

例題で学ぶ はじめての微分方程式

Web 補足資料

鬼塚政一・榊原航也・濱谷義弘 共著

令和 6 年 4 月

© 鬼塚政一・榊原航也・濱谷義弘 2024

本 Web 補足資料の無断複写は、著作権上での例外を除き、禁じられています。

目 次

A	補足：1 章 クレロー型の微分方程式	1
B	補足：2 章 現象の数理 (振り子のモデル, 機関車モデル)	5
C	補足：4 章 現象の数理 (ニューロンモデル)	10

A 補足：1章 クレロー型の微分方程式

これまで扱ってきた“ $y' = (x \text{ と } y \text{ の関数})$ ”の形で書ける1階微分方程式を**正規形**とよびます。本節では、この形とは違った

$$y = xy' + (y')^2 \quad (\text{A.1})$$

のような形の微分方程式を解くことを目標にします。このように、 $(y')^2$ が入っているなどして、1階微分方程式が y' について解けていないとき、その1階微分方程式を**非正規形**とよびます。

●クレロー型微分方程式の一般解と特異解

式 (A.1) は次のようにして解くことができます。まず、両辺を x で微分すれば、

$$y' = 1 \cdot y' + x \cdot y'' + 2(y')^{2-1}y'' = y' + xy'' + 2y'y''$$

となります。両辺に y' があるので、整理して書くと

$$xy'' + 2y'y'' = 0$$

です。さらに、 y'' でくくれば、

$$y''(x + 2y') = 0$$

を得ます。この式は

$$y'' = 0, \quad \text{または} \quad x + 2y' = 0$$

を意味します。ここから、(i) $y'' = 0$ と (ii) $x + 2y' = 0$ に場合分けして考えましょう。

(i) $y'' = 0$ の場合。両辺を x で積分すれば、

$$(\text{左辺}) = \int y'' dx = y' + C_1, \quad (\text{右辺}) = 0$$

より、

$$y' = -C_1$$

となります。ただし、 C_1 は積分定数です。ここで、 $C = -C_1$ とおき、 $y' = C$ を式 (A.1) に代入すると、一般解

$$y(x) = Cx + C^2 \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得ます。

(ii) $x + 2y' = 0$ の場合. このとき,

$$y' = -\frac{x}{2}$$

と書きかえることができます. これを式 (A.1) に代入すると,

$$y = x \cdot \left(-\frac{x}{2}\right) + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

となり, 解

$$y(x) = -\frac{x^2}{4}$$

を得ます. この解は一般解の任意定数 C にどんな値を代入しても得られません. このような解を**特異解**とよびます.

一般に,

$$y = xy' + f(y') \quad (\text{A.2})$$

の形をした微分方程式を**クレロー型**とよび, 上記と同じ手順で解を求めることができます.

クレロー型微分方程式の解法

(ステップ 1) 両辺を微分して $y''(x + f'(y')) = 0$ の形にする.

(ステップ 2) $y'' = 0$ と $x + f'(y') = 0$ で場合分けする.

(i) $y'' = 0$ のとき, 両辺を積分して, $y' = C$ を式 (A.2) に代入すると, 一般解 $y(x) = Cx + f(C)$ を得る.

(ii) $x + f'(y') = 0$ のとき, $y' = (x \text{ の関数})$ にしてこれを式 (A.2) に代入すると特異解を得る.

では, 例題を解いて確認しましょう.

例題 A.1. 次の微分方程式の解を求めなさい.

$$y = xy' - e^{y'}. \quad (\text{A.3})$$

解答: (ステップ 1) まず, 両辺を x で微分すれば,

$$y' = 1 \cdot y' + x \cdot y'' - e^{y'} y'' = y' + xy'' - e^{y'} y''$$

となるので

$$xy'' - e^{y'} y'' = 0$$

である。さらに、 y'' でくくれば、

$$y''(x - e^{y'}) = 0$$

を得る。

(ステップ2) (i) $y'' = 0$ の場合。両辺を x で積分すれば、

$$y' = C$$

である。 $y' = C$ を式 (A.3) に代入すると、一般解

$$y(x) = Cx - e^C \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る。

(ii) $x - e^{y'} = 0$ の場合。このとき、

$$e^{y'} = x$$

なので、両辺の対数をとれば

$$y' = \log e^{y'} = \log x$$

である。これを式 (A.3) に代入すると、特異解

$$y(x) = x \cdot (\log x) - e^{\log x} = x \log x - x = x(\log x - 1)$$

を得る。 □

●クレロー型微分方程式の初期値問題

例 次に、初期値問題、例えば

$$y = xy' + \frac{(y')^2}{2}, \quad y(0) = y_0 \tag{A.4}$$

について考えましょう。まず、両辺を x で微分すれば、

$$y' = 1 \cdot y' + x \cdot y'' + 2 \frac{(y')^{2-1}}{2} y'' = y' + xy'' + y' y''$$

