t) & \delta(t) \end{pmatrix}$$

に対して

$$\boldsymbol{y}'(t) = \begin{pmatrix} v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}, \quad A'(t) = \begin{pmatrix} \alpha'(t) & \beta'(t) \\ \gamma'(t) & \delta'(t) \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき次が成り立つ.

補題 10.1.

$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z} \leqq |\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}| \leqq |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}| \tag{10.2}$$

$$(|\boldsymbol{y}|^2)' = 2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}' \tag{10.3}$$

$$(A\boldsymbol{y})' = A'\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{y}' \tag{10.4}$$

証明. $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{z}$ のなす角を θ とすると

$$|\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}| = |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}||\cos\theta| \leqq |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{z}|$$

を得る. また,

$$(|\boldsymbol{y}|^2)' = (v^2 + w^2)' = 2vv' + 2ww' = 2\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}'$$

も成り立つ. 最後に,

$$A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v + \beta w \\ \gamma v + \delta w \end{pmatrix}$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
(A\boldsymbol{y})' &= \begin{pmatrix} \alpha' v + \alpha v' + \beta' w + \beta w' \\ \gamma' v + \gamma v' + \delta' w + \delta w' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha' v + \beta' w \\ \gamma' v + \delta' w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha v' + \beta w' \\ \gamma v' + \delta w' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha' + \beta' \\ \gamma' + \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \gamma + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} \\
&= A'\boldsymbol{y} + A\boldsymbol{y}'
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

定理 10.1. 任意の $\boldsymbol{y}$ に対して

$$|A(t)\boldsymbol{y}| \leqq h(t)|\boldsymbol{y}| \quad (t \geqq t_0)$$

となる関数 $h \in C[t_0, \infty)$ の存在すると仮定する. もし

(10.5)
$$\int_{t_0}^{\infty} h(t)dt < \infty$$

ならば (10.1) の $[t_0, \infty)$ における任意の解 $\boldsymbol{y}$ に対して

(10.6)
$$\boldsymbol{y} \to \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (t \to \infty)$$

を満たす定数 c_1, c_2 が存在する.

定理 10.1 の意味するところは次の通りである. 定理 10.1 の条件を満たす $A(t)$ は t が十分大きいとき, 零行列に十分近い. (10.1) より, $\boldsymbol{y}'$ は $\boldsymbol{0}$ に十分近くなり, $\boldsymbol{y}$ は定ベクトルに十分近くなる.

証明. 補題 10.1 より,

(10.7)
$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}' \leqq |\boldsymbol{y}||\boldsymbol{y}'| = |\boldsymbol{y}||A(t)\boldsymbol{y}| \leqq |\boldsymbol{y}|h(t)|\boldsymbol{y}| = h(t)|\boldsymbol{y}|^2$$

を得る. いま,

$$H(t) = e^{2\int_{t_0}^{t} h(s)ds}$$

とおくと, $[t_0, \infty)$ において

(10.8)
$$0 < H(t) \leqq e^{2\int_{t_0}^{\infty} h(s)ds} = K$$

を満たす定数 $K > 0$ をとることができる. また,

$$H'(t) = e^{2\int_{t_0}^{t} h(s)ds} \left(2\int_{t_0}^{t} h(s)ds \right)' = 2H(t)h(t)$$

よって, 補題 10.1 と (10.7) より,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{H(t)} \right)' &= \frac{(|\boldsymbol{y}|^2)'H(t) - |\boldsymbol{y}|^2 H'(t)}{(H(t))^2} \\
&= \frac{2\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}' H(t) - |\boldsymbol{y}|^2 2H(t)h(t)}{(H(t))^2} \\
&= \frac{2}{H(t)}(\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{y}' - h(t)|\boldsymbol{y}|^2) \ \leqq 0
\end{aligned}
$$

を得る. 従って, $|\boldsymbol{y}|^2/H(t)$ は非増加な関数なので, $[t_0, \infty)$ において,

$$\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{H(t)} \leqq \frac{|\boldsymbol{y}(t_0)|^2}{H(t_0)} = |\boldsymbol{y}(t_0)|^2$$

であるから, (10.8) より,

$$|\boldsymbol{y}|^2 \leqq |\boldsymbol{y}(t_0)|^2 H(t) \leqq |\boldsymbol{y}(t_0)|^2 K = M$$

を満たす定数 $M > 0$ をとることができる. 従って,

$$|\boldsymbol{y}'| = |A(t)\boldsymbol{y}| \leqq h(t)|\boldsymbol{y}| \leqq \sqrt{M} h(t)$$

が成り立つ. よって,

$$|\boldsymbol{y}'| = \sqrt{(v')^2 + (w')^2} \geqq \sqrt{(v')^2} = |v'|$$

より,

$$|v'(t)| \leqq \sqrt{M} h(t)$$

であるから,

$$\int_{t_0}^{\infty} |v'(t)| dt$$

は収束する. 従って,

$$\int_{t_0}^{\infty} v'(t) dt$$

も収束するので,

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v(t_0) + \lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} v'(s) ds$$

は極限をもつ. 同様に, $\lim_{t\to\infty} w(t)$ も極限をもつ. 従って, (10.6) を満たす定数 c_1, c_2 が存在する. □

11. 振動解の漸近挙動１

方程式 (E) の解 y に対して,

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

とおき,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 前節のように, これらは微分方程式系 (10.1) を満たす. さらに

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

とおくと $\det Y(t) = 1$ より, $Y^{-1}(t)$ が存在する. そこで

$$\boldsymbol{z} = Y^{-1}(t)\boldsymbol{y}$$

とおくと, $\boldsymbol{y} = Y(t)\boldsymbol{z}$ より

$$\boldsymbol{y}' = Y'\boldsymbol{z} + Y\boldsymbol{z}'.$$

よって

$$Y\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y}' - Y'\boldsymbol{z} = A\boldsymbol{y} - Y'\boldsymbol{z} = AY\boldsymbol{z} - Y'\boldsymbol{z} = (AY - Y')\boldsymbol{z}.$$

従って

$$B(t) = Y^{-1}(t)(A(t)Y(t) - Y'(t))$$

とおくと $\boldsymbol{z}$ は

$$\boldsymbol{z}' = B(t)\boldsymbol{z} \tag{11.2}$$

を満たす.

