

# Bergman の diamond lemma について

Taiki Shibata (Okayama University of Science)

## 概要

与えられた生成元と関係式で記述された代数に関して、構造や表現を研究したい気持ちがあると仮定する。そのためには、例えばリー代数における PBW 定理の様に、その代数の“良い”基底を見つけることがひとつのマイルストーン<sup>1)</sup>になろう。Bergman [B] による diamond lemma はこれに対する一つの回答を与えており、生成系に適当な順序が入っているときに、その順序に即したキレイな基底の存在（あるいは構成）を保証してくれる。本稿では Bergman [B, §1] の細部を補いつつ diamond lemma を証明する<sup>2)</sup>。また Varadarajan [V, Section 7.2] も副読本として用いた。

## 目次

1	基本事項	2
1.1	自由代数	2
1.2	簡約	2
2	順序と簡約化	3
2.1	$\Sigma$ -両立性	3
2.2	有限簡約性	4
2.3	DCC と有限簡約性	5
2.4	一意簡約性と既約基底	6
3	Diamond Lemma	8
3.1	Ambiguities	9
3.2	順序と ambiguities	10
3.3	Diamond Lemma	11
4	PBW 定理	12
4.1	Reduction System	13
4.2	順序の定義	14
4.3	overlap ambiguity を $\Leftarrow$ -解消する	15

<sup>1)</sup> そもそも基礎環上自由かどうかかも不明であるが。あと、マイルストーンという言葉は初めて使ったけどあってるのかな？

<sup>2)</sup> ただし用語を日本語に適当に訳したので、すでにしっかりしたものがあれば、ごめんなさいして適宜読み替えて頂きたい。

# 1 基本事項

本稿を通して、 $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  とし、基礎環  $\mathbb{k}$  は単位元を持つ可換環<sup>3)</sup> とし、 $X$  を固定された非空集合とする。

## 1.1 自由代数

集合  $X$  から“生成される”自由モノイドを  $\langle X \rangle$  とかき、 $\mathbb{k}\langle X \rangle$  を  $X$  上の自由  $\mathbb{k}$ -代数とする<sup>4)</sup>。頑張っ集合としてかこうとしたら、だいたい以下ようになる：

$$\begin{aligned}\langle X \rangle &= \{1\} \cup \{x_1 x_2 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X\}, \\ \mathbb{k}\langle X \rangle &= \mathbb{k} \cup \left\{ \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_{i_1, \dots, i_k} \in \mathbb{k}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in X \right\} \\ &= \left\{ \sum_{w \in \langle X \rangle} \alpha_w w \mid \alpha_w \in \mathbb{k} \text{ with } \alpha_w = 0 \text{ a.e. on } w \in \langle X \rangle \right\}\end{aligned}$$

ただし、簡単のために  $\langle X \rangle$  と  $\mathbb{k}$  の単位元を同一視してしまう。言葉遣いとして、多項式のとく同じく、 $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の元のうち (和になっていない)  $\alpha_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$  の形のもを単項式 (monomial) と呼ぶ。また、 $f = \sum_{w \in \langle X \rangle} \alpha_w w \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  に対して、次をその台 (support) と呼ぶ。

$$\text{supp}(f) := \{w \mid \alpha_w \neq 0\}.$$

## 1.2 簡約

以降、非空な集合  $\Sigma$  を固定し、直積集合  $\langle X \rangle \times \mathbb{k}\langle X \rangle$  の次のような部分集合を考える<sup>5)</sup>：

$$\{(w_\sigma, f_\sigma) \mid w_\sigma \notin \text{supp}(f_\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}.$$

つまり  $f_\sigma$  に出てくる非ゼロ係数の単項式は  $w_\sigma$  を含まないものとする。特に  $w_\sigma \neq f_\sigma$  に注意。これは **reduction system** と呼ばれる。

### 注意 1.1.

もし気に入らないなら、 $f_\sigma$  の中に  $w_\sigma$  があれば、最初から  $\tilde{f}_\sigma := f_\sigma - \alpha_{w_\sigma} w_\sigma$  を考えればよい。後で簡約化を考える際に  $w_\sigma$  を  $f_\sigma$  に変えるのだが、そのときに“本質的に変わっている”感が出したい、ということ。