となりますので、

$$y''(x + y') = 0$$

を得ます。

(i) $y'' = 0$ の場合。両辺を x で積分すれば $y' = C$ ですので、これを式 (A.4) に代入すると、一般解

$$y(x) = Cx + \frac{C^2}{2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得ます。ここで、初期条件 $y(0) = y_0$ より、

$$y_0 = y(0) = \frac{C^2}{2}$$

なので, $y_0 \geq 0$ でなくてはなりません. また, C について解けば,

$$C = \pm\sqrt{2y_0}$$

となります. これを一般解へ代入すると, 初期値問題の解

$$\begin{aligned} y(x) &= \pm\sqrt{2y_0}x + \frac{(\pm\sqrt{2y_0})^2}{2} = \pm\sqrt{2y_0}x + \frac{2y_0}{2} \\ &= \pm\sqrt{2y_0}x + y_0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

を得ます.

(ii) $x + y' = 0$ の場合. このとき $y' = -x$ ですので, これを式 (A.4) に代入すると, 特異解

$$y(x) = x(-x) + \frac{(-x)^2}{2} = -x^2 + \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{2}$$

を得ます. ■

以上の例からわかるように, 初期値問題の解は一般解から得られます. また, この場合, 特異解に $x = 0$ を代入すると $y(0) = 0$ ですので, 特異解 $y(x) = -\frac{x^2}{2}$ は初期条件 $y(0) = 0$ をみたす解です. 一方, 解 (A.5) に $y_0 = 0$ を代入すると,

$$y(x) = 0$$

となります. よって, これもまた初期条件 $y(0) = 0$ をみたす解といえます. この事実から, “初期条件 $y(0) = 0$ をみたす微分方程式 (A.4) の解は一意ではない (ただ一つではない)” ことがわかります. また, このことは, $y(x) = 0$ と $y(x) = -\frac{x^2}{2}$ のグラフが $x = 0$ で接することからも明らかです.

問題 A.2. 次の微分方程式の解を求めなさい.

$$(1) \ y = xy' - (y')^2 \quad (2) \ y = xy' + \frac{1}{y'} \quad (3) \ y = xy' - \log y'$$

問題の略解 以下, C は任意定数を表す.

$$(1) \ y(x) = Cx - C^2, \quad y(x) = \frac{x^2}{4}$$

$$(2) \ y(x) = Cx + \frac{1}{C}, \quad y(x) = \pm 2\sqrt{x}$$

$$(3) \ y(x) = Cx + \log C, \quad y(x) = 1 - \log \frac{1}{x}$$

B 補足：2章 現象の数理解(振り子のモデル，機関車モデル)**●振り子のモデル**

図 1 にあるような振り子の運動は，振り子の角度を y として，微分方程式

$$y'' = -\omega^2 \sin y \quad (\text{B.1})$$

の形で与えられることが知られています¹⁾。ただし， ω は $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ により与えられる正の定数で，ここで l は振り子の長さ， g は重力加速度です。この微分方程式は，解を初等関数で表せないことが知られています。そこで，角度 y が十分小さい範囲を動くときと仮定すると， $\sin y$ のマクローリン展開

$$\sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots$$

より

$$\sin y \doteq y$$

とみなせますので，微分方程式 (B.1) の近似方程式

$$y'' = -\omega^2 y \quad (\text{B.2})$$

を得ます²⁾。この方程式は定数係数 2 階線形微分方程式ですので解くことができます。特性方程式

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

の解は $\lambda = \pm \omega i$ となります。これらは相異なる虚数解ですので，2 階線形微分方程式 (B.2) の一般解

$$y(x) = C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

を得ます。一般解のなかに $\sin(\omega x)$ や $\cos(\omega x)$ が入っていますから，これは振り子が周期的に揺れ動くことを表しています。

