幾何学と演習II (6/19 (金) 3回目)

今日の内容

⓪ 同値関係

---

§2 同値関係

やりたい事　集合の元を同じグループに分ける.

(例) 1学年を男子, 女子で分ける.
応用数学科を出身地毎に分ける.
⋮

Q "同じ"とは何か?

Def 集合 X に対して,
次の3つを満たす関係"$\sim$"を
同値関係と言う.

① $\forall x \in X,\ x \sim x$ (反射律)

② $x, y \in X$ に対して $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (対称律)

③ $x, y, z \in X$ に対して,
$x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (推移律)

E.g. 1 [グループ分けする]

$$X = \{\underbrace{a_1, a_2, a_3}_{=A}, \underbrace{b_1, b_2}_{=B}\}$$ とする.

AUB かつ A∩B=φ の時 A⊔B で書く

(つまり $X = A \sqcup B$
$A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$
でグループ分けする.)

$x, y \in X$ に対して

$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x, y \in A$ or $x, y \in B$

グループに入っているものを同じと思っている

とすると "~" は同値関係.

"~" は自分で何か定義する必要があります

㋑

- $\forall x \in X$, $x \in A \Rightarrow x \in A$
  $x \in B \Rightarrow x \in B$ より $x \sim x$ (反射律)

- $x, y \in X$, $x, y \in A \Rightarrow y, x \in A$
  $x, y \in B \Rightarrow y, x \in B$ より $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
  (対称律)

- $x, y, z \in X$,

A∩B=φ を使っていることに注意

もしも, $x, y \in A$, $y, z \in A \Rightarrow x, z \in A$
$x, y \in B$, $y, z \in B \Rightarrow x, z \in B$ より
$x \sim y$, $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (推移律) ■

E.g. 2 [$\overset{\text{イコール}}{=}$ は同値関係]

$x, y \in \mathbb{R}$ (つまり x, y は実数)

$x \sim y \overset{def}{\iff} x = y$

とすると "$\sim$" は同値関係.

∵ (反射律) $x = x$ より $x \sim x$

(対称律) $x \sim y \iff x = y$

$\therefore y = x$ つまり $y \sim x$

(推移律) $x \sim y$, $y \sim z$ とすると.

$x = y$, $y = z$.

$\therefore x = z$ つまり $x \sim z$ ▨

同値関係を
示す為には
① 反射律
② 対称律
③ 推移律
を check すれば良い

E.g. 3 [代数的な同値関係]

$x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x - y \in \mathbb{Z}$$

は同値関係.

∵ ◎ $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ より $x \sim x$

◎ $x - y \in \mathbb{Z}$ とすると. $k = x - y \in \mathbb{Z}$ に対して, $-k = y - x \in \mathbb{Z}$

$\therefore x \sim y \Rightarrow y \sim x$

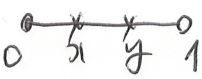
◎ $x - y,\ y - z \in \mathbb{Z}$ とすると, $k_1 = x - y,\ k_2 = y - z \in \mathbb{Z}$ に対して.

$x - z = (x - y) + (y - z) = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ □

(∵ 整数を2つ足したら整数)

より具体的には, 例えば, 上の同値関係では

- 整数は全て同値. $1 \sim 2$, $0 \sim 100$, ..
- $\frac{1}{2} + k$ ($k \in \mathbb{Z}$) の形の数も全て同値
  $\frac{1}{2} \sim \frac{3}{2}$, $\frac{1}{2} \sim \left(\frac{1}{2} + 4\right)$, ..
- ☆ ${}^{\forall}x, y \in [0, 1)$ は $x \not\sim y$ (x と y は同値でない)



E.g.4 [同値関係にならない関係]

$$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \leq y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

とすると，これは同値関係にならない．

(∵) ・$x \leq x$ より $x \sim x$（反射律）

・$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$ より

$x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$（推移律）

は満たすが，

・$x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ に対して．

例えば $1 \sim 2$ は成り立つが．

$2 \not\leq 1$ なので $2 \sim 1$ が成り立たない

∴ 対称律を満たさないので

$x \leq y$ は同値関係にならない　■

問

$\boxed{\text{自分で集合 } X \text{ を定義して，その任意の元 } x, y \in X \text{ の間に関係 “}\sim\text{” を定義して，それが同値関係になるか調べよ.}}$

自分で作ってみる
こういう訓練をくり返して行くと抽象的な概念にも強くなって行けると思います．

◎ 同値類

これが理解できたら今日の目標達成です

Def

X に同値関係"$\sim$"が定義されたとする.