<sup>3)</sup> 将来的に自由代数を適当なイデアルで割るのだが、そのイデアルの生成元として「モニック単項式 - 多項式」にしたい ( $w_\sigma - f_\sigma$  のこと)。一般に与えられた関係式はもちろんこれをみたまないが、 $\mathbb{k}$  が体と仮定されていたら OK。技術的には、可換環でも関係式の (簡約化されるべき) 単項式の係数がその環の中でキャンセル可能なら OK。

<sup>4)</sup> あるいは  $X$  を基底とする自由  $\mathbb{k}$ -加群  $\mathbb{k}X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{k}x$  のテンソル代数  $T(\mathbb{k}X) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\mathbb{k}X)^{\otimes n}$  とすればいい。

<sup>5)</sup> やりたいことは、 $w_\sigma$  という項を  $f_\sigma$  という多項式で置換え (簡約化し) たい。

### 定義 1.2.

各  $\sigma \in \Sigma$ ,  $a, b \in \langle X \rangle$  に対して, 写像  $r_{a,\sigma,b} : \langle X \rangle \rightarrow \mathbb{k}\langle X \rangle$  を以下で定める:

$$r_{a,\sigma,b}(w) := \begin{cases} af_\sigma b & \text{if } w = aw_\sigma b, \\ w & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これを  $\mathbb{k}$ -線形化して  $r_{a,\sigma,b} \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}\langle X \rangle)$  と拡張し, **基本簡約 (elementary reduction)** と呼ぶ. 便宜的に全体を  $\mathcal{R}_{\text{elem}}$  とかき, これらの有限回の合成全体を  $\mathcal{R}$  と書いておく.

例えば  $a \neq b$  なら,  $r_{a,\sigma,b}(2aw_\sigma b + ab + bw_\sigma a) = 2af_\sigma b + ab + bw_\sigma a$  のような感じで, ほんとうに項として含むところ以外はそのまま. 定義から当たり前だが,  $w \in \langle X \rangle$  は  $r_{a,\sigma,b}(w) \neq w$  をみたすなら, 必ず  $w = aw_\sigma b$  でなければならない.

すぐ分かることとして, 各  $\sigma \in \Sigma$  に対して,  $w_\sigma - f_\sigma$  で生成される  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の両側イデアルは,

$$(w_\sigma - f_\sigma) := \left\{ \sum_i \alpha_i a_i (w_\sigma - f_\sigma) b_i \mid \alpha_i \in \mathbb{k}, a_i, b_i \in \langle X \rangle \right\} = \sum_{a,b \in \langle X \rangle} \text{Ker}(r_{a,\sigma,b})$$

と書けることに注意する.

### 定義 1.3.

元  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  が**既約 (irreducible)** :  $\iff \forall r \in \mathcal{R}, r(f) = f$ .

既約なものの全体を  $\mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  とかきとく. さらに  $\langle X \rangle_{\text{irr}} := \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}} \cap \langle X \rangle$  とおく.

もちろん  $\mathcal{R} \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}\langle X \rangle)$  なので,  $\mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  は  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の  $\mathbb{k}$ -部分加群になることに注意. つまり,  $0 \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  と任意の  $f, f' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  と  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{k}$  に対して  $\alpha f + \alpha' f' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  が成立. このことから, 例えば  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  が既約であることを示すためには,  $f$  の各単項式が既約であることを示せば十分と分かる (もちろん必ずしもではない).

## 2 順序と簡約化

以降ずっと, モノイド  $\langle X \rangle$  上に半順序<sup>6)</sup>  $\preceq$  を任意にとり固定する. さらにペア  $(\langle X \rangle, \preceq)$  が**順序モノイド (ordered monoid)** をなすと仮定する<sup>7)</sup>. つまり

$$\forall a, b, w, w' \in \langle X \rangle, \quad w \prec w' \implies awb \prec aw'b.$$

をみたすと仮定する. この順序は [B] では **semigroup partial ordering on  $\langle X \rangle$**  と呼ばれている.

### 2.1 $\Sigma$ -両立性

これから簡約化を行うにあたり, 簡約化したものはちゃんと順序が低くなってほしい (有限回の手続きで操作を終了したい). その為の言葉を準備する:

<sup>6)</sup> 全順序から比較可能性をとったもの

<sup>7)</sup> もちろん  $X$  に (整列) 順序を入れたら, 辞書式順序で  $\langle X \rangle$  に (整列) 順序が入る. しかし, PBW の証明に用いる順序と違うので NG.