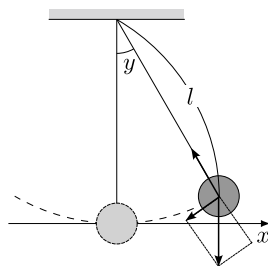


図 1 振り子の模式図

1) 角度を θ と表す教科書のほうが多いかもしれませんが，本書ではこれまで使い慣れている y で表すことにします。詳しくは，野原 勉 著「応用微分方程式講義＝振り子から生態系モデルまで」東京大学出版会 (2013) などを参照してください。

2) このことを“方程式 (B.1) を方程式 (B.2) に線形近似する”といいます。4.3 節で詳しく説明します。

●機関車モデル

ここでは、機関車の数理モデルが、ばね力学系として広く知られる 2 階線形微分方程式

$$y'' + 2by' + c^2y = 0 \quad (\text{B.3})$$

の形に帰着できることを紹介します。ただし、

$$b = \frac{B}{2M}, \quad c = \sqrt{\frac{K}{M}}$$

であり、 K はばね定数、 M は質量、 B は摩擦定数です。ここで、もし $b = 0$ ならば、振り子の微分方程式の近似方程式 (B.2) の $\omega = c$ の場合になります。

では、機関車の数理モデルについて説明しましょう。

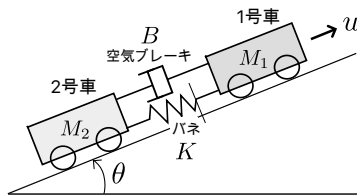


図 2 2 両の機関車

機関車モデルの原理

図 2 に示す『1 号車』と『2 号車』を連結した 2 両の機関車について考えます。

- 1 号車の質量を M_1 とし、2 号車の質量を M_2 とします。2 両の機関車は仰角 θ のある勾配の丘を登っています。
- 次に、これらが点質量であると仮定して理想化します。機関車のエンジンは、機関車に一定の前方への推進力 u を及ぼします。
- 1 号車と 2 号車の接続部分は、機関車どうしの車両間の距離が y と粘性摩擦力 $-By'$ のときに復元力 $-F(y)$ とするばねとしてモデル化できます。ここでは、空気抵抗を無視します。
- y_1 と y_2 を、丘の上の固定基準点から測定された機関車 2 両の位置とします。すなわち、 $y = y_1 - y_2$ となります。
- 機関車の連結部分のばねは線形である (すなわちフックの法則をみたと) と仮定すれば、ばね定数 $K (> 0)$ に対して、

$$F(y) = Ky$$

とおくことができます。

よって、ニュートンの第 2 法則から、機関車モデルの微分方程式は、

$$\begin{cases} M_1 y_1'' = -gM_1 \sin \theta - B(y_1' - y_2') - K(y_1 - y_2) + u, \\ M_2 y_2'' = -gM_2 \sin \theta + B(y_1' - y_2') + K(y_1 - y_2) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

となります。ここで g は重力定数です。

i) 機関車が等速で動いている場合 2 両の機関車が等速 v_0 で動く場合,

$$y_1 = v_0 x + a_1, \quad y_2 = v_0 x + a_2$$

を考えます. 実際に, $y'_1 = y'_2 = v_0$ となっていますので, 2 両の機関車の速さは等しいといえます.

このとき, 式 (B.4) は

$$\begin{cases} 0 = -gM_1 \sin \theta - K(a_1 - a_2) - B \cdot 0 + u, \\ 0 = -gM_2 \sin \theta + K(a_1 - a_2) + B \cdot 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

となります. ここで, 式 (B.5) の 2 番目の方程式から

$$K(a_1 - a_2) = gM_2 \sin \theta \quad (\text{B.6})$$

の関係が成り立ちますので, この式を式 (B.5) の 1 番目の式に代入して,

$$u = (M_1 + M_2)g \sin \theta \quad (\text{B.7})$$

を得ます. これは, 等速 v_0 でエンジンが力 u を発揮することを意味します. 重力による機関車の後ろ向きの加速度がバランスをとり, 数値 $a_1 - a_2$ は式 (B.6) から計算できます.

ii) 機関車が等速に近い速さで動いている場合 次に, a_1, a_2 および u は, 式 (B.6) と式 (B.7) をみたす値であると仮定し, 2 両の機関車の速度が v_0 にほぼ等しくなるように動く場合,

$$w_1 = y_1 - v_0 x - a_1, \quad w_2 = y_2 - v_0 x - a_2$$

を考えます.