$x \in X$ が属する **同値類** $[x]$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $[x] = \{ y \in X \mid x \sim y \}$

$y \in [x]$ を同値類 $[x]$ に属する **代表元** という.

E.g. 1 　②の E.g.1 に対して.

$x \sim y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x, y \in A$ or $x, y \in B$

$X = \{ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \}$

$[a_1] = \{ x \in X \mid a_1 \sim x \}$
$= \{ a_1, a_2, a_3 \} = A$ （$= [a_2] = [a_3]$ にも注意）

$[b_1] = \{ x \in X \mid b_1 \sim x \}$
$= \{ b_1, b_2 \} = B$ （$= [b_2]$ にも注意）

☆ 同値類はグループそのもの!

E.g.2

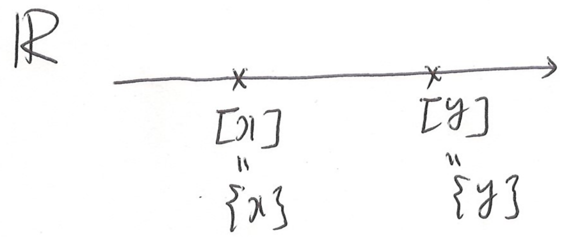
③の E.g.2 に対して,

$$x,y\in\mathbb{R},\quad x\sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x=y$$

より, $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$[x]=\{y\in\mathbb{R}\mid x\sim y\}$$
$$=\{x\}$$

☆ 同値類は一点集合!



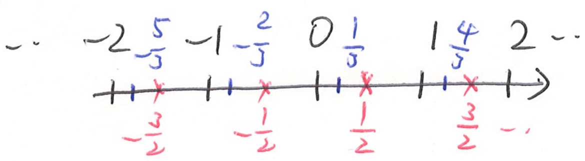
各点が同値類の代表元.

E.g.3

④の E.g.3 に対して

$$x\sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x-y\in\mathbb{Z}$$

より



$$[0]=\{x\in\mathbb{R}\mid x-0=x\in\mathbb{Z}\}=\mathbb{Z}\quad(=[1]=[-1]=[2]\cdots)$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\right]=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\; x-\tfrac{1}{2}\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\tfrac{1}{2}+r\;\middle|\; r\in\mathbb{Z}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$$

$$\left[\tfrac{1}{3}\right]=\left\{\tfrac{1}{3}+r\;\middle|\; r\in\mathbb{Z}\right\}=\frac{1}{3}+\mathbb{Z}$$

$\vdots$

注意

① 同値類 $[x]$ は X の部分集合

$$[x] \subset X$$

② $x \sim y$ ならば $[x] = [y]$

つまり、$[x] \subset [y]$ かつ $[x] \supset [y]$

③ $x \nsim y$ ならば $[x] \cap [y] = \phi$

問 上の①,②,③を示せ

つまり...

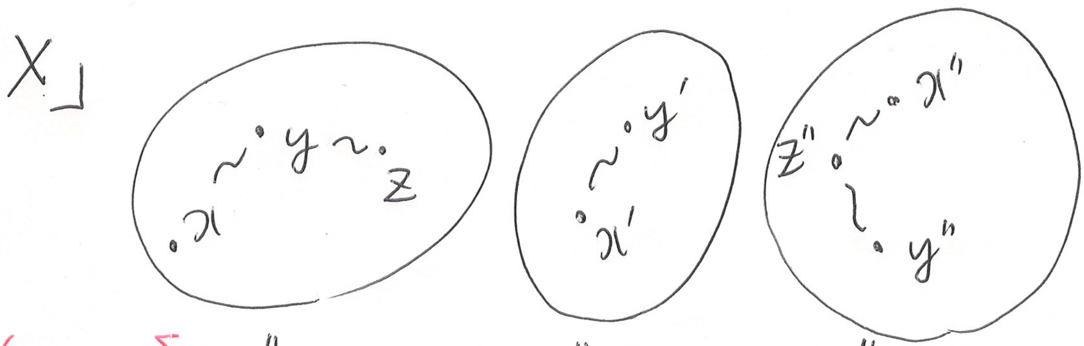
X を同値類で分けることができる!