### 定義 2.1.

順序  $\preceq$  が  $\Sigma$ -両立 (compatible with  $\Sigma$ ) :  $\iff \forall \sigma \in \Sigma, \exists \alpha_w \in \mathbb{k}$  for  $w \prec w_\sigma$  s.t.  $f_\sigma = \sum_{w \prec w_\sigma} \alpha_w w$ .

### 補題 2.2.

順序  $\preceq$  が  $\Sigma$ -両立とする. 任意の  $a, b \in \langle X \rangle$  と  $\sigma \in \Sigma$  に対して,  $w := aw_\sigma b$  とおくと,  $\forall w' \in \text{supp}(r_{a,\sigma,b}(w)), w' \prec w$ . 特に  $f_\sigma = \sum_{w' \prec w_\sigma} \alpha_{w'} w'$  と書けば  $r_{a,\sigma,b}(w) = \sum_{w' \prec w} \alpha_{w'} w'$ .

*Proof.* 仮定の  $\Sigma$ -両立性より, 次のようになっている:

$$r_{a,\sigma,b}(w) = af_\sigma b = \sum_{w' \prec w_\sigma} \exists \alpha_{w'} aw'b \quad \therefore \text{supp}(r_{a,\sigma,b}(w)) = \{aw'b \mid \alpha_{w'} \neq 0\}.$$

いま順序モノイドなので  $w' \prec w_\sigma$  ならば  $aw'b \prec aw_\sigma b = w$  となるから, 主張が従う.  $\square$

## 2.2 有限簡約性

### 定義 2.3.

元  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  が 有限簡約 (reduction-finite) :  $\iff \forall \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_{\text{elem}}, \exists N \in \mathbb{N}$  s.t.  $\forall n > N, r_n r_{n-1} r_{n-2} \cdots r_1(f) = r_{n-1} r_{n-2} \cdots r_1(f)$ .

もちろん定義は  $\forall \{r_n\}_n \subset \mathcal{R}$  と, 一般の簡約に変更しても同値 (但し “長さ” の概念が変になることに注意). また定義から明らかに, 任意の  $r \in \mathcal{R}$  と有限簡約  $f$  に対して,  $r(f)$  もまた有限簡約.

### 補題 2.4.

任意の  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  に対して,  $f$  が有限簡約ならば  $\exists r \in \mathcal{R}$  s.t.  $r(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$ .

*Proof.* まず一般に, 元  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  に対して,

$$\mathfrak{N}_f := \{N \in \mathbb{N} \mid \forall \{r_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{R}_{\text{elem}}, r_1(f) \neq f, \forall n \geq 2, r_n r_{n-1} \cdots r_1(f) \neq r_{n-1} \cdots r_1(f)\}$$

とおくとき<sup>8)</sup>, 次の同値が成立:

$$\mathfrak{N}_f = \emptyset \iff \forall r \in \mathcal{R}_{\text{elem}}, r(f) = f \iff f \text{ の単項式は } w_\sigma \text{ (} \sigma \in \Sigma \text{) を含まない.}$$

もし  $f$  が有限簡約で  $\mathfrak{N}_f \neq \emptyset$  ならば, 有限簡約性より  $\mathfrak{N}_f$  は上に有界な集合である. そこで  $N(f) := \max(\mathfrak{N}_f) + 1$  を考えることができ,

$$\{r_n\}_{n=1}^{N(f)} \subset \mathcal{R}_{\text{elem}}, \quad r_{N(f)} r_{N(f)-1} \cdots r_1(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}.$$

となり  $r := r_{N(f)} r_{N(f)-1} \cdots r_1$  とおけばよい.  $\square$

<sup>8)</sup> ちょっとこの定式化に手間取った...

**補題 2.5.**

有限簡約全体の集合は  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の  $\mathbb{k}$ -部分加群になる.

