環と加群（単純・半単純）

Taiki Shibata

2021 年 12 月 28 日

概要

本文章は（可換とは限らない）環とその（左）加群に関する，単純性および半単純性に関してまとめたものである．参照した文献は「岩波講座 基礎数学 代数学 ii **環と加群 III**」山崎圭次郎（著）[1]．

目次

[1] 本当は，サキの字はタツサキです．

1　一般論

以下で，R と書いたら（必ずしも可換とは限らない）単位元をもつ非ゼロ環をあらわす.

1.1　定義や記号

左 R-加群全体を ${}_R\mathsf{Mod}$ とかき，R 自身を環の積で左 R-加群とみるとき ${}_RR$ とかく．この記号のもとで，左イデアルは ${}_RR$ の部分加群ということに他ならない.

はじめに左加群に関する言葉遣いをまとめる：

定義 1.1.

1. $0 \neq S \in {}_R\mathsf{Mod}$ が**単純** : $\Longleftrightarrow$ S の部分加群は自明なもの（i.e., 0, S）しかない
2. $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ が**半単純** : $\Longleftrightarrow$ M はその単純部分加群たちの直和に分解する
3. $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ が**アルチン** : $\Longleftrightarrow$ $M \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots$ in ${}_R\mathsf{Mod} \Longrightarrow \exists n\ [N_n = N_{n+1} = \cdots]$
4. $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ の部分加群 N がその**直和因子** : $\Longleftrightarrow$ $\exists N' \subseteq M$: 部分加群 s.t. $M = N \oplus N'$
5. $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ が**直可約** : $\Longleftrightarrow$ $\exists N, N' \subsetneq M$: 部分加群 s.t. $M = N \oplus N'$
6. $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ が**直既約** : $\Longleftrightarrow$ $M \neq 0$ かつ M は直可約でない

単純左 R-加群全体を ${}_R\mathsf{Simple}$ とかく.

注意 1.2.

定義から「半単純かつ直既約 $\Longleftrightarrow$ 単純」に注意.

任意の左加群ら $M, X \in {}_R\mathsf{Mod}$ に対して，M の部分加群として

$${}_XM := \sum_{h \in {}_R\mathrm{Hom}(X,M)} \mathrm{Im}\, h \qquad (\subseteq M)$$

とおく[2)]．ここで ${}_R\mathrm{Hom}(X, M)$ は，X から M への左 R-加群射全体．特に ${}_R\mathrm{End}(M) := {}_R\mathrm{Hom}(M, M)$ とおく.

定義 1.3.

以下で $M, X \in {}_R\mathsf{Mod}$ とする.

1. X が M の**生成加群** : $\Longleftrightarrow$ $M = {}_XM$
2. M が X**-等型** : $\Longleftrightarrow$ $X \cong \exists M_\lambda \subseteq M$ $(\lambda \in \Lambda)$: 部分加群 s.t. $M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$
3. 部分加群 $Q \subseteq M$ が**等型半単純成分** : $\Longleftrightarrow$ $\exists S \in {}_R\mathsf{Simple}$ s.t. $Q = {}_SM$

これらの言葉の意味は § 2.2 で明らかになる.

[2)] ちなみにこの記号で ${}_RR$ は，R とモノとして一致するから，以前の記号と整合性がある.

次に環自身に関する言葉遣いをまとめる：

定義 1.4.

1. R の左イデアル $\mathfrak{m} \neq R$ が**極大** $:\Longleftrightarrow$ $\forall \mathfrak{a} \subset R$: 左イデアル $[\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{a} \Longrightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{a}]$
2. 左イデアルが**極小** $:\Longleftrightarrow$ ${}_R R$ の部分加群とみて単純
3. R が**単純** $:\Longleftrightarrow$ R は非自明な両側イデアルを持たない
4. R が**半単純** $:\Longleftrightarrow$ ${}_R R$ が半単純
5. R が**アルチン** $:\Longleftrightarrow$ ${}_R R$ がアルチン

環 R の極大左イデアル全体を ${}_R\mathsf{Max}$ とかく．

環の単純性は ${}_R R$ の単純性をもって定義するわけではないことに注意[3]．

極大左イデアルは必ず一つは存在する（$\because$ Zorn's lemma）ので ${}_R\mathsf{Max} \neq \emptyset$．加群の対応定理を R の左イデアルに適応することで，$\mathfrak{m} \in {}_R\mathsf{Max}$ に対して $R/\mathfrak{m}$ は単純左 R-加群とわかる．特に ${}_R\mathsf{Simple} \neq \emptyset$.

注意 1.5.

これと対照的に，極小左イデアルはいつでも存在するとは限らない．R がアルチンであれば，その存在は言える．

1.2　極大左イデアルと単純左加群

再び対応定理より，次を得る：

$$\forall \mathfrak{m} \subseteq R: \text{ 左イデアル} \qquad [\ \mathfrak{m} \in {}_R\mathsf{Max} \quad \Longleftrightarrow \quad R/\mathfrak{m} \in {}_R\mathsf{Simple}\ ]$$

上記のより詳しい対応をいうために準備する．

まず $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ とその元 $x \in M$ に対して，その **annihilator** を次のように書く．

$$\mathrm{Ann}(x) \ := \ \{a \in R \mid ax = 0\}$$

左 R-加群としての同型を $\cong$ でかき，$S \in {}_R\mathsf{Simple}$ の同値類を $[S]$ などと書く．

補題 1.6.

$S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して $0 \neq x \in S$ をとるとき，$\mathrm{Ann}(x) \in {}_R\mathsf{Max}$ であり，$S \cong R/\mathrm{Ann}(x)$.

$\because$ 左 R-加群射 $R \to S; a \mapsto ax$ に関して．その像を考えると，S の単純性から 0 もしくは S のいずれか．もし 0 であれば $\mathrm{Ann}(x) = R$ となるが，取り方から $0 \neq x = 1x$ であるので $1 \notin \mathrm{Ann}(x)$ となり矛盾．したがって像は S，つまり全射．核はもちろん $\mathrm{Ann}(x)$ なので，$R/\mathrm{Ann}(x) \cong S$. $\square$

[3] 左・両側の区別はそのつどちゃんと書くことにする．

これは x の取り方に依存しているので，工夫して全体を考える．各 $S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して

$$\mathcal{L}(S) \ := \ \{\mathrm{Ann}(x) \mid 0 \neq x \in S\}$$

とおく．$\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in {}_R\mathsf{Max}$ に対して，次の関係を考える：

$$\mathfrak{m} \sim \mathfrak{m}' \quad :\Longleftrightarrow \quad \exists S \in {}_R\mathsf{Simple} \ \text{ s.t. } \ \mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathcal{L}(S).$$

これは ${}_R\mathsf{Max}$ 上の同値関係．このとき $\mathfrak{m} \in {}_R\mathsf{Max}$ の同値類も同じ記号で $[\mathfrak{m}]$ とかく．