今回は, 1 号車と 2 号車の等速運動からの誤差 (逸脱) を w_1, w_2 として表しています. i) の場合は 2 両の機関車がぴったりと等速 v_0 で動いている場合でしたので, 誤差はなく $w_1 = w_2 = 0$ として理解できます. さて, この場合, $w = w_1 - w_2$ とおくと,

$$w = (y_1 - v_0 x - a_1) - (y_2 - v_0 x - a_2) = y_1 - y_2 - (a_1 - a_2) \quad (\text{B.8})$$

が成立します. 式 (B.4) の第 1 式と式 (B.6), (B.7), (B.8) から,

$$\begin{aligned} M_1 y''_1 &= -gM_1 \sin \theta - B(y'_1 - y'_2) - K(y_1 - y_2) + (M_1 + M_2)g \sin \theta \\ &= -gM_1 \sin \theta - Bw' - K\{w + (a_1 - a_2)\} + (M_1 + M_2)g \sin \theta \\ &= -gM_1 \sin \theta - Bw' - K\left(w + \frac{gM_2 \sin \theta}{K}\right) + (M_1 + M_2)g \sin \theta \\ &= -Bw' - Kw \end{aligned}$$

を得ます。同様に,

$$\begin{aligned} M_2 y_2'' &= -gM_2 \sin \theta + Bw' + K\{w + (a_1 - a_2)\} \\ &= -gM_2 \sin \theta + Bw' + K\left(w + \frac{gM_2 \sin \theta}{K}\right) \\ &= Bw' + Kw \end{aligned}$$

となります。上記の 2 つの式から,

$$\begin{aligned} w'' &= y_1'' - y_2'' = -\frac{B}{M_1}w' - \frac{K}{M_1}w - \left(\frac{B}{M_2}w' + \frac{K}{M_2}w\right) \\ &= -\left(\frac{B}{M_1} + \frac{B}{M_2}\right)w' - \left(\frac{K}{M_1} + \frac{K}{M_2}\right)w \end{aligned}$$

が成り立ちますので, 結局, w は 2 階線形微分方程式

$$w'' + \frac{B}{M}w' + \frac{K}{M}w = 0 \quad (\text{B.9})$$

をみます。ただし, M は関係式

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

によって定義される数です。よって, 方程式 (B.9) は方程式 (B.3) の形をしていることがわかります。方程式 (B.9) の特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{B}{M}\lambda + \frac{K}{M} = 0$$

ですから, 特性方程式の解は

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2M}$$

となります。ただし, $D = B^2 - 4MK$ とおきます。よって, 方程式 (B.9) の一般解は

$$w(x) = \begin{cases} C_1 e^{\frac{-B-\sqrt{D}}{2M}x} + C_2 e^{\frac{-B+\sqrt{D}}{2M}x} & (D > 0), \\ (C_1 + C_2 x) e^{\frac{-B}{2M}x} & (D = 0), \\ C_1 e^{\frac{-B}{2M}x} \cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2M}x\right) + C_2 e^{\frac{-B}{2M}x} \sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2M}x\right) & (D < 0) \end{cases}$$

です。ただし, C_1 と C_2 は任意定数です。特に, $-B + \sqrt{D} < 0$ にだけ注意すると, D がどの場合においても

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w(x) = 0$$

がわかります. したがって, $x \rightarrow \infty$ のとき,

$$y_1(x) - y_2(x) = w(x) + (a_1 - a_2) \rightarrow a_1 - a_2$$

になります.

機関車の運動は断片的な 2 次元平面で構成されていて, 等速 v_0 での機関車全体の運動と, 機関車と機関車の間隔 $a_1 - a_2$ に加えて, この均一的な動きに関する機関車の減衰振動が起こります. 運動の減衰部分は, 上記でみたように x が $+\infty$ になると, 最終的に 0 に減衰します. もちろん, ここで紹介した機関車モデルは少し単純すぎて実用的ではありませんが, さらに高度なモデリングを使用することで, より現実的なモデルを導きだすことが可能です.