*Proof.* 有限簡約  $f, f' \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  とスカラー  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{k}$  をとり固定する. 任意の  $\{r_n\}_n \subset \mathcal{R}_{\text{elem}}$  に対して, 定義から  $\exists N, N' \in \mathbb{N}$  s.t.  $\forall n > N, \forall n' > N'$ ,

$$r_n(r_{n-1} \cdots r_1(f)) = r_{n-1} \cdots r_1(f), \quad r_{n'}(r_{n'-1} \cdots r_1(f')) = r_{n'-1} \cdots r_1(f').$$

すると,  $\forall n > \max\{N, N'\}$  に対して,

$$\begin{aligned} & r_n(r_{n-1} \cdots r_1(\alpha f + \alpha' f')) \\ &= \alpha r_n(r_{n-1} \cdots r_1(f)) + \alpha' r_n(r_{n-1} \cdots r_1(f')) \quad (\because \mathcal{R}_{\text{elem}} \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}\langle X \rangle)) \\ &= \alpha r_{n-1} \cdots r_1(f) + \alpha' r_n(r_{n-1} \cdots r_1(f')) \quad (\because n > N) \\ &= \alpha r_{n-1} \cdots r_1(f) + \alpha' r_{n-1} \cdots r_1(f') \quad (\because n > N') \\ &= r_{n-1} \cdots r_1(\alpha f + \alpha' f') \quad (\because \mathcal{R}_{\text{elem}} \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}\langle X \rangle)) \end{aligned}$$

となり OK. □

### 2.3 DCC と有限簡約性

一般に順序集合  $(S, \preceq)$  が**降鎖条件 (descending chain condition<sup>9)</sup>** をみたすとは,

$$\forall \{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S \quad [\cdots \preceq w_2 \preceq w_1 \implies \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall i > N, w_N = w_i].$$

をみたすときをいう.

**注意 2.6.**

一般に, 全順序集合  $(S, \preceq)$  に対して, 「これは整列順序集合  $\Leftrightarrow$  これが DCC をみたす」が成立し, さらに整列順序集合では (超限) 帰納法が使えるのだった. 帰納法が使えるばとても便利なのだが, いまの設定では扱うものは半順序なのでこのままでは不可. 代わりに整礎的 (well-founded) という概念がある:

$$\text{集合 } S \text{ 上の二項関係 } \dagger \text{ が**整礎的**: } \iff \emptyset \neq \forall A \subset S, \exists m \in A \text{ s.t. } \neg(\exists a \in A \text{ s.t. } a \dagger m).$$

すると, 整礎的な二項関係があれば帰納法のマネが成り立つ (**Noetherian induction** と呼ばれる): 命題  $P(s)$  for  $s \in S$  に対して,

$$\forall s \in S \quad [ [\forall t \in S, t \dagger s \implies P(t)] \implies P(s) ] \implies \forall s \in S, P(s).$$

他方で, 上で述べた事実の類似として, 集合  $S$  上の二項関係  $\dagger$  について 「 $\dagger$  が整礎的  $\Leftrightarrow \dagger$  が可算無限下降列をもたない」が, (少なくとも) 選択公理を仮定すると従う. ここで右の条件は DCC で  $\prec$  を  $\dagger$  にしたもの (もちろんイコールとかバグるが).

<sup>9)</sup> 以下では, DCC と略す.

上記注意を半順序集合  $(S, \preceq)$  でいいかえると,  $\preceq$  が整礎的とは「非空部分集合は必ず極小元をもつ」ということである. そして選択公理のもとで, 次が成り立つ<sup>10)</sup>:

$$\preceq \text{ が整礎的} \iff \preceq \text{ は DCC をみたす.}$$

特にこのとき  $(S, \preceq)$  では Noetherian induction が成り立つ. もちろん代数をやっているからには選択公理は必須なので, 本稿ではこれらの同値や事実は自由に使う.

### 補題 2.7.

順序  $\preceq$  が  $\Sigma$ -両立かつ DCC をみたす  $\implies \mathbb{k}\langle X \rangle$  の元はみな有限簡約.

*Proof.* 補題 2.5 から単項式で主張を示せば十分で, DCC の仮定より  $\langle X \rangle$  での Noetherian induction が使える. 任意に  $w \in \langle X \rangle$  と  $\{r_n\}_n \subset \mathcal{R}_{\text{elem}}$  を取り固定する. もし  $r_1(w) = w$  なら何もすることがないので,  $r_1(w) \neq w$  と仮定する. すると  $\{r_n\}_n$  は基本簡約たちだから,  $r_1 = r_{a,\sigma,b}$  かつ  $w = aw_\sigma b$  でなくてはならない. いま順序は  $\Sigma$ -両立なので, 補題 2.2 から,  $r_1(w)$  に出てくる単項式はみな  $w$  より  $\prec$  に関して低いので, 有限簡約<sup>11)</sup>. そこで明示的に  $r_1(w) = \sum_{i=1}^N \alpha_i w'_i$  with  $\alpha_i \in \mathbb{k}$  and  $w'_i \prec w$  とかくと, 各  $w'_i$  たちは与えられた  $\{r_n\}_{n \geq 2}$  について

$$\exists N_i \text{ s.t. } \forall n > N_i, \quad r_n r_{n-1} \cdots r_2(w'_i) = r_{n-1} \cdots r_2(w'_i)$$