($\because$ 反射律：$S := R/\mathfrak{m}$ とおくとこれは単純左 R-加群．ここで $\bar{1} = 1 + \mathfrak{m} \in S$ について $\mathcal{L}(S) \ni \mathrm{Ann}(\bar{1}) = \{a \in R \mid \bar{a} = \bar{0}\} = \mathfrak{m}$ より O.K.
対称律：アタリマエに O.K.
推移律：$\mathfrak{m} \sim \mathfrak{m}'$ かつ $\mathfrak{m}' \sim \mathfrak{m}''$ のとき，$\exists S, S' \in {}_R\mathsf{Simple}$ s.t. $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \in \mathcal{L}(S)$, $\mathfrak{m}', \mathfrak{m}'' \in \mathcal{L}(S')$ をみたしている．すると $\mathfrak{m}' \in \mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(S')$ であるから，$\exists x \in S, \exists x' \in S'$ s.t. $\mathrm{Ann}(x) = \mathfrak{m}' = \mathrm{Ann}(x')$ となる（モノとして本当に一致）．よって $S \cong R/\mathrm{Ann}(x) = R/\mathrm{Ann}(x') \cong S'$ とわかるから，$\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(S')$. $\square$)

特に，$\mathfrak{m} \sim \mathfrak{m}' \iff R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{m}'$ である．

命題 1.7.

> ${}_R\mathsf{Max}/\!\sim$ から ${}_R\mathsf{Simple}/\!\cong$ への対応を $[\mathfrak{m}] \longmapsto [R/\mathfrak{m}]$ と定義すると，well-defined で全単射.

$\because$ 逆は $S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して，$0 \neq x \in S$ をとり $[\mathrm{Ann}(x)]$ とすればよい． $\square$

注意 1.8.

> R が単純環でも，単純左 R-加群ら ${}_R\mathsf{Simple}/\!\cong$ は「ただ一つ」とは言い切れない．これは “局所環” という概念があることから明らか．より詳しく，局所環であることと $\#({}_R\mathsf{Simple}/\!\cong) = 1$ であることは同値（むしろ定義）．後の § 3.4 で，R が半単純なときの ${}_R\mathsf{Simple}/\!\cong$ の個数を決定する．

1.3　加群の一般論

定義 1.9.

> $0 \neq M \in {}_R\mathsf{Mod}$ に対して，部分加群の列
>
> $$M \ =: \ M_0 \ \supsetneq \ M_1 \ \supsetneq \ M_2 \ \supsetneq \ \cdots \ \supsetneq \ M_n \ := \ 0$$
>
> が M の**組成列** $:\Longleftrightarrow$ 各 $0 \leqslant i \leqslant n-1$ に対して，商加群 M_i/M_{i+1} は単純.
> このとき $\ell_R(M) := n$ をその**長さ**という．

簡単のため，$M = 0$ の場合は $\ell_R(M) := 0$ としておく．もちろん単純加群は長さ 1 である．左 R-加群 M が 0 もしくは組成列を持つとき $\ell_R(M) < \infty$ とかく．

注意 1.10.

> いわゆる Jordan-Hölder から，この長さ $\ell_R(M)$ は well-defined である．

例 1.11.

以下で，D を斜体（i.e., 可換とは限らない体）とする．

1. D 上の有限次元ベクトル空間 V に対して，$\ell_D(V) = \dim_D(V)$.
2. 上記で $R := {}_D\mathrm{End}(V)$ を自然に R-左加群とみたとき，$\ell_R(R) = \dim_D(V)$.

特に，D 上の n 次の全行列環 $R := \mathrm{Mat}_n(D)$ に対して，$\ell_R(R) = n$.

事実 1.12.

$M \in {}_R\mathsf{Mod}$ とその部分加群 $N \subseteq M$ について，M がアルチン $\iff$ N および M/N がアルチン

この事実の証明は，($\Longrightarrow$) はすぐ分かる．逆の ($\Longleftarrow$) はいわゆる "モジュラー則" を用いる．

命題 1.13.

$M \in {}_R\mathsf{Mod}$ に対して，$\ell_R(M) < \infty \Longrightarrow M$ はアルチン．

$\because$ $M \neq 0$ としてよい．長さ $n = \ell_R(M)$ に関する帰納法による．$n = 1$ のとき，M は単純であるから O.K. 次に n で成立を仮定し $\ell_R(M) = n+1$ のときをいう．この M の組成列を

$$M = M_0 \supsetneq M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_n \supsetneq M_{n+1} = 0$$

とかくとき，$M_1 \supsetneq \cdots \supseteq M_{n+1}$ は長さ n の M_1 の組成列となる．従って，帰納法の仮定より M_1 はアルチン．また M/M_1 は単純なのでアルチン．すると 事実 1.12 から M もアルチン． $\square$

注意 1.14.

実は 事実 1.12 はアルチンをネーターに変えても成立するので，上記 命題 1.13 のネーター版「$\ell_R(M) < \infty \Longrightarrow M$ はネーター」も成立する．

次の事実も認めることにする．

事実 1.15.

$M \in {}_R\mathsf{Mod}$ に関して，次の短完全列を考える：

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0 \qquad \text{in } {}_R\mathsf{Mod}.$$

このとき $\ell_R(M) < \infty \iff \ell_R(N) < \infty$ かつ $\ell_R(L) < \infty$．さらにこのとき，次が成立する．

$$\ell_R(M) \;=\; \ell_R(N) + \ell_R(L).$$

特に，$M_1, \ldots, M_n \in {}_R\mathsf{Mod}$ がすべて長さ有限のとき，

$$\ell_R(M_1 \oplus \cdots \oplus M_n) \;=\; \ell_R(M_1) + \cdots + \ell_R(M_n). \tag{1}$$

1.4　加群の直既約分解

定義 1.16.

$0 \neq M \in {}_R\mathsf{Mod}$ が**直既約分解**をもつ :$\iff$ $\exists N_1, \ldots, N_r \subseteq M$: 直既約な部分加群たち s.t. $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$.

命題 1.17.

$M \in {}_R\mathsf{Mod}$ に対して，M がアルチン $\Longrightarrow$ M は直既約分解を持つ.

$\because$ 対偶をいう.

$(\mathrm{i})_1$ M が直既約分解を持たないとする．特に M 自身は直既約でない（直可約）ので，$\exists N_1, N_1' \subsetneq M$ s.t. $M = N_1 \oplus N_1'$ となっている．$(\mathrm{ii})_1$ もし N_1, N_1' がどちらも直既約分解を持つならば[4)]，M は直既約分解されたことになり矛盾．従って，N_1 もしくは N_1' は直既約分解を持たない．$(\mathrm{iii})_1$ 一般性を失うことなく，N_1 が直既約分解を持たないとしてよい.

$(\mathrm{i})_2$ すると N_1 が直既約でないから，$\exists N_2, N_2' \subsetneq N_1$ s.t. $N_1 = N_2 \oplus N_2'$ とかけてる．$(\mathrm{ii})_2$ もし N_2, N_2' がどちらも直既約分解を持つならば，N_1 は直既約分解されたことになり矛盾．従って，N_2 もしくは N_2' は直既約分解を持たない．$(\mathrm{iii})_2$ 一般性を失うことなく，N_2 が直既約分解を持たないとしてよい.