$\boxed{X/_\sim := \{ [x] \mid x \in X \}}$ を 商集合 という

同値類を一点と思っている。

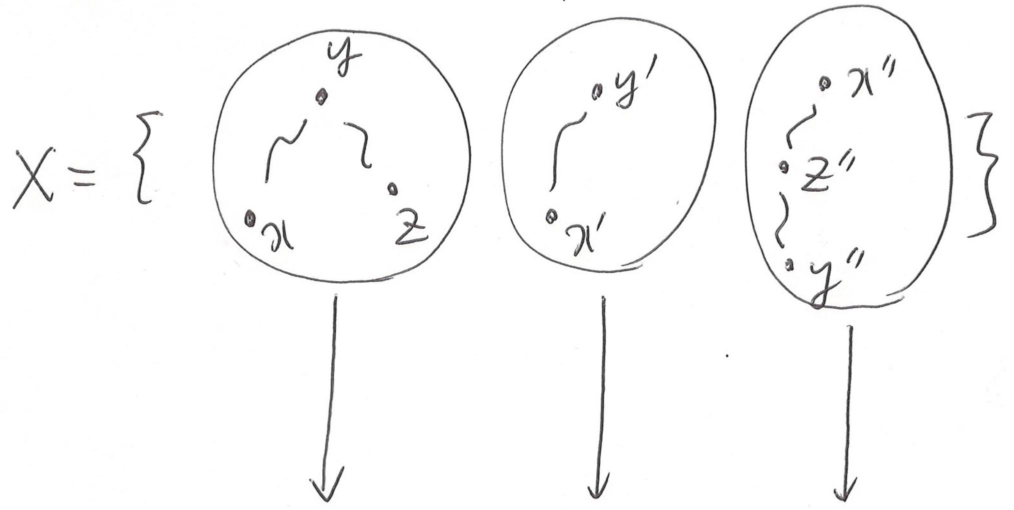
イメージ

同値類でグループに分ける!



$$X/_\sim = \{ [x], [y'], [x''] \}$$

次のような写像ができているのに注意する.



$$X/\sim = \{\ [x]\ ,\ [x']\ ,\ [x'']\ \}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} p: X & \longrightarrow & X/\sim \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}}$$

を(自然な)射影と言う.

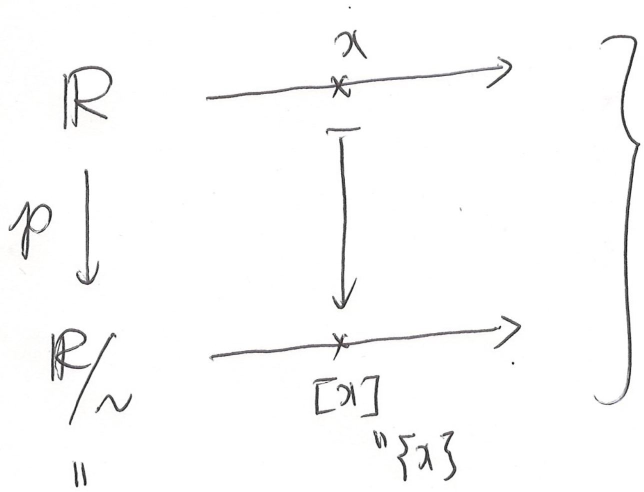
※ 必ず全射になる! ← なぜでしょう?