が成立している. 従って,  $r_i \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}\langle X \rangle)$  に注意すると,  $\forall n > \max\{N_1, \dots, N_n\}$  に対して

$$r_n r_{n-1} \cdots r_2 r_1(w) = \sum_{i=1}^N \alpha_i r_n r_{n-1} \cdots r_2(w'_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i r_{n-1} \cdots r_2(w'_i) = r_{n-1} \cdots r_2 r_1(w)$$

となり OK. □

## 2.4 一意簡約性と既約基底

### 定義 2.8.

元  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  が一意簡約 (reduction-unique) :  $\iff f$  は有限簡約で,  $\forall r, r' \in \mathcal{R} [r(f), r'(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}} \implies r(f) = r'(f)]$ .

一意簡約全体を  $\mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  とかいておく.

各  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  に対して, 補題 2.4 から  $f$  を既約にする  $\mathcal{R}$  の元があるのだった. 一意簡約の定義からそれはただ一つ定まるので, それを以降  $r_\Sigma(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  とかく.

### 補題 2.9.

$\mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  は  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の  $\mathbb{k}$ -部分加群.

<sup>10)</sup> もし全順序であれば, さらに  $\preceq$  が整列順序と同じ.

<sup>11)</sup> 正確には「と仮定する」が必要.

*Proof.* 自明に  $0 \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  は OK. 任意に  $f, f' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  と  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{k}$  とをとり固定する. 補題 2.5 から,  $\alpha f + \alpha' f'$  が有限簡約になることは良い. 任意の  $r \in R$  with  $r(\alpha f + \alpha' f') \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  をとり固定する. いま  $f$  は有限簡約なので,  $r(f)$  に対して補題 2.4 を使えば  $\exists r' \in \mathcal{R}$  s.t.  $r'r(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  とできる. 記号の定義から  $r'r(f) = r_\Sigma(f)$  である. 同様に  $r'r(f')$  に対しても  $\exists r'' \in \mathcal{R}$  s.t.  $r''r'r(f') = r_\Sigma(f')$  となる. すると,

$$\begin{aligned} r(\alpha f + \alpha' f') &= r''r'(r(\alpha f + \alpha' f')) \quad (\because r(\alpha f + \alpha' f') \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}) \\ &= \alpha r''r'r(f) + \alpha' r''r'r(f') \quad (\because \mathcal{R} \subset \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}\langle X \rangle)) \\ &= \alpha r''(r_\Sigma(f)) + \alpha' r''(r_\Sigma(f')) \quad (\because \text{作り方}) \\ &= \alpha r_\Sigma(f) + \alpha' r_\Sigma(f') \quad (\because r_\Sigma(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}). \end{aligned}$$

従って,  $\alpha f + \alpha' f'$  はどんな簡約も同じものになるので, 一意簡約. □

このことから写像

$$r_\Sigma : \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}} \longrightarrow \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$$

は全射な  $\mathbb{k}$ -準同型であることが分かった.

### 補題 2.10.

$f, f', f'' \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  に対して,  $\forall w \in \text{supp}(f), w' \in \text{supp}(f'), w'' \in \text{supp}(f''), ww'w'' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  ならば,  $\forall r \in \mathcal{R}, fr(f')f'' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  かつ  $r_\Sigma(fr(f')f'') = r_\Sigma(fr(f')f'')$ .