全く同様にして，$(\mathrm{i})_3$, $(\mathrm{ii})_3$, $(\mathrm{iii})_3$ $\cdots$ と続けていく[5)]ことで部分加群の列

$$M \quad \supsetneq \quad N_1 \quad \supsetneq \quad N_2 \quad \supsetneq \quad \cdots$$

を得る．構成の仕方からこれはどこかで止まることはないので，M はアルチンではない. □

注意 1.18.

この証明中で「相方のほう」をとってくると

$$0 \quad \subsetneq \quad N_1' \quad \subsetneq \quad N_1' \oplus N_2' \quad \subsetneq \quad N_1' \oplus N_2' \oplus N_3' \quad \subsetneq \quad \cdots \quad \subsetneq \quad M$$

という列を得るのでネーターでないことも分かる．従って，「M がネーター $\Longrightarrow$ M は直既約分解を持つ」も正しい.

2　半単純左加群

2.1　半単純左加群の性質

次が半単純左加群の性質を調べるうえでの Key Lemma となる.

4) ここを「直既約ならば」として議論を進めると，以降の記述がとても煩雑になる

5) 「一般性を〜」のあたりが引っかかるが...

補題 2.1.

> $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ について．部分加群 $N \subseteq M$ と，単純部分加群たち $S_\lambda \subseteq M$ $(\lambda \in \Lambda)$ に関して，
>
> $$M \;=\; N + \sum_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \quad\Longrightarrow\quad \exists\Lambda_0 \subseteq \Lambda \;\text{ s.t. }\; M \;=\; N \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} S_\lambda.$$

∵ $\mathcal{A} := \{\Lambda' \subseteq \Lambda :$ 部分集合 $\mid M = N + \sum_{\lambda'\in\Lambda'} S_{\lambda'}$ は直和$\}$ とおくと，$\emptyset \in \mathcal{A}$ より空でない．すぐわかるようにこれは包含 $\subseteq$ に関して帰納的．よって Zorn's lemma から $\exists\Lambda_0 \in \mathcal{A}$.

そこで $M' := N \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} S_\lambda$ $(\subseteq M)$ とおくとき $M' = M$ をいえばよい．極大性から $\forall\lambda \in \Lambda$ に対して，$M' + S_\lambda$ は直和となりえない．したがって $M' \cap S_\lambda \neq 0$．すると S_λ は単純なので $M' \cap S_\lambda = S_\lambda$ とわかり，$M' \supseteq S_\lambda$．任意性からこれは $M' \supseteq M$ を意味する． □

これから特に，単純部分加群の和は，常に直和になることが分かる．

命題 2.2.

> $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ について，以下は同値：
>
> 1. M は半単純（i.e., 適当な単純部分加群たちの和 $\sum$）
> 2. M は適当な単純部分加群たちの直和 $\bigoplus$
> 3. $\forall N \subseteq M$ 部分加群に対して，N は M の直和因子

∵ (1) $\Longrightarrow$ (2): 先の <u>補題 2.1</u> で $N = 0$ とすればよい．(2) $\Longrightarrow$ (3): 先の <u>補題 2.1</u> のママ．(3) $\Longrightarrow$ (1): まず，S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を M の単純部分加群全部とし，$N := \sum_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおく．仮定から $\exists N' \subseteq M$ s.t. $M = N \oplus N'$ となる．これが $N' = 0$ となればよい．

もし $N' \neq 0$ なら，$0 \neq x \in N'$ をとり巡回部分加群 $C := \langle x \rangle \subseteq N'$ を考える．いま $C \supsetneq D$ なる極大部分加群をとるとき，もういちど仮定から $\exists D' \subseteq M$ s.t. $M = D \oplus D'$ がとれる．$C \neq D$ なので $C \cap D' \neq 0$ に注意する．さて，自然な射の合成で $C \cap D' \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C/D$ を考えると，その核は $(C \cap D') \cap D = 0$ $(\because D \cap D' = 0)$ となってる．いま C/D は単純なので，射の像で考えたら $C \cap D'$ もまた M の単純部分加群とわかる．したがって N の置き方から $C \cap D' \subseteq N$ でなくてはならない．他方で，$C \cap D' \subseteq C \subseteq N'$ である．これは $N \cap N' = 0$ に矛盾． □

命題 2.3.

> 半単純左 R-加群に対して，その商加群も部分加群もまた半単純.

∵ 仮定と <u>命題 2.2</u> から，適当な M の単純部加群たち S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ で $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ と書けている．任意の部分加群 $N \subseteq M$ に対して，もちろん $M = N + \sum_\lambda S_\lambda$ であるから，先の <u>補題 2.1</u> より $\exists\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ s.t. $M = N \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} S_\lambda$ と書けている．そこで自然な（後ろの成分への）射影を考えたら $M/N \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} S_\lambda$ を得る．

他方で，このときに $N' := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} S_\lambda$ とおけば，$M = N' + \sum_\lambda S_\lambda$ をみたすので，また先の <u>補題 2.1</u>

より $\exists\Lambda_0' \subseteq \Lambda$ s.t. $M = N' \oplus \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0'} S_\lambda$ と書けている．いま $M = N \oplus N'$ をみたしているので，すると自然な（後ろの成分への）射影を考えたら $N \cong M/N' \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0'} S_\lambda$ となる． □

これから特に，次を得る．

系 2.4.

> 半単純左 R-加群が，単純部分加群たちで $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ と表示されているとする．このとき $N \subseteq M$: 部分加群は，$\exists\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ s.t. $N \cong \bigoplus_{\lambda_0\in\Lambda_0} S_{\lambda_0}$ とかける．特に，$\forall S \subseteq M$: 単純部分加群は，$\exists\lambda' \in \Lambda$ s.t. $S \cong S_{\lambda'}$.

2.2 半単純左加群と等型半単純成分

補題 2.5.

> $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ と $S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して，S が M の生成加群 $\iff$ M は S-等型.

$\because$ ($\Longrightarrow$) 任意の左 R-加群射 $h : S \to M$ は，単純性より単射であるので，像は $\mathrm{Im}\, h \cong S$ と分かる．従って，その和である $M = \sum_h \mathrm{Im}\, h$ は直和となり，S-等型.
($\Longleftarrow$) 一般に ${}_SM \subseteq M$ はよいので逆をいう．仮定から $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ with $M_\lambda \cong S$ と表示できる．他方で $\forall m \in M$ に対して，$\exists\lambda \in \Lambda$ s.t. $m \in M_\lambda$ である．すると $m \in \mathrm{Im}(S \cong M_\lambda \hookrightarrow M) \subseteq {}_SM$ とわかり O.K. □

命題 2.6.

> $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ と $S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して，${}_SM$ は M の S-等型な最大部分加群.

$\because$ 任意の S-等型な部分加群 N は $S \cong N \hookrightarrow M$ であるから，$N \subseteq {}_SM$ である．他方で，補題 2.5 を ${}_SM$ で適用すると，${}_SM$ 自身も S-等型であるから主張が従う． □

この意味で，${}_SM$ を M の S-**等型成分**という．単純なものの和なので

$$ {}_SM = \bigoplus_{N\subseteq M \text{ s.t. } S\cong N} N $$

という形をしており，${}_SM$ の任意の部分加群はみな S-等型である．また等型半単純成分はその定義から，単純の直和ということになり，半単純左加群である．

定理 2.7.

