# 非可換環上の自由加群で基底の濃度の違う例

任意に（可換）体 $\Bbbk$ をとり固定する．数列の空間 $\Bbbk^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_n \mid a_n \in \Bbbk\}$ を考える．次のような $\Bbbk$-線型同型が考えられる：

$$s : \Bbbk^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\cong} \Bbbk^{\mathbb{N}} \oplus \Bbbk^{\mathbb{N}}; \quad (a_n)_n \longmapsto \big((a_{2n-1})_n, (a_{2n})_n\big).$$

逆写像は

$$s^{-1} : \Bbbk^{\mathbb{N}} \oplus \Bbbk^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\cong} \Bbbk^{\mathbb{N}}; \quad \big((x_n)_n, (y_n)_n\big) \longmapsto ((xy)_n)_n, \quad \text{where } (xy)_n := \begin{cases} x_k & \text{if } n = 2k-1 \\ y_k & \text{if } n = 2k \end{cases}$$

で与えられる．この $s$ に反変関手 $\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(-, \Bbbk^{\mathbb{N}})$ を施すと,

$$\tilde{s} : \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}} \oplus \Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}); \quad f \longmapsto f \circ s$$

なる $\Bbbk$-線型同型を得る．

他方で，一般にベクトル空間たち $X, Y, Z$ に対して，次の $\Bbbk$-線形同型があることに注意する．

$$c : \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(X \oplus Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(X, Z) \oplus \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(Y, Z); \quad f \longmapsto f_1 \oplus f_2,$$

where $f_1(x) := f((x, 0))$ and $f_2(y) := f((0, y))$．逆写像は

$$c^{-1} : \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(X, Z) \oplus \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(X \oplus Y, Z); \quad g \oplus h \longmapsto \big((x, y) \mapsto g(x) + h(y)\big)$$

で与えられる．

すると，$\Bbbk$-線型同型の列

$$\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\tilde{s}^{-1}} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}} \oplus \Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{c} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \oplus \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}})$$

を得る．対応を辿ると $f \mapsto f \circ s^{-1} \mapsto (f \circ s^{-1})_1 \oplus (f \circ s^{-1})_2$ であり

$$(f \circ s^{-1})_1((x_n)_n) = (f \circ s^{-1})\big((x_n)_n, (0)_n\big) = f\big((x0)_n\big) = f\big(x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, x_4, 0, \ldots\big)$$
$$(f \circ s^{-1})_2((y_n)_n) = (f \circ s^{-1})\big((0)_n, (y_n)_n\big) = f\big((0y)_n\big) = f\big(0, y_1, 0, y_2, 0, y_3, 0, y_4, 0, \ldots\big)$$

となる．

逆は,

$$\mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \oplus \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{c^{-1}} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}} \oplus \Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) \xrightarrow{\tilde{s}} \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}})$$

であり，辿ると

$$g \oplus h \mapsto \big(((x_n)_n, (y_n)_n) \mapsto g((x_n)_n) + h((y_n)_n)\big) \mapsto \big((a_n)_n \mapsto g((a_{2n-1})_n) + h((a_{2n})_n)\big)$$

となる．

いま $R := \mathsf{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}}, \Bbbk^{\mathbb{N}}) = \mathsf{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^{\mathbb{N}})$ とおけば, これは非可換環であり, 上記の同型 $R \cong R \oplus R = R^2$ は $R$-同型である．これが自由 $R$-加群だが，基底の濃度は $1 \neq 2$ と不確定.