*Proof.* 補題 2.9 から, このとき  $ff'f'' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  に注意する. また, 主張を単項式  $f = w, f' = w', f'' = w''$  のときに示せば十分. もし  $r(w') = w'$  ならすることはないので,  $r(w') \neq w'$  と仮定, すなわち  $w' = aw_\sigma b$  and  $r' = r_{a,\sigma,b}$  と仮定してよい. このとき簡約の定義より

$$wr(w')w'' = wr_{a,\sigma,b}(aw_\sigma b)w'' = r_{wa,\sigma,bw''}(waw_\sigma bw'') = r_{wa,\sigma,bw''}(ww'w'')$$

だから, 仮定の  $ww'w'' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  より OK. □

集合  $\{w_\sigma - f_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$  で生成される  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の両側イデアル  $(w_\sigma - f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$  を

$$I_\Sigma := (w_\sigma - f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$$

とおいておく.

### 補題 2.11.

任意の  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  と  $r \in \mathcal{R}$  に対して,  $f - r(f) \in I_\Sigma$ .

*Proof.* まず  $r \in \mathcal{R}_{\text{elem}}$  のときは, 基本簡約の定義から  $r(f) \equiv f \pmod{I_\Sigma}$ , つまり  $f - r(f) \in I_\Sigma$  となり OK. つぎに一般の場合,  $r(f) = r_N \cdots r_2 r_1(f)$  と基本簡約たち  $r_1, r_2, \dots, r_N \in \mathcal{R}_{\text{elem}}$  で表示しておく. いま  $f - r_1(f) \in I_\Sigma$  だったので, この“両辺”に  $r_2$  を施せば  $r_2(f) - r_2 r_1(f) \in I_\Sigma$  を得る. 他方で  $f - r_2(f) \in I_\Sigma$  も言えているので,  $I_\Sigma$  がイデアルであることに注意すれば, これらから  $f - r_2 r_1(f) \in I_\Sigma$  を得る. 帰納的に  $f - r_N \cdots r_2 r_1(f) \in I_\Sigma$  がいえる. □

**補題 2.12.**

もし  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni}}$  ならば,  $\text{Ker}(r_\Sigma) = I_\Sigma$ .

*Proof.* まず (⊃) を示す. 任意に  $f \in I_\Sigma$  をとり固定する. 定義から  $\exists N \in \mathbb{N}$  s.t.  $1 \leq \forall i \leq N$  に対して,

$$\exists \sigma_i \in \Sigma, \exists \alpha_i \in \mathbb{k}, \exists a_i, b_i \in \langle X \rangle \quad \text{s.t.} \quad f = \sum_i \alpha_i a_i (w_{\sigma_i} - f_{\sigma_i}) b_i$$

となっている. 各  $i$  に対して,  $r_{a_i, \sigma_i, b_i}(a_i(w_{\sigma_i} - f_{\sigma_i})b_i) = 0$  が成立し, 仮定から  $a_i(w_{\sigma_i} - f_{\sigma_i})b_i$  は一意簡約であることに注意する. すると補題 2.9 から

$$r_\Sigma(f) = r_\Sigma(r_{a_1, \sigma_1, b_1}(f)) = r_\Sigma\left(\sum_{i \neq 1} \alpha_i a_i (w_{\sigma_i} - f_{\sigma_i}) b_i\right)$$

となり, これを他の  $i (\neq 1)$  でも繰り返せば,  $r_\Sigma(f) = 0$  を得る.

次に (⊂) を示す. 任意の  $f \in \text{Ker}(r_\Sigma)$  をとり固定する. 補題 2.11 より  $f - r_\Sigma(f) \in I_\Sigma$  となっているが, 仮定から  $r_\Sigma(f) = 0$  だったので,  $f \in I_\Sigma$  を得る.  $\square$

簡単のため, 元  $w \in \langle X \rangle$  の商加群  $\mathbb{k}\langle X \rangle / I_\Sigma = \mathbb{k}\langle X \rangle / (w_\sigma - f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$  への像を  $\bar{w}$  と書くことにする.

**命題 2.13.**

順序  $\preceq$  が  $\Sigma$ -両立かつ DCC をみたすとする. このとき  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni}}$ .  $\iff$  商加群  $\mathbb{k}\langle X \rangle / I_\Sigma$  は  $\mathbb{k}$ -自由加群であり, 基底は  $\{\bar{w} \mid w \in \langle X \rangle_{\text{irr}}\}$  で与えられる.