E.g. 1 $X = \{\underbrace{a_1, a_2, a_3}_{A}, \underbrace{b_1, b_2}_{B}\}$, $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x, y \in A$ or $x, y \in B$

に対して,

$$\begin{array}{c} X = \{a_1, a_2, a_3, \ b_1, b_2\} \\ p \big\downarrow \\ X/\sim = \{\ \underset{A}{\underset{\shortparallel}{[a_1]}}\ ,\ \underset{B}{\underset{\shortparallel}{[b_1]}}\ \} \end{array}$$

E.g. 2 $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = y$

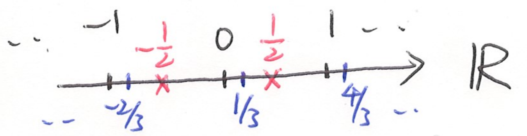


$\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}$ と思うと恒等写像 $id_{\mathbb{R}}$ と思える.

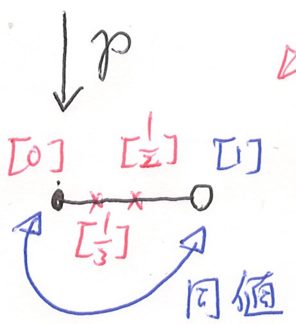
$\mathbb{R}/\sim = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\}$, $[x] = \{x\}$

E.g. 3 $x, y \in \mathbb{R}$, $x \sim y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$

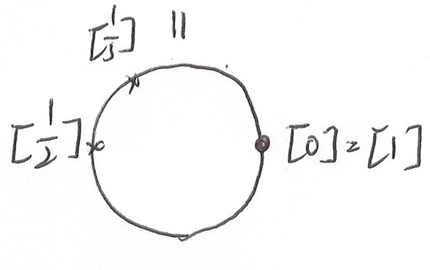
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{p} & \mathbb{R}/\sim \\ \in & & \in \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$



同値類としては $[0,1)$ を考えれば十分!



$\mathbb{R}/\sim$ ($= \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とも書く)



$\cong S^1$ (円周)

同値類を使って新しい空間が作れる! 実はトーラス も同値類で定義してる

E.g.4 [実射影空間]

おはなし

飛ばして E.g.5へ 行ってもいいです

平面から原点を除いた集合

$$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$$

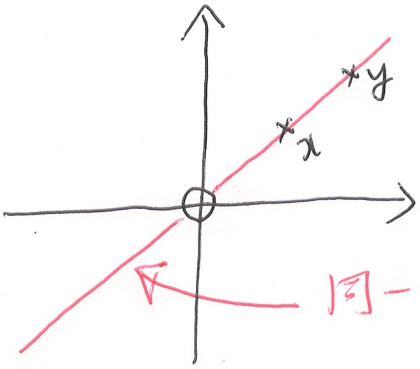
$x,y\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,

$$x\sim y \overset{def}{\iff} \exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\};\ y=\lambda x.$$

とすると，これは同値関係になる。

なぜでしょう?

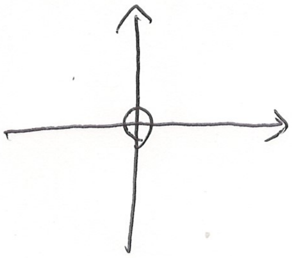
つまり，

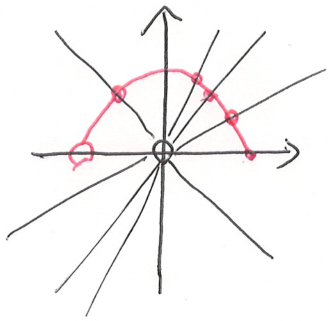


同一直線上にある点を同値と思う。

この時の自然な射影は

$$\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}/\sim$$





直線を一点と思ったもの!
(実射影空間と呼ばれる)

12

$\simeq S^1$

この同一視でも円周が作れる

☆ 1次元実射影空間はS^1と同相

⑫ 3回目

E.g. 5 [$\mathbb{Z}$-加群]

これが一番大事な例なので課題もこれに似たものを出しておきます

$x, y \in \mathbb{Z}$,

$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} x-y$ は3の倍数.