補題 11.1.

$$B(t) = (f(t)-1)\begin{pmatrix} \sin t\cos t & \sin^2 t \\ -\cos^2 t & -\sin t\cos t \end{pmatrix}.$$

証明.

$$\begin{aligned}
B(t) &= Y^{-1}(t)\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} - Y'(t)\right] \\
&= Y^{-1}(t)\left[\begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -f(t)\cos t & -f(t)\sin t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}\right] \\
&= Y^{-1}(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(f(t)-1)\cos t & -(f(t)-1)\sin t \end{pmatrix} \\
&= (f(t)-1)\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \\
&= (f(t)-1)\begin{pmatrix} \sin t\cos t & \sin^2 t \\ -\cos^2 t & -\sin t\cos t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

□

補題 11.2. 任意の $\boldsymbol{z}$ に対して

$$|B(t)\boldsymbol{z}| \leqq |f(t)-1||\boldsymbol{z}|$$

が成り立つ.

証明.

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

とおく. 補題 11.1 より,

$$\begin{aligned}
B(t)\boldsymbol{z} &= (f(t)-1)\begin{pmatrix} \sin t\cos t & \sin^2 t \\ -\cos^2 t & -\sin t\cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \\
&= (f(t)-1)\begin{pmatrix} v\sin t\cos t + w\sin^2 t \\ -v\cos^2 t - w\sin t\cos t \end{pmatrix} \\
&= (f(t)-1)\begin{pmatrix} \sin t(v\cos t + w\sin t) \\ -\cos t(v\cos t + w\sin t) \end{pmatrix} \\
&= (f(t)-1)(v\cos t + w\sin t)\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
|B(t)\boldsymbol{z}| &= |f(t)-1||v\cos t + w\sin t|\sqrt{(\sin t)^2 + (-\cos t)^2} \\
&= |f(t)-1|\left|\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\right| \\
&\leqq |f(t)-1|\left|\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\right| \\
&= |f(t)-1||\boldsymbol{z}|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\
&= |f(t)-1||\boldsymbol{z}|
\end{aligned}$$

を得る. □

補題 11.3. (E) の任意の解 y に対して,

$$V(t) = [y(t)]^2 + [y'(t)]^2 \tag{11.4}$$

とおくと, $V(t)$ は

$$V(t) \geqq V(t_0) e^{-\int_{t_0}^{t} |f(s)-1| ds} \quad (t \geqq t_0) \tag{11.5}$$

を満たす.

証明. いま

$$V'(t) = 2yy' + 2y'y'' = 2y'(y + y'') = 2y'y(1 - f(t)) \geqq -2|y||y'||f(t) - 1|$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(e^{\int_{t_0}^{t}|f(s)-1|ds} V(t)\right) &= |f(t)-1| e^{\int_{t_0}^{t}|f(s)-1|ds} V(t) + e^{\int_{t_0}^{t}(f(s)-1)ds} V'(t) \\ &\geqq |f(t)-1| e^{\int_{t_0}^{t}|f(s)-1|ds} (V(t) - 2|y||y'|) \\ &= |f(t)-1| e^{\int_{t_0}^{t}|f(s)-1|ds} (|y| - |y'|)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

を得る. 従って, $t \geqq t_0$ のとき,

$$e^{\int_{t_0}^{t}|f(s)-1|ds} V(t) \geqq e^{\int_{t_0}^{t}|f(s)-1|ds} V(t) \Big|_{t=t_0} = V(t_0)$$

が成り立つ. これより, (11.5) を得る. □

定理 11.1. 次の条件

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t) - 1| dt < \infty$$

を仮定する. そのとき (E) の任意の非自明解 y に対して

$$\begin{gathered} y(t) = [c_1 + \varepsilon_1(t)] \cos t + [c_2 + \varepsilon_2(t)] \sin t, \\ y'(t) = -[c_1 + \varepsilon_1(t)] \sin t + [c_2 + \varepsilon_2(t)] \cos t, \\ \lim_{t\to\infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_2(t) = 0, \end{gathered}$$

を満たす定数 c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$ と関数 $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ が存在する.

証明. y を (E) の非自明解とする. (11.1), $\boldsymbol{z} = Y^{-1}\boldsymbol{y}$ とおくと, $\boldsymbol{z}$ は (11.2) の解である. (11.3) とおく. 補題 11.2 と定理 10.1 より,

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (t \to \infty)$$

を満たす定数 c_1, c_2 が存在する. そこで

$$\varepsilon_1(t) = v(t) - c_1, \quad \varepsilon_2(t) = w(t) - c_2$$

とおくと,

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_1(t) = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_2(t) = 0$$

が満たされる. また,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = Y(t)\boldsymbol{z} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v(t)\cos t + w(t)\sin t \\ -v(t)\sin t + w(t)\cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [c_1 + \varepsilon_1(t)]\cos t + [c_2 + \varepsilon_2(t)]\sin t \\ -[c_1 + \varepsilon_1(t)]\sin t + [c_2 + \varepsilon_2(t)]\cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る.

最後に $c_1^2+c_2^2\neq 0$ を示す. $c_1^2+c_2^2=0$ と仮定する. 関数 $V(t)$ を (11.4) で定義する. そのとき, $c_1=c_2=0$ より,

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=0$$

が成り立つ. 補題 11.3 より, (11.5) が満たされる. 不等式 (11.5) で $t\to\infty$ とすると,

$$0\geqq V(t_0)e^{-\int_{t_0}^{\infty}|f(s)-1|ds},$$

即ち, $V(t_0)\leqq 0$ を得る. $V(t_0)\geqq 0$ であるから, $V(t_0)=0$ が成り立つ. 従って $y(t_0)=y'(t_0)=0$ であるが, 定理 3.1 (初期値問題の解の存在と一意性) により, $y(t)\equiv 0$ でなけらばならない. しかし, これは, y が非自明解であることに矛盾する. よって, $c_1^2+c_2^2\neq 0$ である. □

定理 11.1 は, 大雑把に言うと, $t\to\infty$ のとき $f(t)$ が 1 に十分近いと, 方程式 (E) の解は

$$y''+y=0$$

の解, 即ち,

$$c_1\cos t+c_2\sin t$$

に近づいていくことを意味している.

12. 振動解の漸近挙動２

２階線形微分方程式

$$(p(t)u')'+q(t)u=0 \quad (t\geqq t_0) \tag{1.4}$$

の振動解の漸近挙動を求めてみる. この節では, $p,\ q\in C^2[t_0,\infty)$, $p(t)>0$, $q(t)>0$ $(t\geqq t_0)$ とする. さらに, 以下 $\mu(t)=[p(t)q(t)]^{-\frac14}$ とする. そのとき,

$$\frac{1}{p(t)[\mu(t)]^2}=\frac{1}{p(t)[p(t)]^{-\frac12}[q(t)]^{-\frac12}}=\sqrt{\frac{q(t)}{p(t)}} \tag{12.1}$$

であることに注意する.