*Proof.* まず ( $\implies$ ) は, 補題 2.12 (と準同型定理) から

$$\mathbb{k}\langle X \rangle / I_\Sigma = \mathbb{k}\langle X \rangle / \text{Ker}(r_\Sigma) \xrightarrow[r_\Sigma]{\cong} \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}} = \bigoplus_{w \in \langle X \rangle_{\text{irr}}} \mathbb{k}w$$

が成り立つので OK. 次に ( $\impliedby$ ) について. 任意に  $f \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  をとり固定する. 補題 2.7 より  $f$  は有限簡約であることに注意する. 任意に  $r, r' \in \mathcal{R}$  をとり  $r(f), r'(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  が成り立っているとする. もちろん  $r(f) - r'(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}}$  となっている. 他方で, 補題 2.11 より  $f - r(f), f - r'(f) \in I_\Sigma$  が成り立っているので,  $r(f) - r'(f) \in I_\Sigma$  となっている. これらを合わせれば  $r(f) - r'(f) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}} \cap I_\Sigma$  を得る. ここで仮定より  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{irr}} \oplus I_\Sigma$  となっていることに注意すると,  $r(f) - r'(f) = 0$  を得る. 従って,  $f$  は一意簡約.  $\square$

### 3 Diamond Lemma

命題 2.13 から「 $\mathbb{k}\langle X \rangle$  がみな一意簡約であるための (必要十分) 条件」を分かりやすく記述すればよいことになった. もちろん, 以下でも引き続き  $(\langle X \rangle, \preceq)$  が順序モノイドであることを仮定する.



### 3.1 Ambiguities

単項式の元が  $w = aw_\sigma bw_{\sigma'}c \in \langle X \rangle$  となっていた場合,  $r_{a,\sigma,bw_{\sigma'}c}$  と  $r_{aw_\sigma b,\sigma',c}$  という感じで, “独立” にそれぞれの箇所で簡約を施すことができる. しかし重なっているときは独立にはできない. そこで適切なコトバ<sup>12)</sup>を用意する.

#### 定義 3.1.

元たち  $a, b, c \in \langle X \rangle \setminus \{1\}$  と  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  に対して,

- $(a, b, c; \sigma, \sigma')$  が **overlap ambiguity** :  $\iff w_\sigma = ab$  かつ  $w_{\sigma'} = bc$ .
- $(a, b, c; \sigma, \sigma')$  が **inclusion ambiguity** :  $\iff w_\sigma = abc$  かつ  $w_{\sigma'} = b$ .

総称として単に **ambiguity** と呼ぶことにする.

定義で  $a = b$  なども状況も含む事に注意. 上の状況をイラストにすると以下の感じ:

$$\text{overlap: } \underbrace{a \quad b}_{w_\sigma} \quad \overbrace{b \quad c}^{w_{\sigma'}} \qquad \text{inclusion: } \underbrace{a \quad b(=w_{\sigma'}) \quad c}_{w_\sigma}$$

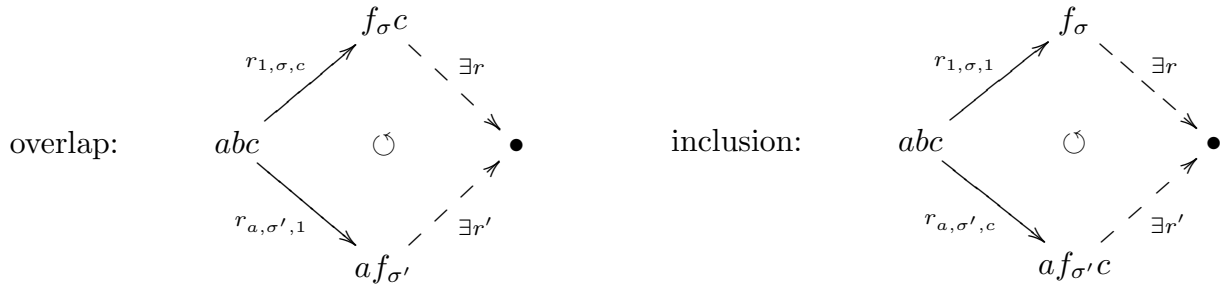
これらの状況のとき, 簡約の方法によっては結果がもちろん異なる. そこで, もっと先で一致するよな良い場合に名前を付けておく.

#### 定義 3.2.

ambiguity  $(a, b, c; \sigma, \sigma')$  について.