$\left(\overset{\text{iff}}{\iff} x-y \in 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\} \right)$

は $\boxed{\text{同値関係}}$

(∵) ・反射律は $x-x=0=3\cdot 0 \in 3\mathbb{Z}$ より $x \sim x$

・対称律は $x-y \in 3\mathbb{Z}$ とすると ($x \sim y$ を仮定すると)

$\exists k \in \mathbb{Z}\ ;\ x-y=3k$

$\therefore\ y-x=-3k=3(-k) \in 3\mathbb{Z}$

$\therefore\ y \sim x$

・推移律は $x \sim y,\ y \sim z$ とすると

$x-y,\ y-z \in 3\mathbb{Z}$ なので

$\exists k, k' \in \mathbb{Z}\ ;\ x-y=3k,\ y-z=3k'$

$$\begin{aligned}\therefore\ x-z &= (x-y)+(y-z)\\ &= 3k+3k'\\ &= 3(k+k') \in 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

$\therefore\ x \sim z$ ▨

$\mathbb{Z}/\sim$ の事を $\underline{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ (または $\underline{\mathbb{Z}_3}$) と書く.

位数3の巡回群となる.

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を外延的記法で書く.

天下り的ですが
0,1,2の同値類
を考えてみます

$$[0]=\{k\in\mathbb{Z}\mid k-0\in 3\mathbb{Z}\}$$
$$=\{3k\mid k\in\mathbb{Z}\}=3\mathbb{Z}$$

$(=[3]=[6]=[-3]=\cdots$ にも注意$)$

$$[1]=\{k\in\mathbb{Z}\mid k-1\in 3\mathbb{Z}\}$$
$$=\{3k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}=3\mathbb{Z}+1$$

$(=[4]=[7]=[10]=\cdots$ にも注意$)$

$$[2]=\{k\in\mathbb{Z}\mid k-2\in 3\mathbb{Z}\}$$
$$=\{3k+2\mid k\in\mathbb{Z}\}=3\mathbb{Z}+2$$

$(=[5]=[-1]=\cdots$ にも注意$)$

以上より,

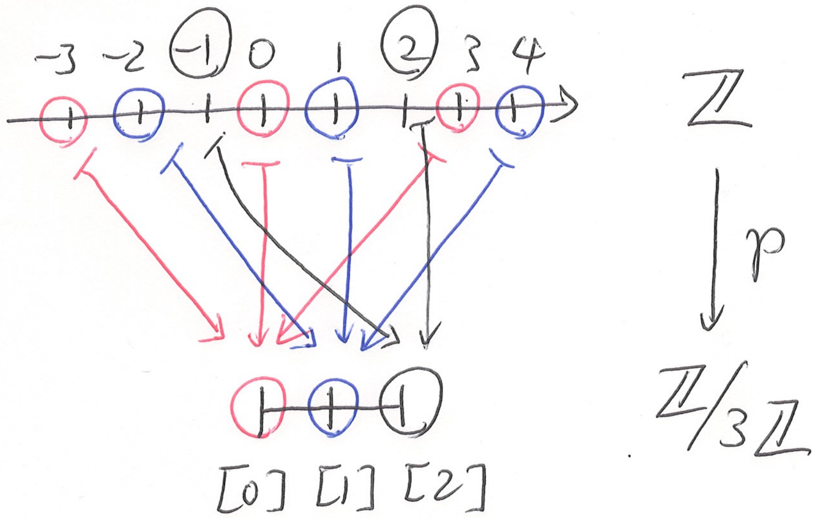
$$\mathbb{Z}=[0]\sqcup[1]\sqcup[2]$$

と分けることができるので,

$$\boxed{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}=\{[0],[1],[2]\}}$$

$=\{0,1,2\}$ とも書く.