補題 12.1 (Liouville 変換)**.** 方程式 (1.4) で

$$z(x)=[\mu(t)]^{-1}u(t),\quad x=\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{p(s)[\mu(s)]^2}$$

と変換すると,

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\Big(p(t)[\mu(t)]^3[p(t)\mu'(t)]'+1\Big)z=0 \quad (0\leqq x<b) \tag{12.2}$$

に変換される. ここで, $b=\int_{t_0}^{\infty}\sqrt{q(t)/p(t)}dt$ である.

証明. まず,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{p(t)[\mu(t)]^2} \tag{12.3}$$

より,

$$\frac{dt}{dx}=p(t)[\mu(t)]^2$$

が成り立つことに注意する. 従って,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dt}(\mu^{-1}u)\frac{dt}{dx}=\left[(\mu^{-1})'u+\mu^{-1}u'\right]p\mu^2=\left[-\mu^{-2}\mu'u+\mu^{-1}u'\right]p\mu^2=-p\mu'u+\mu pu'$$

であるから,

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{d}{dt}(-p\mu' u+\mu pu')\frac{dt}{dx}&=\left[-(p\mu')'u-p\mu'u'+\mu'pu'+\mu(pu')'\right]p\mu^2\\&=\left[-(p\mu')'u-\mu qu\right]p\mu^2\\&=-p\mu^3(p\mu')'z-pq\mu^4z\\&=-\left[p\mu^3(p\mu')'+1\right]z\end{aligned}$$

を得る. また, (12.1) より, $t_0\leqq t<\infty$ は $0\leqq x<b$ に対応する. □

補題 12.2. $x=\int_{t_0}^t[p(s)]^{-1}[\mu(s)]^{-2}ds$ のとき, $f(x)=p(t)[\mu(t)]^3[p(t)\mu'(t)]'+1$ とおく. そのとき,

$$\int_0^b|f(x)-1|dx=\int_{t_0}^\infty\mu(t)|[p(t)\mu'(t)]'|dt.$$

ここで, $b=\int_{t_0}^\infty\sqrt{q(t)/p(t)}dt$ である.

証明. (12.3) より,

$$\int_0^b|f(x)-1|dx=\int_{t_0}^\infty|p(t)[\mu(t)]^3[p(t)\mu'(t)]'|\frac{1}{p(t)[\mu(t)]^2}dt=\int_{t_0}^\infty\mu(t)|[p(t)\mu'(t)]'|dt$$

を得る. □

定理 12.1. 次の条件

$$\int_{t_0}^\infty\mu(t)|[p(t)\mu'(t)]'|dt<\infty,\tag{12.4}$$

$$\int_{t_0}^\infty\sqrt{\frac{q(t)}{p(t)}}dt=\infty\tag{12.5}$$

を仮定する. そのとき, 方程式 (1.4) の任意の非自明解 u に対して

$$u(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{p(t)q(t)}}\left[A\sin\left(\int_{t_0}^t\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}ds+B\right)+\delta_1(t)\right],\quad\lim_{t\to\infty}\delta_1(t)=0.$$

を満たす定数 $A\neq0$, B と関数 $\delta_1(t)$ が存在する.

証明. 最初に $b=\int_{t_0}^\infty\sqrt{q(t)/p(t)}dt=\infty$ に注意する. いま,

$$x=\int_{t_0}^t\frac{ds}{p(s)[\mu(s)]^2},\quad f(x)=p(t)[\mu(t)]^3[p(t)\mu'(t)]'+1$$

とおくと補題 12.2 と (12.4) より,

$$\int_0^\infty|f(x)-1|dx<\infty$$

が成り立つ. 補題 12.1 より, $z(x)=[\mu(t)]^{-1}u(t)$ は (12.2) の非自明解である. 定理 10.1 より,

$$z(x)=[c_1+\varepsilon_1(x)]\cos x+[c_2+\varepsilon_2(x)]\sin x,$$
$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon_1(x)=\lim_{x\to\infty}\varepsilon_2(x)=0,$$

を満たす定数 c_1, c_2 $(c_1^2+c_2^2\neq0)$ と関数 $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ が存在する. いま,

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_1(x)\cos x+\varepsilon_2(x)\sin x$$

とおく. そのとき,

$$z(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\varepsilon(x)=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\sin(x+B)+\varepsilon(x)$$

を満たす B が存在する. $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\neq 0$ とおくと,

$$[\mu(t)]^{-1}u(t)=A\sin\left(\int_{t_0}^t\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}ds+B\right)+\varepsilon\left(\int_{t_0}^t\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}ds\right)$$

が満たされる. そこで,

$$\delta_1(t)=\varepsilon\left(\int_{t_0}^t\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}ds\right)$$

とおけば $\lim_{t\to\infty}\delta_1(t)=0$ が成り立つ. □

定理 12.1 を方程式 (E) に適用すると次を得る.

系 12.1. 次を仮定する.

$$f\in C^2[t_0,\infty),\quad f(t)>0\ (t\geqq t_0),\quad \int_{t_0}^\infty [f(t)]^{-\frac14}\left|([f(t)]^{-\frac14})''\right|dt<\infty,\quad \int_{t_0}^\infty\sqrt{f(t)}dt=\infty.$$

そのとき, 方程式 (E) の任意の非自明解 y に対して次を満たす定数 $A\neq 0$, B と関数 $\delta_1(t)$ が存在する.