> $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ に対し，相異なる等型半単純成分を M_λ $(\lambda \in \Lambda)$ とかくと，$\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ は直和．さらに M が半単純 $\iff$ $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

$\because$ $M' :=$ (M の単純部分加群全体の和) とおくとき，定義から $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ である．各 $\lambda \in \Lambda$ について，$M_\lambda' := \sum_{\mu\neq\lambda} M_\mu$ とおく．このとき $M_\lambda \cap M_\lambda' = 0$ が示せたら，$\sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ が直和と分かる．もし $M_\lambda \cap M_\lambda' \neq 0$ であれば，その単純部分加群 S がとれる．まず $M_\lambda \supseteq S$ なので，$M_\lambda \cong {}_SM$．他方で $\lambda \neq \exists\mu \in \Lambda$ s.t. $M_\mu \supseteq S$ でもあるから（系 2.4 参照），$M_\mu \cong {}_SM$．これは $\lambda \neq \mu$ に矛盾.

また，定義から M が半単純 $\iff$ $M = M'$ であるので，最後の主張もよい． $\square$

系 2.8.

半単純左加群 M はその単純部分加群の直和で表示されているが，そのうち互いに同型なものすべての和は M のひとつの等型半単純成分である．

命題 2.9.

半単純左加群 $M \in {}_R\mathsf{Mod}$ の等型半単純成分への分解が $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ で与えられているとき，部分加群 $N \subseteq M$ に対して，以下は同値：

1. $\exists \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ s.t. $N = \bigoplus_{\lambda_0\in\Lambda_0} M_{\lambda_0}$.
2. $\forall f \in {}_R\mathrm{End}(M)$ に対して，$f(N) \subseteq N$.

$\because$ (1)$\Longrightarrow$(2): 各 $\lambda_0 \in \Lambda_0$ に対して $\exists S_{\lambda_0} \in {}_R\mathsf{Simple}$ s.t. $M_\lambda = {}_{S_{\lambda_0}}R \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_h \mathrm{Im}\, h$ である．任意の $f \in {}_R\mathrm{End}(M)$ に対して，$f(M_{\lambda_0}) = f({}_{S_{\lambda_0}}R) = \sum_h f(\mathrm{Im}\, h) = \sum_h \mathrm{Im}(f\circ h) \subseteq {}_{S_{\lambda_0}}R$ であるから O.K.

(2)$\Longrightarrow$(1): 標準的な射影を $\mathrm{pr}_\lambda : M \twoheadrightarrow M_\lambda$ とかく．いま $\Lambda_0 := \{\lambda\in\Lambda \mid \mathrm{pr}_\lambda(N) \neq 0\}$ とおくとき，

$$N \quad\subseteq\quad \sum_{\lambda_0\in\Lambda_0} \mathrm{pr}_{\lambda_0}(N) \quad\subseteq\quad \sum_{\lambda_0\in\Lambda_0} M_{\lambda_0}$$

が射影の定義からいえるので，主張をいうには，任意の $\lambda_0 \in \Lambda_0$ に対して $N \supseteq M_{\lambda_0}$ をいえばよい．勝手な M_{λ_0} の単純部分加群 S に対して，もし $\exists f \in {}_R\mathrm{End}(M)$ s.t. $f(N) \supseteq S$ がいえたら，仮定の (2) から $N \supseteq f(N) \supseteq S$ がいえ O.K.

以下で，上記の $f : M \to M$ を構成する．とり方から $\mathrm{pr}_{\lambda_0}(N) \neq 0$ なので，その単純部分加群 T をとることができる．いま M は半単純だったので，命題 2.2 T は M の直和因子．従って，その直和分解に応じた射影 $\exists p : M \twoheadrightarrow T$ がとれる．他方で，$T \subseteq \mathrm{pr}_{\lambda_0}(N) \subseteq M_{\lambda_0}$ とみたら，S, T は同型であると分かり，同型射 $\varphi : T \to S$ を得る．このとき $f := \varphi\circ p : M \to S \subseteq M$ を考えれば，$0 \neq f(N) \subseteq S$ で $f(N) = S$．これに適用すればよい． $\square$

2.3 半単純左加群と有限性

命題 2.10.

半単純加群 $0 \neq M \in {}_R\mathsf{Mod}$ に対して，以下は同値：

1. $\ell_R(M) < \infty$
2. M はアルチン
3. M は直既約分解を持つ

$\because$ (1) $\Longrightarrow$ (2): 命題 1.13 で一般に済．(2) $\Longrightarrow$ (3): 命題 1.17 で一般に済．(3) $\Longrightarrow$ (1): 仮定より $\exists N_1, \dots, N_r$ 直既約な部分加群たち s.t. $M = N_1 \oplus \cdots \oplus N_r$ とかけている．いま M は半単純なので，

命題 2.3 より部分加群たち N_i もみな半単純．特にいま N_i たちは直既約なので，結局 N_i は単純と分かる．すると，各 $k=0,\dots,r-1$ に対して

$$M_k \;:=\; N_1 \oplus \cdots \oplus N_{r-k}, \qquad M_r \;:=\; 0$$

とおけば，これが M の組成列を与える．特に $\ell_R(M)=r$ である． □

注意 2.11.

このとき上記の証明からも分かるように，半単純加群 M がアルチンであるとき，M の「長さ」は，M の直既約分解に出てくる「直既約因子の個数」と一致する．またこのとき，直既約因子は単純であることに注意する．

注意 2.12.

命題 2.10 の同値条件として「M はネーター」も O.K.

(∵ まず 注意 1.14 より，$\ell_R(M)<\infty$ ならば M はネーターはよい．逆に M がネーターなら 注意 1.18 より，M は直既約分解をもつ． □)

命題 2.10 の同値条件として，さらに「M は有限生成」も O.K.

(∵ ネーターならば有限生成は一般に良いので，逆をいう．M が有限生成のとき，定義から適当な自然数 m および，左 R-加群の全射 $f: R^m \to M$ が存在する．つまり $R^m/\operatorname{Ker} f \cong M$ の形．いま仮定の半単純性より $M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ と単純の和で表示しておけば，各 R^m の標準的な $e_i := (0,\dots,0,\underset{\hat{i}}{1},0,\dots,0)$ の行先を追うことにより，Λ は有限集合でなくてはならないことが従う．これで M の直既約分解を得たことになる． □)

2.4 半単純左加群と分裂完全列

次はいわゆる splitting Lemma と呼ばれる．

補題 2.13.