つまり，自然な射影は．



◎ $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ には足し算も定義できる！

$\boxed{[x]+[y]:=[x+y] \text{ で定義する！}}$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の乗積表

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[1+2]=[3]=[0]
[2]	[2]	[2+1]=[3] =[0]	[2+2]=[4] =[1]

☆ 同値関係で群（$\mathbb{Z}$等）から新しい群（$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$等）を作ることができる！

次回以降詳しくやります

[補足3]

商空間

$$\begin{cases} (X, \mathcal{O}) : \text{位相空間} \\ \quad Y : \text{集合} \\ f : X \longrightarrow Y \ (\text{全射}) \end{cases}$$

が与えられるとき，Yの位相を次のように定めることができる.

$$\boxed{\mathcal{O}(f) := \{ H \subset Y \mid f^{-1}(H) \in \mathcal{O} \}}$$

これをYの**商位相**といい

$(Y, \mathcal{O}(f))$を**商空間**という

$\boxed{\text{問1}}$ $\mathcal{O}(f)$がYの位相になることを示せ

つまり，位相の公理①〜③を満たすことを示せ

注 $f : (X, \mathcal{O}) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}(f))$
は連続写像になる

定義より明らかなのですが証明できるでしょうか?

補2

3回目

特に位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の同値関係"$\sim$"に対して

$$p: X \longrightarrow X/\sim \quad (\text{自然な射影})$$

を通して

$(X/\sim, \mathcal{O}(p))$ は位相空間になる

⑨ 円周 (S^1) の位相あれこれ

S^1 (円周) は (今まで) 次の2つのやり方で位相空間とみなせることが分かっている。

例 $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

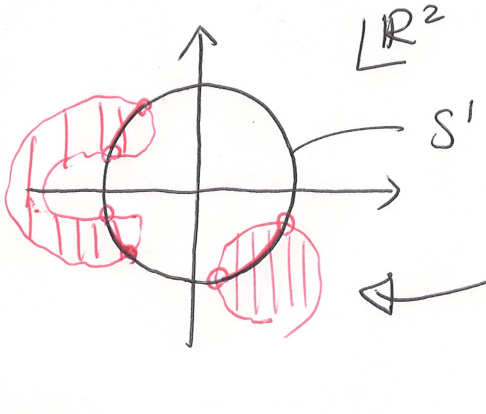
に対して、次は位相になる。

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= \{O \subset S^1 \mid {}^{\exists} U \subset \mathbb{R}^2 (\text{開集合}); O = U \cap S^1\} \\ &= \{U \cap S^1 \mid U \subset \mathbb{R}^2 (\text{開集合})\}\end{aligned}}$$

(この位相のことを S^1 上の $\mathbb{R}^2$ の相対位相という)

$A \subset (X, \mathcal{O})$ の時に X の位相 $\mathcal{O}$ を A へ制限してもののことです

つまり...



$\mathbb{R}^2$ の開集合との共通部分を開集合として定義した位相

[2] E.g.3の同一視

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \\ \quad \downarrow p \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim \end{array}$$

$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

0　1

$\cong$

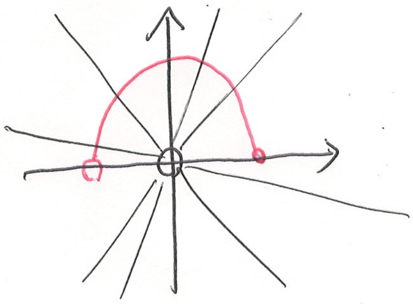
$\bigcirc = S^1 \ (\simeq T^1)$

1次元トーラスの意味

$\mathcal{O}(p) = \mathcal{O}_2$ (商位相) $((\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathcal{O}_2)$を$T^1$で書く)

[3] 実射影空間 (①のE.g.4参照)

($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$には$\mathbb{R}^2$の相対位相を入れておく.)



$\simeq \bigcirc \ (\simeq \mathbb{R}P^1)$

S^1

real projective space の略

商位相を$\mathcal{O}_3$で書く. ($(S^1, \mathcal{O}_3)$を$\mathbb{R}P^1$で書く)

問2

上で定義した(S^1上の)3つの位相空間

$(S^1, \mathcal{O}_1) =: S^1$, $(S^1, \mathcal{O}_2) =: T^1$, $(S^1, \mathcal{O}_3) =: \mathbb{R}P^1$

が全て同相であることを示せ.