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt[4]{f(t)}}\left[A\sin\left(\int_{t_0}^t\sqrt{f(s)}ds+B\right)+\delta_1(t)\right],\quad \lim_{t\to\infty}\delta_1(t)=0.$$

例 12.1. 次の方程式

(12.6) $$y''+\lambda t^\sigma y=0\quad (t\geqq 1)$$

を考える. ここで, $\lambda>0$, $\sigma\in\mathbf{R}$ とする. 第 6 節でみたように $\sigma=-2$ のときは, Euler の方程式であり, 一般解が求まる. さらに, 第 7 節でみたように $\sigma>-2$ のとき, 任意の非自明解は振動であり, $\sigma<-2$ のとき, 任意の非自明解は非振動である. そこで, $\sigma>-2$ のときの漸近挙動を求めてみよう. $f(t)=\lambda t^\sigma$ とすると,

$$\int_1^t\sqrt{f(s)}ds=\sqrt{\lambda}\int_1^t s^{\frac{\sigma}{2}}ds=\sqrt{\lambda}\left[\frac{1}{\frac{\sigma}{2}+1}s^{\frac{\sigma}{2}+1}\right]_1^t=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sigma+2}\left(t^{\frac{\sigma+2}{2}}-1\right)$$

であるから, $\sigma>-2$ のとき,

$$\int_1^\infty\sqrt{f(s)}ds=\infty$$

が成り立つ. また, $f^{-\frac14}=\lambda^{-\frac14}t^{-\frac{\sigma}{4}}$ であるので,

$$f^{-\frac14}|(f^{-\frac14})''|=\lambda^{-\frac14}t^{-\frac{\sigma}{4}}|(\lambda^{-\frac14}t^{-\frac{\sigma}{4}})''|=\lambda^{-\frac12}t^{-\frac{\sigma}{4}}\left|\left(-\frac{\sigma}{4}\right)\left(-\frac{\sigma}{4}-1\right)t^{-\frac{\sigma}{4}-2}\right|=\frac{|\sigma|(\sigma+4)}{16\sqrt{\lambda}}t^{-\frac{\sigma}{2}-2}$$

を得る. $\sigma>-2$ のとき $-\frac{\sigma}{2}-1<0$ であるので,

$$\int_1^t f^{-\frac14}|(f^{-\frac14})''|ds=\frac{|\sigma|(\sigma+4)}{16\sqrt{\lambda}}\left[\frac{1}{-\frac{\sigma}{2}-1}s^{-\frac{\sigma}{2}-1}\right]_1^t=\frac{|\sigma|(\sigma+4)}{16\sqrt{\lambda}}\frac{-2}{\sigma+2}(t^{-\frac{\sigma}{2}-1}-1)$$

が成り立つ. 従って,

$$\int_1^\infty f^{-\frac14}|(f^{-\frac14})''|ds=\frac{|\sigma|(\sigma+4)}{8\sqrt{\lambda}(\sigma+2)}<\infty.$$

系 12.1 より, $\sigma>-2$ のとき, (12.6) の任意の解 y は

$$y(t)=t^{-\frac{\sigma}{4}}\left[A\sin\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{\sigma+2}t^{\frac{\sigma+2}{2}}+B\right)+\delta_1(t)\right],\quad \lim_{t\to\infty}\delta_1(t)=0$$

の形の漸近挙動をもつ.

13. 振動解の導関数の漸近挙動

前節では, 方程式 (E) の振動解 $u(t)$ の漸近挙動を与えた. ここでは, さらに $u'(t)$ の漸近挙動を導く.

定理 13.1. 条件 (12.4), (12.5) を仮定する. そのとき, 方程式 (1.4) の任意の解 u に対して

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(t)q(t)}}\left[A\sin\left(\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}ds + B\right) + \delta_1(t)\right],$$

$$u'(t) = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{[p(t)]^3}}\left[A\cos\left(\int_{t_0}^{t}\sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}}ds + B\right) + \delta_2(t)\right],$$

$$\lim_{t\to\infty}\delta_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\delta_2(t) = 0.$$

を満たす定数 $A \neq 0$, B と関数 $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ が存在する.

補題 13.1. 条件 (12.4) を仮定する. そのとき, 次の (i), (ii) が成り立つ.

(i) $\int_{t_0}^{\infty} p(t)[\mu'(t)]^2 dt = \infty$ のとき, $\lim_{t\to\infty} p(t)\mu(t)\mu'(t) = \infty$,

(ii) $\int_{t_0}^{\infty} p(t)[\mu'(t)]^2 dt < \infty$ のとき, ある定数 c に対して, $\lim_{t\to\infty} p(t)\mu(t)\mu'(t) = c$.

証明. 最初に

$$(\mu p\mu')' = \mu' p\mu' + \mu(p\mu')' = p(\mu')^2 + \mu(p\mu')'$$

に注意する. これを $[t_0, t]$ 上積分すると,

$$p(t)\mu(t)\mu'(t) = p(t_0)\mu(t_0)\mu'(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(s)(\mu'(s))^2 ds + \int_{t_0}^{t}\mu(s)(p(s)\mu'(s))' ds \tag{13.1}$$

を得る.

$\int_{t_0}^{\infty} p(t)[\mu'(t)]^2 dt = \infty$ のとき, (13.1) で $t\to\infty$ とすると, (12.4) より, $\lim_{t\to\infty} p(t)\mu(t)\mu'(t) = \infty$ を得る,

$\int_{t_0}^{\infty} p(t)[\mu'(t)]^2 dt < \infty$ のとき, (13.1) で $t\to\infty$ とすると, (12.4) より, ある定数 c に対して, $\lim_{t\to\infty} p(t)\mu(t)\mu'(t) = c$ を得る. □

補題 13.2. 条件 (12.4) を仮定する. $\int_{t_0}^{\infty} p(t)[\mu'(t)]^2 dt = \infty$ のとき, $\lim_{t\to\infty}\mu(t) = \infty$ かつ, ある定数 $\gamma > 0$ に対して, $\lim_{t\to\infty} p(t)\mu'(t) = \gamma$.

証明. 補題 13.1 より,

$$\lim_{t\to\infty} p(t)\mu(t)\mu'(t) = \infty \tag{13.2}$$

が成り立つので, ある $t_1 \geqq t_0$ に対して, $[t_1, \infty)$ において, $\mu'(t) > 0$ が成り立つ. 従って, $\mu(t)$ は $[t_1, \infty)$ において増加関数であるから,

$$\mu(t) \geqq \mu(t_1) > 0 \quad (t \geqq t_1)$$

を得る. これより,

$$\int_{t_1}^{t} |[p(s)\mu'(s)]'| ds = \int_{t_1}^{t}\frac{1}{\mu(s)}\mu(s)|[p(s)\mu'(s)]'| ds \leqq \frac{1}{\mu(t_1)}\int_{t_1}^{t}\mu(s)|[p(s)\mu'(s)]'| ds$$

が成り立つ. 条件 (12.4) より,

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_1}^{t}[p(s)\mu'(s)]' ds = \lim_{t\to\infty} p(t)\mu'(t) - p(t_1)\mu'(t_1)$$