短完全列 $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} L \to 0$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ に関して，次は同値：

1. $M \cong N \oplus L$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ であり，この同型を介した標準的な包含・射影はそれぞれ i, p に一致
2. これは右分裂する（i.e., $\exists s : L \to M$ s.t. $p \circ s = \mathrm{id}_L$）
3. これは左分裂する（i.e., $\exists r : M \to N$ s.t. $r \circ i = \mathrm{id}_N$）

∵ (1) $\Longrightarrow$ (2): 仮定の同型を $\varphi : M \xrightarrow{\cong} N \oplus L$ とかく．自然な包含 $L \hookrightarrow N \oplus L$ を用いて $s : L \hookrightarrow N \oplus L \xrightarrow{\varphi^{-1}} M$ とおくとき，これが条件を満たすことをいう．定義から $\forall m \in M$ に対して $\exists! n \in N$, $\exists! \ell \in L$ s.t. $\varphi(m) = n + \ell$ とかけている．このとき仮定より $i(m) = n$ かつ $p(m) = \ell$ をみたしてる．さて $\forall \ell \in L$ に対して，$m := \varphi^{-1}(\ell)$ とおくと，$\varphi(m) = \ell$ であるから $p(m) = \ell$ をみたす．よって $p \circ s(\ell) = p \circ \varphi^{-1}(\ell) = p(m) = \ell$ と分かるので，$p \circ s = \mathrm{id}_L$.

(1) $\Longrightarrow$ (3): 上と同じ記号を用いる．自然な射影 $N \oplus L \twoheadrightarrow N$ を用いて $r : M \xrightarrow{\varphi} N \oplus L \twoheadrightarrow N$ とおくとき，これが条件を満たすことをいう．任意の $n \in N$ に対して，仮定から $\varphi \circ i(n) = n + 0 \in N \oplus L$ をみたしてる．従って，自然な射影により $r(i(n)) = n$ とわかり $r \circ i = \mathrm{id}_N$.

(2) $\Longrightarrow$ (1): 仮定の splitting を $s : L \to M$ とかくと，$M \supseteq i(N) + s(L)$ はよい．任意の $m \in M$ に対し $m = (m - s \circ p(m)) + s \circ p(m) \in i(N) + s(L)$ はすぐ分かる（$\because$ $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$）ので，$M = i(N) + s(L)$．任意の $i(n) = s(\ell) \in i(N) \cap s(L)$ について，p を施せば $0 = p(i(n)) = p(s(\ell)) = \ell$ だから，$i(n) = s(\ell) = 0$．従って $M = i(N) \oplus s(L)$．いま i, s は単射だから $N \cong i(N), L \cong s(L)$ なので，$M \cong N \oplus L$ であり，

$$\begin{array}{ccccccccccccc} N & \hookrightarrow & N \oplus L & \cong & i(N) \oplus s(L) & = & M = & i(N) \oplus s(L) & \twoheadrightarrow & s(L) & \cong & L \\ n & \mapsto & n + 0 & \mapsto & i(n) + 0 & & m = & m - s(p(m)) + s(p(m)) & \mapsto & s(p(m)) & \mapsto & p(m) \end{array}$$

だから条件も満たす.

(3) $\Longrightarrow$ (1): 仮定の retract を $r : M \to N$ とかくと，$M \supseteq \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$ はよい．任意の $m \in M$ に対し $m = i \circ r(m) + (m - i \circ r(m)) \in \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$ はすぐ分かる（$\because$ $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$）ので，$M = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$．任意の $m \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} r$ に対して，まず $m \in \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i$ から $\exists n \in N$ s.t. $m = i(n)$．次に $m \in \operatorname{Ker} r$ から $0 = r(m) = r(i(n)) = n$ であるから，$M = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} r$．いま合成 $f : \operatorname{Ker} r \hookrightarrow M \overset{p}{\twoheadrightarrow} L$ は，$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} r = 0$ であり単射．また任意の $\ell \in L$ に対して，p の全射性から $\exists z \in M$ s.t. $p(z) = \ell$．これを $z = x + y$ $(x \in \operatorname{Ker} p, y \in \operatorname{Ker} r)$ とかくとき，$p(z) = p(y)$ なので，$\operatorname{Im} f = L$ となり全射．したがって，$f : \operatorname{Ker} r \overset{\cong}{\to} L$ を得る．もちろん $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} i = i(N) \cong N$ だから，合わせて $M \cong N \oplus L$ を得る．これで，

$$\begin{array}{ccccccccc} N & \hookrightarrow & i(N) \oplus \operatorname{Ker} r & = & M = & i(N) \oplus \operatorname{Ker} r & \twoheadrightarrow & \operatorname{Ker} r & \underset{\cong}{\overset{f}{\to}} & L \\ n & \mapsto & i(n) + 0 & & m = & i(r(m)) + (m - i(r(m))) & \mapsto & m - i(r(m)) & \mapsto & p(m) \end{array}$$

となるので条件も満たす. □

注意 2.14.

この主張は一般のアーベル圏で成り立つ（モチロン $_R$Mod はアーベル圏）．但し，元をとって行う上の証明はその場合不適．射のみで行う一般の証明は「Math Stack Exchange」の「“Abstract nonsense” proof of the splitting lemma」という質問の答えにある．https://math.stackexchange.com/questions/748699/abstract-nonsense-proof-of-the-splitting-lemma/753182#753182

命題 2.15.

以下は同値：

1. $_R$Mod は半単純（$:\Longleftrightarrow$ 任意の左 R-加群が半単純）
2. 任意の左 R-加群は入射的（$\Longleftrightarrow$ 任意の短完全列 in $_R$Mod は左分裂）
3. 任意の左 R-加群は射影的（$\Longleftrightarrow$ 任意の短完全列 in $_R$Mod は右分裂）

4. 任意の短完全列 in ${}_R$Mod は分裂（i.e., 左右に分裂）

∵ 先の 補題 2.13 から，(1) と (2) が同値であることをいえば十分．(1) $\Longrightarrow$ (2): 任意の短完全列 $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} L \to 0$ に対して，命題 2.2 を適用して $M = i(N) \oplus {}^{\exists}N'$ なる部分加群が取れる．そこで自然な射影で $r : M = i(N) \oplus N' \twoheadrightarrow i(N) \cong N$ について考えると，$r \circ i = \mathrm{id}_N$ となり O.K.
(2) $\Longrightarrow$ (1): 任意の $M \in {}_R$Mod とその任意の部分加群 N について，短完全列 $0 \to N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/N \to 0$ が考えれる．これは仮定から左分裂するので 補題 2.13 (1) から $M \cong N \oplus M/N$ in ${}_R$Mod となる．従って N は M の直和因子と分かるので, 命題 2.2 により M が半単純であることが従う． □

3 半単純環

3.1 半単純環の性質

環が与えられたとき，その剰余環（両側イデアルでの商）や直積環を自然に左加群とみる．このみかたと 命題 2.3 により次を得る：

命題 3.1.

半単純環の剰余環や，有限個の半単純環の直積環もまた半単純環.

但し，部分環は部分加群とはズレがあるので，注意.

補題 3.2.