C 補足：4章 現象の数理(ニューロンモデル)

●ニューロンモデル

ニューロン (神経細胞) の興奮現象を表すモデルとして、ファン・デル・ポールモデル

$$x'' - c(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (c > 0) \quad (C.1)$$

が有名ですが、ここでは、ファン・デル・ポールモデルを修正したボンヘーファー・ファン・デル・ポールモデル (今後は BVP モデルとよびます)

$$\begin{cases} x' = c \left(y - \frac{x^3}{3} + x + z \right), \\ y' = -\frac{x - a + by}{c} \end{cases} \quad (C.2)$$

を考えます。ここで、変数 x と y はそれぞれ細胞膜の電位と回復変数、定数 z はニューロンに外部から加える刺激電流を意味します。 a , b , c はいずれも定数とします。 $a = b = z = 0$ のときはファン・デル・ポールモデルになります。実際にこの場合、BVP モデル (C.2) は系

$$\begin{cases} x' = c \left(y - \frac{x^3}{3} + x \right), \\ y' = -\frac{x}{c} \end{cases} \quad (C.3)$$

です。このままだとわかりづらいので、第1式を微分して y' に第2式の右辺を代入すると、

$$x'' = c(y' - x^2x' + x') = c\left(-\frac{x}{c} - x^2x' + x'\right) = -x + c(1 - x^2)x'$$

となるので、ファン・デル・ポールモデル (C.1) を得ます。当然、系 (C.3) は式 (C.1) と同値な系なので、系 (C.3) をファン・デル・ポールモデルとよんでも問題ありません。

さて、BVP モデル (C.2) の係数 b , c の条件は次のとおりとします。ただし、 a と z の条件については後ほど追加することとします。

BVP モデルの係数 b , c の条件

$$0 < b < 1, \quad b < c^2, \quad 0 < c \quad (C.4)$$

系 (C.2) からわかるように, $x' = 0$ と $y' = 0$ をみたま式は, それぞれ

$$y = \frac{x^3}{3} - x - z, \quad (\text{C.5})$$

$$y = -\frac{x}{b} + \frac{a}{b} \quad (\text{C.6})$$

となります. 以後, これらを等傾線とよびます.

BVP モデルの等傾線の特徴

- 等傾線 (C.5) について … 刺激がないときは $z = 0$ に対応し, BVP モデルはファン・デル・ポールモデル (C.3) と一致するので, 等傾線は $y = \frac{x^3}{3} - x$ です. すなわち, 極大・極小をもつ N 字型の 3 次曲線になり, 原点での傾きは -1 になります. 刺激があるときは $z < 0$ に対応し, その場合の等傾線は z に依存して平行移動します.
- 等傾線 (C.6) について … 傾き $-\frac{1}{b}$ の直線です.
- 図 3 に示すように, 2 つの等傾線がただ一箇所で交わる条件は, $-\frac{1}{b} < -1$, すなわち $0 < b < 1$ (条件 (C.4) の 1 番目の条件) となります.

では, BVP モデル (C.2) の平衡点の安定性を調べてみましょう. 条件 (C.4) のもと平衡点はただ一つしかないので, その座標を (x_*, y_*) とします. いま,

$$f_1(x, y) = c \left(y - \frac{x^3}{3} + x + z \right),$$

$$f_2(x, y) = -\frac{x - a + by}{c}$$

とすれば, これらは BVP モデル (C.2) の右辺に対応します. このとき, ヤコビ行列は

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} c(-x^2 + 1) & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

となります. ここで, BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) をこのヤコビ行列に代入すると, 平衡点 (x_*, y_*) における線形近似系の係数行列

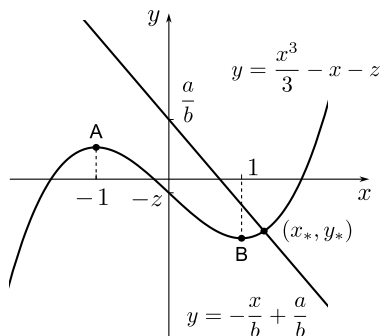


図 3 系 (C.2) の等傾線

$$D\mathbf{f}(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} c(-x_*^2 + 1) & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(x_*,y_*)} = \begin{pmatrix} c(1-x_*^2) & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

を得ます。このとき、固有方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= |\lambda E - D\mathbf{f}(x_*, y_*)| \\ &= \left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c(1-x_*^2) & c \\ -\frac{1}{c} & -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} \lambda - c(1-x_*^2) & -c \\ \frac{1}{c} & \lambda + \frac{b}{c} \end{array} \right| \\ &= \{\lambda - c(1-x_*^2)\} \left(\lambda + \frac{b}{c} \right) + 1 \\ &= \lambda^2 + \left\{ \frac{b}{c} - c(1-x_*^2) \right\} \lambda + 1 - b(1-x_*^2) \end{aligned}$$