が成り立つ. 即ち,

$$\gamma = \lim_{t\to\infty} p(t)\mu'(t)$$

を満たす定数 $\gamma \geqq 0$ が存在する．(13.2) より，$\lim_{t\to\infty}\mu(t)=\infty$ を得る．最後に $\gamma>0$ を示す．$\gamma=0$ を仮定する．そのとき，$[t_1,\infty)$ において

$$\begin{aligned}0<p(t)\mu'(t)&=|p(t)\mu'(t)|\\&=\left|\int_t^\infty [p(s)\mu'(s)]'ds\right|\\&\leqq\int_t^\infty |[p(s)\mu'(s)]'|ds\\&=\int_t^\infty \frac{1}{\mu(s)}\mu(s)|[p(s)\mu'(s)]'|ds\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$[t_1,\infty)$ において

$$0<p(t)\mu(t)\mu'(t)\leqq\int_t^\infty \mu(s)|[p(s)\mu'(s)]'|ds$$

が成り立つが，$t\to\infty$ とすると，$\lim_{t\to\infty}p(t)\mu(t)\mu'(t)=0$ となり，(13.2) に矛盾する．従って，$\gamma>0$ である． □

補題 13.3. 条件 (12.4) を仮定する．$\int_{t_0}^\infty p(t)[\mu'(t)]^2dt=\infty$ のとき，

$$\int_{t_0}^\infty \frac{dt}{p(t)[\mu(t)]^2}<\infty.$$

証明. 補題 13.2 より，ある $\gamma>0$ に対して，$\lim_{t\to\infty}p(t)\mu'(t)=\gamma$ かつ $\lim_{t\to\infty}\mu(t)=\infty$ が成り立つ．よって，ある $t_1\geqq t_0$ に対して，$[t_1,\infty)$ において，$p(t)\mu'(t)\geqq\gamma/2$ が成り立つ．これより，$[t_1,\infty)$ において，

$$-[(\mu(t))^{-1}]'=(\mu(t))^{-2}\mu'(t)=\frac{p(t)\mu'(t)}{p(t)(\mu(t))^2}\geqq\frac{\gamma}{2}\frac{1}{p(t)(\mu(t))^2}$$

が成り立つ．両辺を $[t_1,t]$ 上積分すると

$$-(\mu(t))^{-1}+(\mu(t_1))^{-1}\geqq\frac{\gamma}{2}\int_{t_1}^t\frac{1}{p(s)(\mu(s))^2}ds$$

を得る．これで $t\to\infty$ とすると，

$$\int_{t_1}^\infty\frac{1}{p(s)(\mu(s))^2}ds\leqq\frac{2}{\gamma\mu(x_1)}$$

を得る． □

補題 13.4. 条件 (12.4), (12.5) を仮定する．そのとき，$\lim_{t\to\infty}p(t)\mu(t)\mu'(t)=0$.

証明. 最初に，

$$\int_{t_0}^\infty p(t)[\mu'(t)]^2dt<\infty$$

に注意する．実際，もし

$$\int_{t_0}^\infty p(t)[\mu'(t)]^2dt=\infty$$

ならば，(12.1) と補題 13.3 より

$$\int_{t_0}^\infty\sqrt{\frac{q(t)}{p(t)}}dt\leqq\int_{t_0}^\infty\frac{dt}{p(t)[\mu(t)]^2}<\infty$$

を得るが，これは (12.5) に矛盾する．よって，補題 13.1 より，ある定数 c に対して，

$$\lim_{t\to\infty}p(t)\mu(t)\mu'(t)=c$$

が成り立つ．$c=0$ を示す．$c \neq 0$ と仮定する．ある $t_1 \geqq t_0$ に対して，$[t_1, \infty)$ において

$$[p(t)\mu(t)\mu'(t)]^2 \geqq \frac{c^2}{2}$$

が成り立つ．これより，$[t_1, \infty)$ において

$$\frac{1}{p(t)[\mu(t)]^2} \leqq \frac{2}{c^2} p(t)[\mu'(t)]^2$$

が成り立つ．従って，

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{1}{p(t)[\mu(t)]^2} dt < \infty$$

を得るが，これは (12.5) に矛盾する．よって，$c=0$ を得る． □

定理 13.1 の証明. $u(t)$ の漸近挙動については定理 12.1 で示した．$u'(t)$ の漸近挙動について示す．いま，

$$z(x) = [\mu(t)]^{-1} u(t), \quad x = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{p(s)[\mu(s)]^2}$$

とおくと，z は (12.2) の解であり，定理 12.1 の証明と同様に定理 11.1 より，

$$\begin{gathered}
z(x) = [c_1 + \varepsilon_1(x)] \cos x + [c_2 + \varepsilon_2(x)] \sin x, \\
\frac{dz}{dx} = -[c_1 + \varepsilon_1(x)] \sin x + [c_2 + \varepsilon_2(x)] \cos x, \\
\lim_{x \to \infty} \varepsilon_1(x) = \lim_{x \to \infty} \varepsilon_2(x) = 0,
\end{gathered}$$

を満たす定数 c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 \neq 0)$ と関数 $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ が存在する．補題 12.1 の証明で計算したように

$$\frac{dz}{dx} = -p(t)\mu'(t)u(t) + \mu(t)p(t)u'(t)$$

であったので，

$$\mu(t)p(t)u'(t) = \frac{dz}{dx} + p(t)\mu'(t)u(t) = \frac{dz}{dx} + p(t)\mu'(t)\mu(t)z(x)$$

を得る．$z(x)$ は有界なので，補題 12.4 より，

$$\lim_{x \to \infty} p(t)\mu'(t)\mu(t)z(x) = 0$$

に注意する．また，

$$\begin{aligned}
\mu(t)p(t)u'(t) &= -c_1 \sin x + c_2 \cos x + [-\varepsilon_1(x) \sin x + \varepsilon_2(x) \cos x + p(t)\mu'(t)\mu(t)z(x)] \\
&= A \cos(x + B) + \delta_2(t)
\end{aligned}$$

と表すことができる．ここで，$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \neq 0$ で B は $u(t)$ の漸近挙動のものと一致させることができ，

$$\lim_{t \to \infty} \delta_2(t) = 0$$

を満たす．いま

$$\frac{1}{\mu(t)p(t)} = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{[p(t)]^3}}$$

であるから

$$u'(t) = \sqrt[4]{\frac{q(t)}{[p(t)]^3}} \left[A \cos\left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{q(s)}{p(s)}} ds + B \right) + \delta_2(t) \right]$$

を得る． □

14. 微分方程式系の解の漸近挙動 2

補題 14.1 (グロンウォールの不等式)**.** $K \geqq 0$ を定数とする．もし

$$0 \leqq u(t) \leqq K + \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds \quad (t \geqq t_0) \tag{14.1}$$