R は半単純環 $\iff$ ${}_R$Mod は半単純

∵ ($\Longrightarrow$) 任意の加群 $M \in {}_R$Mod に対して，M の部分加群 ${}_RM$ があったのだった．このとき，${}_RM = M$ である.

$$\begin{pmatrix}\text{実際，任意の } m \in M \text{ に対して，} h : R \to M;\ a \mapsto am \text{ を考えると左 } R\text{-加群射である.} \\ \text{もちろん } m = h(1) \in \operatorname{Im} h \text{ だから，} m \in {}_RM \text{ とわかる.}\end{pmatrix}$$

いま $\forall h \in {}_R\operatorname{Hom}(R, M)$ に対して，$R/\operatorname{Ker} h \cong \operatorname{Im} h$ であり，仮定から R は半単純なので 命題 2.3 より，商加群と同型な $\operatorname{Im} h$ も半単純．すると，その和である ${}_RM$ もまた半単純なので M もそう.
($\Longleftarrow$) $M = {}_RR$ を考えればよい. □

このことと 命題 2.15 を合わせれば次を得る：

命題 3.3.

半単純環 R に対して，任意の左 R-加群は入射的かつ射影的で，短完全列は必ず分裂する.

自明に ${}_RR$ は有限生成なので，命題 2.10 および 注意 2.12 から，次が従う：

命題 3.4.

半単純環は長さ有限であり，直既約分解を持つ．さらにアルチンかつネーターである.

特に，半単純環はそのアルチン性から，極小左イデアルをもつことに注意する．

3.2 半単純環の極小左イデアル

簡単のために以降，半単純環 R に対して $\ell(R) := \ell_R({}_RR)$ とかく．

補題 3.5.

> R が半単純環とすると，$\forall S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して $\exists\mathfrak{a} \subseteq R$: 極小左イデアル s.t. $S \cong \mathfrak{a}$ in ${}_R\mathsf{Mod}$.

$\because$ まず 命題 1.7 より，$\exists\mathfrak{m} \in {}_R\mathsf{Max}$ s.t. $S \cong R/\mathfrak{m}$ である．仮定から R は半単純なので，$\mathfrak{m} \subseteq R$ に対して 命題 2.2 (3) から，$\exists\mathfrak{a} \subseteq R$: 左イデアル s.t. $R = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$ のかたち．従って $\mathfrak{a} \cong R/\mathfrak{m} \cong S$ とわかる．あとは S 単純性より，$\mathfrak{a}$ の極小性が従う． □

命題 3.6.

> R が半単純環とすると，$\ell(R) < \infty$ であり，$\exists\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\ell(R)} \subseteq R$: 極小左イデアルたち s.t.
>
> $$R \;=\; \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_{\ell(R)}. \tag{2}$$
>
> が ${}_R\mathsf{Mod}$ で成立する．

$\because$ 命題 3.4 から，$\ell(R) < \infty$ かつ $\exists\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$: 直既約な左イデアルたち s.t. $R = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_r$ と書けている．いま 注意 2.11 から，各 $\mathfrak{a}_i$ は ${}_RR$ の単純部分加群（i.e., 極小左イデアル）であり，$r = \ell_R({}_RR)$ とわかる． □

系 3.7.

> 半単純環 R に対して，$\#({}_R\mathsf{Simple}/\cong) \;\leqslant\; \ell(R)$.

$\because$ 任意の単純左加群 $M \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して，補題 3.5 から $\exists\mathfrak{a} \subseteq R$: 極小左イデアル s.t. $M \cong \mathfrak{a}$ である．他方で R の分解を 命題 3.6 の様にかいておけば，系 2.4 によって，$1 \leqslant \exists i \leqslant \ell(R)$ s.t. $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}_i$ となっている．よって同型を除くと，単純左加群どもは高々 $\ell(R)$ 個． □

極小左イデアルたち $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_{\ell(R)}$ には，互いに R-同型なものが含まれているので，この段階ではまだ個数は不明（次の例を参照）．後の 系 3.13 で個数を完全に決定する．

例 3.8.

> k を（非可換でもよい）体とする．n 次の全行列環 $R = \mathrm{Mat}_n(k)$ に関して．この部分集合として $\mathfrak{a}_i :=$（第 i 列に成分があり他がゼロの行列全体）とすると，計算により $\mathfrak{a}_i$ は極小左イデアルであり，$\mathrm{Mat}_n(k) = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$ をみたしてる．他方で，事実として $\ell(\mathrm{Mat}_n(k)) = n$ を知っている．例えば $n = 2$ の場合（一般も同様），次は $\mathrm{Mat}_2(k)$ の同型：
>
> $$\mathfrak{a}_1 = \{\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix}\} \quad \xrightarrow{\cong} \quad \mathfrak{a}_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\}; \qquad \begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} 0 & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix}$$

これから $\#({}_{\mathrm{Mat}_2(k)}\mathsf{Simple}/\cong) = 1 \leqslant 2 = \ell(\mathrm{Mat}_2(k))$.

3.3 半単純環の分解

半単純環 R に対して，${}_RR$ と見たときの相異なる等型半単純成分は，系 3.7 から有限個と分かる．それらを $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{c(R)}$ とかくことにする[6)]．もちろん $c(R) \leqslant \ell(R)$．さらに 定理 2.7 により，

$$R = \mathfrak{s}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{s}_{c(R)} \qquad \text{in } {}_R\mathsf{Mod} \tag{3}$$

と直和分解できる．

補題 3.9.

R の極小両側イデアルはすべて $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{c(R)}$ で尽くされる．また任意の R の非ゼロ両側イデアルは，これら $\mathfrak{s}_i$ のいくつかの和でかける．

$\because$ まず各 $\mathfrak{s}_i$ が両側イデアルこと，つまり右イデアルであることをいう．定義から $\exists S \in {}_R\mathsf{Simple}$ s.t. $\mathfrak{s}_i = {}_SR$ とかけてるので，任意の $a \in R$ に対して $({}_SR)a \subseteq {}_SR$ をいう．まず写像 $f_a : {}_RR \to {}_RR$; $b \mapsto ba$ は左 R-加群射であることに注意する．すると任意の $h \in {}_R\mathrm{Hom}(S, R)$ に対して，$f_a(\mathrm{Im}\, h) = \mathrm{Im}(f_a \circ h)$ であることから，$f_a({}_SR) \subseteq {}_SR$ とわかり O.K. これが極小であること，及び極小両側イデアルを尽くすことは，二つ目の主張から従うので，それを先に示す．

任意の両側イデアル $0 \neq I \subseteq R$ ついて．勝手な $f \in {}_R\mathrm{End}(R)$ をとると，これは左 R-加群射なので $f(I) = If(1)$ をみたしてる．他方で I は右イデアルだから $If(1) \subseteq I$ である．従って $f(I) \subseteq I$ とわかるから命題 2.9 より，$\exists J \subseteq \{1, \ldots, c(R)\}$: 部分集合 s.t. $I = \bigoplus_{j \in J} \mathfrak{s}_j$. $\square$

今までの記号のもと，各 $1 \leqslant i \leqslant c(R)$ に対して

$$\mathfrak{m}_i := \bigoplus_{j \neq i} \mathfrak{s}_j \qquad \subseteq R$$

とおく．これは 補題 3.9 より，R の極大両側イデアル全体であるとわかる．

各 $1 \leqslant i \leqslant c(R)$ に対して，左加群として $\mathfrak{s}_i \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{m}_i$ があるが，これは明らかに同型．この同型を通して，剰余環 $R/\mathfrak{m}_i$ の積構造を $\mathfrak{s}_i$ に入れる．

命題 3.10.