となります。よって、固有値

$$\lambda = \frac{1}{2} \left[-\left\{ \frac{b}{c} - c(1-x_*^2) \right\} \pm \sqrt{\left\{ \frac{b}{c} - c(1-x_*^2) \right\}^2 - 4\{1 - b(1-x_*^2)\}} \right] \quad (\text{C.7})$$

を得ます。この固有値 λ には b, c, x_* が入っていますので、平衡点 (x_*, y_*) が漸近安定であるための条件についていねいに調べていきましょう。

平衡点 (x_*, y_*) が漸近安定であるためには、すべての固有値の実部が負でなければなりません。よって、式 (C.7) より

$$\frac{b}{c} - c(1-x_*^2) > 0, \quad \text{かつ} \quad 1 - b(1-x_*^2) > 0$$

であること、すなわち (条件 (C.4) の 3 番目の条件に注意すると)、条件

$$1 - x_*^2 < \frac{b}{c^2}, \quad \text{かつ} \quad 1 - x_*^2 < \frac{1}{b} \quad (\text{C.8})$$

が成り立てば、BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) は漸近安定です。じつは、この 2 番目の不等式は、条件 (C.4) の 1 番目の条件から常に成り立ちます。実際、 $x_*^2 \geq 0$ なので $1 - x_*^2 \leq 1$ となり、加えて条件 (C.4) の 1 番目の条件から $1 < \frac{1}{b}$ となるので、

$$1 - x_*^2 \leq 1 < \frac{1}{b}$$

を得ます。したがって、結局のところ、平衡点 (x_*, y_*) の漸近安定と不安定を

分けるのは式 (C.8) の 1 番目の不等式が成り立つか、もしくは $1 - x_*^2 > \frac{b}{c^2}$ が成り立つかになります。ここで、1 番目の不等式を変形すると、

$$1 - \frac{b}{c^2} < x_*^2$$

です。また、条件 (C.4) の 2 番目の条件から

$$0 < 1 - \frac{b}{c^2} < x_*^2$$

となります。これは x_* の 2 次不等式と考えることができますので、以下が成り立ちます。

BVP モデルの平衡点 (x_*, y_*) の安定性

条件 (C.4) を仮定する。このとき、

- 平衡点 (x_*, y_*) が

$$x_* < -\sqrt{1 - \frac{b}{c^2}}, \quad \text{または} \quad \sqrt{1 - \frac{b}{c^2}} < x_*$$

の領域にあるならば、BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) は漸近安定。

- 平衡点 (x_*, y_*) が

$$-\sqrt{1 - \frac{b}{c^2}} < x_* < \sqrt{1 - \frac{b}{c^2}}$$

の領域にあるならば、BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) は不安定。

上記では、 a や z に関する条件がないようにみえますが、じつは、平衡点 (x_*, y_*) の位置を決定するときに、 a や z によって x_* の大きさが変化しますから、 a や z の条件も含まれています。

もし c が十分大きいとすれば、より単純な安定性の判定条件が得られます。

c が十分大きいときの平衡点 (x_*, y_*) の安定性

条件 (C.4) を仮定し、 c が十分大きいとする。このとき、

- 平衡点 (x_*, y_*) が $x_* < -1$ または $1 < x_*$ の領域にあるならば、BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) は漸近安定。
- 平衡点 (x_*, y_*) が $-1 < x_* < 1$ の領域にあるならば、BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) は不安定。

漸近安定であるための条件は、上記の“BVP モデルの平衡点 (x_*, y_*) の安定性”から明らかに成り立ちます．一方、不安定であるための条件には、 c が十分大きいとする仮定が必要です．例えば、 $x_* = 0.99$ のとき、 $0.99 < \sqrt{1 - \frac{b}{c^2}}$ をみたすくらい c を十分大きくすれば、“BVP モデルの平衡点 (x_*, y_*) の安定性”から、平衡点 $(0.99, y_*)$ が不安定といえます．このように c が十分大きいときは、刺激 z (< 0) を加えて、図 3 の等傾線 (C.5) を上に移動し、平衡点 (x_*, y_*) (等傾線 (C.5) と等傾線 (C.6) の交点) が等傾線 (C.5) の極大点 A と極小点 B の間にくれば、平衡点 (x_*, y_*) は不安定になります．しかし、極大点 A の左側または極小点 B の右側にあれば、平衡点は漸近安定です．