ならば

$$u(t) \leqq K e^{\int_{t_0}^{t} F(s)ds} \quad (t \geqq t_0)$$

が成り立つ．

証明. 以下, $t \geqq t_0$ とする．(14.1) を使うと,

$$\begin{aligned}
\left(e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds\right)' &= \left(e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds}\right)' \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds + e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} \left(\int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds\right)' \\
&= -F(t)e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds + e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} F(t)u(t) \\
&= F(t)e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} \left(u(t) - \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds\right) \\
&\leqq KF(t)e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds}
\end{aligned}$$

が得られる．これを $[t_0, t]$ 上積分すると,

$$\begin{aligned}
e^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds &\leqq K \int_{t_0}^{t} F(r)e^{-\int_{t_0}^{r} F(s)ds} dr \\
&= -K \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dr} e^{-\int_{t_0}^{r} F(s)ds} dr \\
&= -Ke^{-\int_{t_0}^{t} F(s)ds} + K
\end{aligned}$$

が成り立つ．両辺に $e^{\int_{t_0}^{t} F(s)ds}$ をかけることにより,

$$K + \int_{t_0}^{t} F(s)u(s)ds \leqq Ke^{\int_{t_0}^{t} F(s)ds}$$

を得る．これと, (14.1) により, 補題 14.1 の結論を得る． □

次の微分方程式系

$$v' = \beta(t)z, \quad z' = \gamma(t)v \tag{14.2}$$

を考える．ここで, $\beta, \gamma \in C[t_0, \infty)$ とする．

補題 14.2. もし

$$\int_{t_0}^{\infty} |\gamma(t)|dt < \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} |\beta(t)| \int_{t}^{\infty} |\gamma(s)|dsdt < \infty \tag{14.3}$$

ならば (14.2) の任意の解 $(v(t), z(t))$ に対して

$$z_\infty = \lim_{t\to\infty} z(t) \tag{14.4}$$

を満たす定数 z_∞ が存在する．さらに, 任意の定数 z_∞ に対して (14.4) を満たす (14.2) の解 $(v(t), z(t))$ が存在する．

証明. $T \geqq t_0$ を任意にとる. 以下, $t \geqq T$ とする. (14.2) の両辺を $[T, t]$ 上積分すると,

$$v(t) = v(T) + \int_T^t \beta(s)z(s)ds, \quad z(t) = z(T) + \int_T^t \gamma(s)v(s)ds$$

を得る. 上の第一式を第二式に代入し, 積分の順序変更を行うと,

$$\begin{aligned} z(t) &= z(T) + \int_T^t \gamma(s)\left(v(T) + \int_T^s \beta(r)z(r)dr\right)ds \\ &= z(T) + v(T)\int_T^t \gamma(s)ds + \int_T^t \gamma(s)\int_T^s \beta(r)z(r)drds \\ &= z(T) + v(T)\int_T^t \gamma(s)ds + \int_T^t \beta(r)z(r)\int_r^t \gamma(s)dsdr \end{aligned} \tag{14.5}$$

が成り立つ. これにより,

$$|z(t)| \leqq |z(T)| + |v(T)|\int_T^t |\gamma(s)|ds + \int_T^t |\beta(r)||z(r)|\int_r^t |\gamma(s)|dsdr$$

を得る. いま,

$$C_1 = |z(T)| + |v(T)|\int_T^\infty |\gamma(s)|ds, \quad F(r) = |\beta(r)|\int_r^\infty |\gamma(s)|ds$$

とおくと

$$|z(t)| \leqq C_1 + \int_T^t F(r)|z(r)|dr$$

が成り立つので, グロンウォールの不等式より,

$$|z(t)| \leqq C_1 e^{\int_T^t F(r)dr} \leqq C_1 e^{\int_T^\infty F(r)dr} := C_2 \tag{14.6}$$

を得る. 従って, (14.6) より,

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \left|\gamma(s)\int_T^s \beta(r)z(r)dr\right| ds &\leqq \int_T^\infty |\beta(r)||z(r)|\int_r^\infty |\gamma(s)|dsdr \\ &\leqq C_2\int_T^\infty |\beta(r)|\int_r^\infty |\gamma(s)|dsdr < \infty \end{aligned}$$

であるから, (14.5) の右辺は $t \to \infty$ のときある定数 z_∞ に収束する. 従って, (14.4) が成り立つ.

補題の後半を証明する. 定数 z_∞ を任意にとる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$|z_\infty|e^2\int_T^\infty F(r)dr < \varepsilon, \quad \int_T^\infty F(r)dr < 2$$

を満たす $T \geqq t_0$ が存在する. ここで,

$$F(r) = |\beta(r)|\int_r^\infty |\gamma(s)|ds$$

である. 初期条件 $(v(T), z(T)) = (0, z_\infty)$ を満たす (14.2) の解を (v, z) とする. 以下, $t \geqq T$ とする. (14.5), (14.6) と同じ計算により,

$$z(t) = z_\infty + \int_T^t \beta(r)z(r)\int_r^t \gamma(s)dsdr \tag{14.7}$$

と

$$|z(t)| \leqq |z_\infty|e^{\int_T^\infty F(r)dr}$$

が成り立つ. 従って, $|z(t)| \leqq |z_\infty|e^2$ であるから, (14.7) より,

$$|z(t) - z_\infty| \leqq \int_T^t |\beta(r)||z(r)|\int_r^t |\gamma(s)|dsdr \leqq |z_\infty|e^2\int_T^t F(r)dr < \varepsilon$$

を得る. これは, (14.4) を意味する. □

補題 14.3. (14.2) が解 $(v(t), z(t))$ をもち, $v(t) \neq 0$ $(t \geqq T)$ かつ

$$\int_T^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds$$

が収束するとき, 次の $(v_1(t), z_1(t))$ も (14.2) の解である.

$$v_1(t) = v(t)\int_t^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds, \quad z_1(t) = z(t)\int_t^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds - [v(t)]^{-1}.$$

証明. (14.2) により,

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= v'(t)\int_t^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds + v(t)(-\beta(t)[v(t)]^{-2}) \\ &= \beta(t)z(t)\int_t^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds - \beta(t)[v(t)]^{-1} \\ &= \beta(t)v_1(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z'(t)\int_t^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds + z(t)(-\beta(t)[v(t)]^{-2}) + [v(t)]^{-2}v'(t) \\ &= \gamma(t)v(t)\int_t^\infty \beta(s)[v(s)]^{-2}ds + z(t)(-\beta(t)[v(t)]^{-2}) + [v(t)]^{-2}\beta(t)z(t) \\ &= \gamma(t)z_1(t) \end{aligned}$$

を得る. 即ち, (v_1, z_1) は (14.2) の解である. □

関数 f, $g \in C[t_0, \infty)$ に対して,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

を

$$f(t) \sim g(t) \quad (t \to \infty)$$

で表す.