各 $\mathfrak{s}_i$ は単純かつ半単純環であり，直和分解 (3) の誘導する次の射は環同型射：

$$\mathfrak{s}_1 \times \cdots \times \mathfrak{s}_{c(R)} \xrightarrow{\cong} R; \qquad (x_1, \ldots, x_{c(R)}) \longmapsto x_1 + \cdots + x_{c(R)}. \tag{4}$$

この意味で，$\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_{c(R)}$ を R の**単純成分**という．

$\because$ まず R は半単純なので，その商環 $R/\mathfrak{m}_i \cong \mathfrak{s}_i$ も半単純環であり，また $\mathfrak{m}_i$ の極大性から $\mathfrak{s}_i$ は単純環．次に環同型射 $\prod_i \mathfrak{s}_i \xrightarrow{\cong} \prod_i R/\mathfrak{m}_i$; $(x_i)_i \mapsto (x_i + \mathfrak{m}_i)_i$ と，中国剰余定理から得られる環同型射

6) 要するに，R-同型な $\mathfrak{a}_i$ どもをまとめたものが $\mathfrak{s}_j$.

$R \overset{\cong}{\rightrightarrows} \prod_i R/\mathfrak{m}_i;\ a \mapsto (a+\mathfrak{m}_i)_i$ の逆写像との合成が，(4) である．実際，(4) の逆射は，以下で与えられる：

$$R \longrightarrow \prod_i R/\mathfrak{m}_i \longrightarrow \prod_i \mathfrak{s}_i; \qquad a \longmapsto (a+\mathfrak{m}_i)_i = (x_i+\mathfrak{m}_i)_i \longmapsto (x_i)_i.$$

ここで，直和分解 (3) に沿って $a = \sum_i x_i$ with $x_i \in \mathfrak{s}_i$ と表示している． □

各 i に対して，環としての単位元を $e_i \in \mathfrak{s}_i$ とかくとき，$1_R = e_1 + \cdots + e_{c(R)}$ であり，R の中で見て e_i は中心的直交冪等元で，$\mathfrak{s}_i = Re_i = e_iR$ をみたす．

注意 3.11.

また中心に関しても $Z(R) \cong Z(\mathfrak{s}_1) \oplus \cdots \oplus Z(\mathfrak{s}_{c(R)})$ であり，各 $Z(\mathfrak{s}_i)$ は $\mathfrak{s}_i$ が単純であることから斜体．従って $Z(R) \cong Z(\mathfrak{s}_1) \times \cdots \times Z(\mathfrak{s}_{c(R)})$ とみて，命題 3.1 から，$Z(R)$ は半単純環．また $Z(\mathfrak{s}_i)$ はその極小両側イデアルであり，$Z(R)$ の単純成分．

3.4 半単純環の単純左加群

引き続き，半単純環 R の単純成分（極小両側イデアル）への分解を $R \cong \mathfrak{s}_1 \times \cdots \times \mathfrak{s}_{c(R)}$ と書くことにする．

補題 3.12.

$\forall S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して，$1 \leqslant \exists! i \leqslant c(R)$ s.t. $\mathfrak{s}_i S \neq 0$ であり，$\mathfrak{s}_i$ は ${}_RR$ の S-等型成分．さらに制限 $\mathfrak{s}_i \hookrightarrow R$ でみて，S は $\mathfrak{s}_i$-単純左加群.

∵ はじめに 補題 3.5 から，極小左イデアル $\mathfrak{a} \subseteq R$ で $S \cong \mathfrak{a}$ なるものが存在する．このとき極小性から $\mathfrak{a}$ を含む ${}_RR$ の等型成分として $\mathfrak{s}_i$ がとれる．特に，$\mathfrak{s}_i = {}_S({}_RR)$: S-等型成分である．いま，R の直積分解（命題 3.10）から，全ての $j \neq i$ に対して，$\mathfrak{s}_j.S \cong \mathfrak{s}_j\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{s}_j\mathfrak{s}_i = 0$ となっている．従って，$0 \neq S = R.S = \sum_j \mathfrak{s}_j.S = \mathfrak{s}_i.S$ である．

任意の $\mathfrak{s}_i$-部分加群 $N \subseteq S$ について．全ての $j \neq i$ に対して，いったん集合として $N \subseteq S$ とみて計算すると，先ほどのことから $\mathfrak{s}_j.N \subseteq \mathfrak{s}_j.S = 0$ である．他方で N は $\mathfrak{s}_i$-加群だから，$\mathfrak{s}_i.N \subseteq N$．合わせて，$R.N = \sum_j \mathfrak{s}_j.N = \mathfrak{s}_i.N \subseteq N$ とわかり N は S の左 R-部分加群なので $N = 0$ or $= S$. □

系 3.13.

$$\#({}_R\mathsf{Simple}/\cong) = c(R)$$

∵ 補題 3.12 から，互いに非同型な R の単純左加群は高々 $c(R)$ とわかる．一方で，定義から $\mathfrak{s}_i, \cdots, \mathfrak{s}_{c(R)}$ は互いに非同型であり，固定された i に対して，$\mathfrak{s}_i$ の直和因子である (2) に出てくる極小左イデアル $\mathfrak{a}_{i_k}$ をひとつ考えると，これが R の単純左加群を与え，等型半単純成分が違うとき i.e., $\mathfrak{s}_i \neq \mathfrak{s}_j$ ならば $\mathfrak{a}_{i_k} \ncong \mathfrak{a}_{j_\ell}$ となっている．従って，$c(R) \leqslant \#({}_R\mathsf{Simple}/\cong)$ とわかり O.K. □

注意 3.14.

可換体 k 上の有限次元（可換とは限らない）代数 R について．これが環として半単純であ

るとき，単純成分の中心 $Z(\mathfrak{s}_i)$ は k の（可換体の）体拡大と思える．注意 3.11 のことから，$\dim_k(Z(R)) = \dim_k(Z(\mathfrak{s}_1)) + \cdots + \dim_k(Z(\mathfrak{s}_{c(R)}))$ であるが，もし k が代数閉体なら $Z(\mathfrak{s}_i) \cong k$ なので，$\dim_k(Z(R)) =$（単純 R-左加群の同型類の個数）とわかる．

例 3.15.

斜体ども $D_1, \ldots, D_r$ と，正整数ども $n_1, \ldots, n_r$ に対して，$R := \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r)$ とおく．このとき $Z(R) \cong Z(D_1) \times \cdots \times Z(D_r)$，$c(R) = r$，$\ell(R) = n_1 + \cdots + n_r$

3.5 半単純環の特徴付け

定理 3.16.