さて、定数 a, z に対する条件を付けて考えましょう．今後は、条件 (C.4) に加え、以下を仮定します．ただし、 c は十分大きい必要はありません．

BVP モデルの追加の条件

$$1 - \frac{2b}{3} < a < 1, \quad z = 0 \quad (\text{C.9})$$

$z = 0$ のとき安定な静止状態 (平衡点が漸近安定) を得るためには、等傾線 (C.6) が極小点 B より右側で等傾線 (C.5) と交わること ($x_* > 1$) を示せば十分です．平衡点 (x_*, y_*) は式 (C.5) と式 (C.6) の両方をみたさなければならないので、

$$\begin{cases} y_* = \frac{x_*^3}{3} - x_*, \\ y_* = -\frac{x_*}{b} + \frac{a}{b} \end{cases}$$

となり、これから y_* を消去して、

$$\frac{x_*^3}{3} + \left(\frac{1}{b} - 1\right)x_* = \frac{a}{b}$$

を得ます．ここで条件 (C.9) の 1 番目の条件が成り立つならば、 $x_* > 1$ となることを示しましょう．

いま $w = x_* - 1$ とします． $x_* = w + 1$ ですから、上記の式は

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{3}(w+1)^3 + \left(\frac{1}{b} - 1\right)(w+1) \\ &= \frac{1}{3}(w^3 + 3w^2 + 3w + 1) + \left(\frac{1}{b} - 1\right)w + \frac{1}{b} - 1 \\ &= \frac{1}{3}w^3 + w^2 + \frac{1}{b}w + \frac{1}{b} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となります. w が付いた式を左辺にまとめ, 条件 (C.4) の 1 番目と条件 (C.9) の 1 番目の条件を使うと

$$\left(\frac{1}{3}w^2 + w + \frac{1}{b}\right)w = \frac{a-1}{b} + \frac{2}{3} = \frac{1}{b}\left(a-1 + \frac{2b}{3}\right) > 0$$

を得ます. この左辺の 2 次式の判別式 D は, 条件 (C.4) の 1 番目の条件より

$$D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{b} = 1 - \frac{4}{3b} = \frac{1}{3b}(3b-4) < -\frac{1}{3b} < 0$$

なので,

$$\frac{1}{3}w^2 + w + \frac{1}{b} > 0$$

です. よって, $w > 0$ であること, すなわち, $x_* > 1$ を得ます.

以上より, 次の結果を得ます.

BVP モデルの平衡点 (x_*, y_*) の漸近安定性

条件 (C.4) と条件 (C.9) が成り立つならば, BVP モデル (C.2) の平衡点 (x_*, y_*) は漸近安定.

図 4 は,

$$a = 0.7, \quad b = 0.8, \quad c = 3, \quad z = 0$$

の場合の BVP モデル (C.2) の相平面図を描いたものです. この場合, 条件 (C.4) と条件 (C.9) をみたちます. 平衡点の座標は $(1.20, -0.625)$, 破線は等傾線 (C.5) と等傾線 (C.6) です. 矢印の付いた実線は解軌道で, 代表的な軌道だけが示されています.

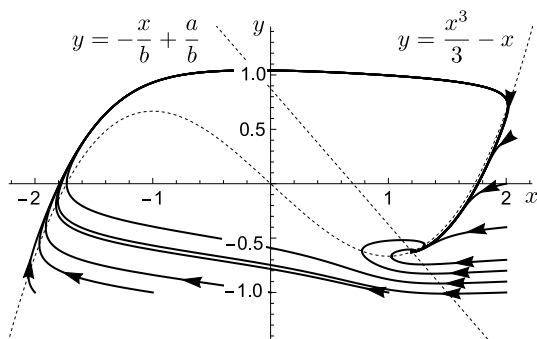


図 4 BVP モデル (C.2) の相平面図

上記の漸近安定性の判定では、条件 (C.9) における $a < 1$ は使用していませんが、実験などから、神経細胞膜の振舞いをうまく再現するように a の上限の範囲が設定されています。 a の上限については、現在でも研究者によって考えが異なり、例えば、 $a < 1$, $a < 2$ とか $a < 2 + \frac{2}{3}b$ などさまざまです³⁾。

3) 詳しくは、林 初男 著「脳とカオス」裳華房 (2001) や R. FitzHugh 著「Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane」Biophysical Journal, 1, pp.445–466 (1961) を参照してください。