補題 14.4. (14.3) を仮定する. さらに $\beta(t) > 0$ $(t \geqq t_0)$ かつ

$$\int_{t_0}^\infty \beta(t)dt = \infty$$

を仮定する. そのとき, 次を満たす (14.2) の解 $(v_1(t), z_1(t))$, $(v_2(t), z_2(t))$ が存在する.

$$v_1(t) \sim 1, \quad v_2(t) \sim \int_{t_0}^t \beta(s)ds \quad (t \to \infty).$$

証明. 補題 14.2 より (14.2) は

$$\lim_{t\to\infty} z_2(t) = 1$$

を満たす解 (v_2, z_2) をもつ. ロピタルの定理より,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v_2(t)}{\int_{t_0}^t \beta(s)ds} = \lim_{t\to\infty} \frac{v_2'(t)}{\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right)'} = \lim_{t\to\infty} \frac{v_2'(t)}{\beta(t)} = \lim_{t\to\infty} z_2(t) = 1$$

を得る. よって, ある $T \geqq t_0$ に対して, $t \geqq T$ のとき,

$$\frac{v_2(t)}{\int_{t_0}^t \beta(s)ds} \geqq \frac{1}{2},$$

即ち,

$$[v_2(t)]^{-2} \leqq 4\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right)^{-2} \tag{14.8}$$

が成り立つ. いま,

$$\left[-\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)^{-1}\right]' = \left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)^{-2}\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)' = \beta(t)\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)^{-2}$$

であることに注意すると,

$$\int_{T}^{\infty}\beta(t)\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)^{-2}dt = \left[-\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)^{-1}\right]_{T}^{\infty} = \left(\int_{t_0}^{T}\beta(s)ds\right)^{-1} \tag{14.9}$$

が成り立つ. 従って, (14.8) と (14.9) により,

$$\int_{T}^{\infty}\beta(t)[v_2(t)]^{-2}dt \leqq 4\int_{T}^{\infty}\beta(t)\left(\int_{t_0}^{t}\beta(s)ds\right)^{-2}dt < \infty$$

を得る. 補題 14.3 より, 次の (v_1, z_1) は (14.2) の解である.

$$v_1(t) = v_2(t)\int_{t}^{\infty}\beta(s)[v_2(s)]^{-2}ds, \quad z_1(t) = z_2(t)\int_{t}^{\infty}\beta(s)[v_2(s)]^{-2}ds - [v_2(t)]^{-1}.$$

従って, ロピタルの定理より,

$$\lim_{t\to\infty} v_1(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_t^{\infty}\beta(s)[v_2(s)]^{-2}ds}{[v_2(t)]^{-1}} = \lim_{t\to\infty}\frac{-\beta(t)[v_2(t)]^{-2}}{-[v_2(t)]^{-2}v_2'(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{z_2(t)} = 1$$

が成り立つ. □

15. 非振動解の漸近挙動

補題 15.1. w_1 が

$$w'' + g(t)w = 0 \tag{15.1}$$

の解で, $w_1(t) \neq 0$ $(t \geqq t_0)$ とする. そのとき (v, z) が

$$v' = w_1^{-2}z, \quad z' = [g(x) - f(x)]w_1^2 v \tag{15.2}$$

の解ならば, $y = w_1(t)v$ は (E) の解である.

証明. いま

$$y' = w_1'v + w_1v' = w_1'v + w_1w_1^{-2}z = w_1'v + w_1^{-1}z,$$

であるから

$$\begin{aligned} y'' &= w_1''v + w_1'v' - w_1^{-2}w_1'z + w_1^{-1}z' \\ &= -g(x)w_1v + w_1'w_1^{-2}z - w_1^{-2}w_1'z + w_1^{-1}[g(x) - f(x)]w_1^2v \\ &= -f(x)w_1v = -f(x)y \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, $y = w_1v$ は (E) の解である. □

定理 15.1. w_1 が以下を満たす (15.1) の非振動解と仮定する.

$$w_1(t) \neq 0 \quad (t \geqq t_0),$$

$$\int_{t_0}^{\infty}[w_1(t)]^{-2}dt = \infty, \quad \int_{t_0}^{\infty}|f(t) - g(t)||w_1(t)||w_2(t)|dt < \infty.$$

ここで,

$$w_2(t) = w_1(t)\int_{t_0}^{t}[w_1(s)]^{-2}ds$$

である. そのとき方程式 (E) は以下を満たす解 y_1, y_2 をもつ.

$$y_1(t) \sim w_1(t), \quad y_2(t) \sim w_2(t) \quad (t \to \infty).$$

証明. $\beta(t) = [w_1(t)]^{-2}$, $\gamma(t) = [g(t) - f(t)][w_1(t)]^2$ とおく. そのとき, $\beta(t) > 0$ $(t \geqq t_0)$ であり,

$$\int_{t_0}^{\infty} \beta(t)dt = \infty$$

が成り立つ. また, $t \geqq t_0 + 1$ のとき,

$$\frac{|w_2(t)|}{|w_1(t)|} = \int_{t_0}^{t} \beta(s)ds \geqq \int_{t_0}^{t_0+1} \beta(s)ds =: C,$$

即ち,

$$|w_1(t)| \leqq C^{-1}|w_2(t)|$$

が成り立つ. よって,

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty} |\gamma(t)|dt &= \int_{t_0}^{t_0+1} |\gamma(t)|dt + \int_{t_0+1}^{\infty} |\gamma(t)|dt \\
&= \int_{t_0}^{t_0+1} |\gamma(t)|dt + \int_{t_0+1}^{\infty} |g(t) - f(t)||w_1(t)||w_1(t)|dt \\
&\leqq \int_{t_0}^{t_0+1} |\gamma(t)|dt + C^{-1}\int_{t_0+1}^{\infty} |g(t) - f(t)||w_1(t)||w_2(t)|dt < \infty
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{\infty} |\beta(t)| \int_{t}^{\infty} |\gamma(s)|dsdt &= \int_{t_0}^{\infty} |\gamma(s)| \int_{t_0}^{s} |\beta(t)|dtds \\
&= \int_{t_0}^{\infty} |g(s) - f(s)||w_1(s)|^2 \int_{t_0}^{s} [w_1(t)]^{-2}dtds \\
&= \int_{t_0}^{\infty} |g(s) - f(s)||w_1(s)||w_2(s)|ds < \infty
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, (14.3) が成り立つので, 補題 14.4 より, 微分方程式系

$$v' = [w_1(t)]^{-1}, \quad z' = [g(t) - f(t)][w_1(t)]^2 v$$

は

$$v_1 \sim 1, \quad v_2 \sim \int_{t_0}^{t} [w_1(t)]^{-2}dt \quad (t \to \infty)$$