環 R に対して，以下は同値：

1. R は半単純環かつ，$c(R) = 1$（i.e., 単純左加群の同型類の個数はただひとつ）.
2. R は半単純環かつ，単純環.
3. R は半単純環かつ，$Z(R)$ は単純環（i.e., 斜体）.
4. R はアルチン単純環.

$\because$ (1), (2), (3) において，R は半単純環なので，今までのことからこれらの主張は言い換えに過ぎず，同値がすぐ分かる．(2)$\Longrightarrow$(5): 命題 3.4 からアルチンも O.K. (5)$\Longrightarrow$(1): アルチンであるから R は極小左イデアル $\mathfrak{a}$ を持つ．もちろん $\mathfrak{a}$ は ${}_RR$ の単純左加群だから，$\mathfrak{a}$-等型成分は ${}_{\mathfrak{a}}({}_RR) \neq 0$ である．他方で，補題 3.9 の証明にもあるように ${}_{\mathfrak{a}}({}_RR) \subseteq R$ は両側イデアルである．よって R の単純性から $R = {}_{\mathfrak{a}}({}_RR)$，すなわち $\mathfrak{a}$ は ${}_RR$ の生成加群．すると 補題 2.5 から，これは同値に ${}_RR$ は $\mathfrak{a}$-等型とわかり，$c(R) = 1$. □

今までのことと合わせて，以下を得る：

系 3.17.

環 R に対して，以下は同値：

1. R は半単純環.
2. ${}_R\mathsf{Mod}$ は半単純.
3. 任意の左 R-加群は入射的.
4. 任意の左 R-加群は射影的.
5. 任意の短完全列 in ${}_R\mathsf{Mod}$ は分裂.
6. R は有限個のアルチン単純環の直積.
7. アルチン環かつ，有限個の単純環の直積.

ここまでくると，残る研究対象は「アルチン単純環」の構造である．これには，以下に一連で述べる

いわゆる「Artin-Wederburn の定理」が完全な回答を与える．

事実 3.18.

アルチン単純環 R と，$S \in {}_R\mathsf{Simple}$ について．$D := {}_R\mathrm{End}(S)$, $n := \ell(R)$ とおくと，

1. D は斜体.
2. S は D 上有限生成で，$\dim_D(S) = n$.
3. S は R-左加群として忠実かつ再中心化性をもつ i.e., $R \xrightarrow{\cong} {}_R\mathrm{End}(S) \cong \mathrm{Mat}_n(D^\circ)$.

ここで D° は D の反対加群.

事実 3.19.

斜体 D と，有限生成な左 D-加群 S について．$R := {}_D\mathrm{End}(S)$, $n := \dim_D(S)$ とおくと，

1. R はアルチン単純環.
2. $S \in {}_R\mathsf{Simple}$ で，$\ell(R) = n$.
3. S は D-左加群として忠実かつ再中心化性をもつ i.e., $D \xrightarrow{\cong} {}_R\mathrm{End}(S)$.

従って，アルチン単純環は「適当な斜体 D 上の有限次元ベクトル空間 V の自己準同型環 ${}_D\mathrm{End}(V)$」に他ならないことが分かる．このとき D, V に関して，事実 3.19 から，より詳しく次が成り立つ.

系 3.20.

環 R に対して，$\exists D$: 斜体，$\exists V$: D 上の有限次元ベクトル空間 s.t. $R \cong {}_D\mathrm{End}(V)$ であるとき，

1. ${}_R R$ は半単純であり，$\ell(R) = \dim_D(V)$.
2. $\forall S \in {}_R\mathsf{Simple}$ に対して，その中心化環 ${}_R\,\mathrm{End}(S)$ は D に同型.

特に，斜体 D, D' と正整数 n, n' に対して $\mathrm{Mat}_n(D) \cong \mathrm{Mat}_{n'}(D') \iff D \cong D'$ かつ $n = n'$.

以上のことから，半単純環は全行列環でコントロールできることが分かった：

系 3.21.

環 R について，以下は同値：

1. R は半単純環.
2. $\exists D_1, \ldots, D_r$: 斜体，$\exists n_1, \ldots, n_r$: 正整数 s.t. $R \cong \mathrm{Mat}_{n_1}(D_1) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_r}(D_r)$.

このとき，$\#({}_R\mathsf{Simple}/\cong) \;=\; c(R) \;=\; r$.

このことから，可換体 k が代数閉であるとき，k 上の（可換とは限らない）代数 A が環として半単純であれば，それは必ず

$$A \;\cong\; \mathrm{Mat}_{n_1}(k) \times \cdots \times \mathrm{Mat}_{n_r}(k)$$

という形をしている．特に，A が単純 $\iff r = 1$.

3.6 半単純環の判定

ジャコブソン根基を用いた，半単純性の特徴付けもある．一般に環 R に対して

$$\mathrm{Jac}(R) \quad := \bigcap_{\mathfrak{m}\subseteq R:\ \text{極大左イデアル}} \mathfrak{m} \quad = \quad \{x \in R \mid \forall a \in R,\ 1 - ax \in R^{\times}\}$$

を R の**ジャコブソン根基**という．一般論から，R が半単純 $\Longrightarrow \mathrm{Jac}(R) = 0$ である[7)]．この逆にあたる主張が次である：

定理 3.22.

環 R について，以下は同値：

1. R は半単純環.
2. R はアルチンかつ $\mathrm{Jac}(R) = 0$.

特に，R がアルチンのもとで，R は半単純 $\iff \mathrm{Jac}(R) = 0$.

$\because$ (1)$\Longrightarrow$(2): これは 系 3.17 からよい．(2)$\Longrightarrow$(1): 一般にアルチン加群について，その根基で割ったものは半単純と知っているので，今の場合，$R/\mathrm{Jac}(R)$ が半単純とわかり O.K. $\square$

このことから，半単純性のある種の判定条件を得る：

系 3.23.

斜体上の（可換と限らない）有限次元代数 A に対して，A が半単純 $\iff \mathrm{Jac}(A) = 0$.

$\because$ 有限次元なので，A は常にアルチンだから O.K. $\square$

例 3.24.

標数が 2 でない可換体 k 上のクリフォード代数 $C(V)$ に関して．二次形式から誘導される直交分解により $V = \mathrm{rad}(V) \perp W$ とかくとき，$C(V)/\langle \mathrm{rad}(V)\rangle \cong C(W)$ かつ $\mathrm{Jac}(C(V)) = \langle \mathrm{rad}(V)\rangle$ と知っている．よって V が非退化 $\iff C(V)$ は半単純．より詳しく，次のことを知っている：

1. V が非退化かつ $\dim_k V$ が偶数のとき．$C(V)$ は，（k-中心的）単純環.
2. V が非退化かつ $\dim_k V$ が奇数のとき.
   (a) $\delta_V \notin (k^{\times})^2 \Longrightarrow C(V)$ は，（$k(\sqrt{\delta_V})$-中心的）単純環.
   (b) $\delta_V \in (k^{\times})^2 \Longrightarrow C(V)$ は，同型な（k-中心的）単純環ふたつの直積.

従って特に，単純左加群の同型類の個数は，$\dim_k V$ が奇数かつ $\delta_V \in (k^{\times})^2$ の場合は 2 つ，それ以外の場合は 1 つである.

7) 話しとしては，加群 M の根基 $\mathrm{Rad}(M)$ の定義が先にあり，これは加群の話から従う.