を満たす解 (v_1, z_1), (v_2, z_2) をもつ. そこで, $y_1 = w_1(t)v_1$, $y_2 = w_1(t)v_2$ とおくと, 補題 15.1 より, y_1, y_2 は (E) の解である. さらに

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_1(t)}{w_1(t)} = \lim_{t\to\infty} v_1(t) = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_2(t)}{w_2(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{w_1(t)v_2(t)}{w_1(t)\int_{t_0}^{t}[w_1(s)]^{-2}ds} = \lim_{t\to\infty} \frac{v_2(t)}{\int_{t_0}^{t}[w_1(s)]^{-2}ds} = 1$$

であるから, $y_1(t) \sim w_1(t)$, $y_2(t) \sim w_2(t)$ $(t \to \infty)$ が満たされる. □

系 15.1. もし

$$\int_{t_0}^{\infty} (t - t_0)|f(t)|dt < \infty$$

ならば (E) は次を満たす解 y_1, y_2 をもつ.

$$y_1(t) \sim 1, \quad y_2(t) \sim t \quad (t \to \infty).$$

証明. $g(t) \equiv 0$ とする．方程式 $w'' + g(t)w = 0$ は解 $w_1(t) \equiv 1$ をもつ．そのとき，

$$\int_{t_0}^{\infty} [w_1(s)]^{-2} ds = \infty$$

である．いま，

$$w_2(t) = w_1(t) \int_{t_0}^{t} [w_1(s)]^{-2} ds = t - t_0$$

とおく．そのとき，

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t) - g(t)||w_1(t)||w_2(t)| dt = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0)|f(t)| dt < \infty$$

が満たされる．よって，定理 15.1 より，(E) は次を満たす解 y_1, y_2 をもつ．

$$y_1(t) \sim 1, \quad y_2(t) \sim t - t_0 \quad (t \to \infty).$$

このとき，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_2(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{y_2(t)}{t - t_0} \frac{t - t_0}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{y_2(t)}{t - t_0} \left(1 - \frac{t_0}{t}\right) = 1$$

であるから，$y_2(t) \sim t$ $(t \to \infty)$ が成り立つ． □

系 15.2. もし，ある定数 $\lambda > 0$ に対して

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t) + \lambda^2| dt < \infty$$

ならば (E) は次を満たす解 y_1, y_2 をもつ．

$$y_1(t) \sim e^{-\lambda t}, \quad y_2(t) \sim e^{\lambda t} \quad (t \to \infty).$$

証明. $g(t) \equiv -\lambda^2$ とする．方程式 $w'' + g(t)w = 0$ は解 $w_1(t) = e^{-\lambda t}$ をもつ．そのとき，

$$\int_{t_0}^{\infty} [w_1(s)]^{-2} ds = \int_{t_0}^{\infty} e^{2\lambda s} ds = \left[\frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda s}\right]_{t_0}^{\infty} = \infty$$

である．いま，

$$w_2(t) = w_1(t) \int_{t_0}^{t} [w_1(s)]^{-2} ds = e^{-\lambda t} \frac{1}{2\lambda}(e^{2\lambda t} - e^{2\lambda t_0}) = \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda t} - \frac{1}{2\lambda} e^{2\lambda t_0} e^{-\lambda t}$$

とおく．そのとき，

$$0 \leqq w_2(t) \leqq \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda t}$$

であるから，

$$\int_{t_0}^{\infty} |f(t) - g(t)||w_1(t)||w_2(t)| dt \leqq \int_{t_0}^{\infty} |f(t) + \lambda^2| e^{-\lambda t} \frac{1}{2\lambda} e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \int_{t_0}^{\infty} |f(t) + \lambda^2| dt < \infty$$

が満たされる．よって，定理 15.1 より，(E) は次を満たす解 y_1, Y_2 をもつ．

$$y_1(t) \sim e^{-\lambda t}, \quad Y_2(t) \sim w_2(t) \quad (t \to \infty).$$

いま，$y_2 = 2\lambda Y_2$ とおくと，y_2 は (E) の解であり，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y_2(t)}{e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2\lambda Y_2(t)}{e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{Y_2(t)}{w_2(t)} \frac{2\lambda w_2(t)}{e^{\lambda t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{Y_2(t)}{w_2(t)} (1 - e^{2\lambda t_0} e^{-2\lambda t}) = 1$$

であるから，$y_2(t) \sim e^{\lambda t}$ $(t \to \infty)$ が成り立つ． □

参考文献

[1] W. A. Coppel, Stability and asymptotic behavior of differential equations. D. C. Heath and Co., Boston, Mass. 1965.

[2] W. A. Coppel, Disconjugacy. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 220. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[3] P. Hartman, Ordinary differential equations. Corrected reprint of the second (1982). With a foreword by Peter Bates. Classics in Applied Mathematics, 38. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.

[4] 草野尚, 境界値問題入門 (基礎数学シリーズ), 朝倉書店, 2005 (復刊版).

[5] R. S. Palais, A simple proof of the Banach contraction principle, J. Fixed Point Theory Appl. 2 (2007), 221–223.

[6] C. A. Swanson, Comparison and oscillation theory of linear differential equations. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 48. Academic Press, New York-London, 1968.

[7] 吉沢太郎, 微分方程式入門 (基礎数学シリーズ), 朝倉書店, 2005 (復刊版).

所々で微分方程式の一般論を用いたが, それは, 例えば [3], [7] などを参照してほしい. 第 4 節のような 2 階線形微分方程式の一般的な性質は [3], [4] が詳しい. 第 5–9 節の解の振動性については [2], [3], [6] を参考にした. 第 10–15 節の解の漸近挙動については [1], [3] を参考にした.

謝辞

内藤雄基先生 (愛媛大学) は拙稿を熟読して多くの有益な助言を与えて下さいました. そのご支援に心から感謝致します.