- **overlap 解消 (resolve)** :  $\iff \exists r, r' \in \mathcal{R}$  s.t.  $r(r_{1,\sigma,c}(abc)) = r'(r_{a,\sigma',1}(abc))$ .
- **inclusion 解消 (resolve)**:  $\iff \exists r, r' \in \mathcal{R}$  s.t.  $r(r_{1,\sigma,1}(abc)) = r'(r_{a,\sigma',c}(abc))$ .

イラストにすると下図のようになる. これが diamond の名の由来 (だと固く信じている):



一意簡約性の性質から, 簡約をたくさん行ったら一定の (既約) 元に “収束” するのだった. 従って, 次はすぐ従う:

<sup>12)</sup> ambiguity は日本語で「あいまいさ」

**補題 3.3.**

$\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}} \implies$  任意の ambiguity は解消.

**3.2 順序と ambiguities**

もちろん ambiguity は簡約において一目で重要なのは分かるがちょっと抽象的だった. ここではひとまず, もう少し強めて (弱めて?) 扱いやすい概念<sup>13)</sup> を考える. そのために, 各  $w \in \langle X \rangle$  に対して, 次の記号用意しておく:

$$I_{\prec w} := \text{Span}_{\mathbb{k}}\{a(w_{\sigma} - f_{\sigma})b \in \mathbb{k}\langle X \rangle \mid a, b \in \langle X \rangle, \sigma \in \Sigma, aw_{\sigma}b \prec w\} \subset (w_{\sigma} - f_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$$

いま順序  $\preceq$  はモノイド構造と両立していたので, 任意の  $a, b \in \langle X \rangle$  に対して,  $aI_{\prec w}b \subset I_{\prec awb}$  となることに注意.

**定義 3.4.**

ambiguity  $(a, b, c; \sigma, \sigma')$  について.

- **overlap  $\preceq$ -解消 (resolvable relative to  $\preceq$ )** :  $\iff f_{\sigma}c - af_{\sigma'} \in I_{\prec abc}$ .
- **inclusion  $\preceq$ -解消 (resolvable relative to  $\preceq$ )** :  $\iff af_{\sigma'}c - f_{\sigma} \in I_{\prec abc}$ .

一意簡約のもとでは, 名前の通りちゃんと強まっていることを見る:

**補題 3.5.**

順序  $\preceq$  が  $\Sigma$ -両立と仮定し,  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  と仮定する. 任意の  $a, b, c \in \mathbb{k}\langle X \rangle$  と  $\sigma, \sigma' \in \Sigma$  から作られる ambiguity  $(a, b, c; \sigma, \sigma')$  について. overlap (resp. inclusion) 解消  $\implies$  overlap (resp. inclusion)  $\preceq$ -解消.

*Proof.* 仮定から  $\exists r, r' \in \mathcal{R}$  s.t.  $r(f_{\sigma}c) = r'(af_{\sigma'})$  (resp.  $r(f_{\sigma}) = r'(af_{\sigma'}c)$ ) なので, 補題 2.4 のことから, もっと伸ばして  $r_{\Sigma}(f_{\sigma}c) = r_{\Sigma}(af_{\sigma'})$  (resp.  $r_{\Sigma}(f_{\sigma}) = r_{\Sigma}(af_{\sigma'}c)$ ) とできる. 従って, 補題 2.12 から

$$f_{\sigma}c - af_{\sigma'} \text{ (resp. } af_{\sigma'}c - f_{\sigma}) \in \text{Ker}(r_{\Sigma}) = (w_{\sigma} - f_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$$

となる.

あとは各単項式の順序をみればよい. 定めかたから  $f_{\sigma}c = r_{1, \sigma, c}(w_{\sigma}c)$  かつ  $af_{\sigma'} = aw_{\sigma'}$  (resp.  $af_{\sigma'}c = r_{a, \sigma', c}(aw_{\sigma'}c)$  かつ  $f_{\sigma} = r_{1, \sigma, 1}(w_{\sigma})$ ) なので,  $\Sigma$ -両立の仮定と補題 2.2 より,  $f_{\sigma}c$  および  $af_{\sigma'}$  (resp.  $af_{\sigma'}c$  および  $f_{\sigma}$ ) の各単項式の順序は,  $w_{\sigma}c = aw_{\sigma'} = abc$  (resp.  $aw_{\sigma'}c = w_{\sigma} = abc$ ) より低い. 従って,  $f_{\sigma}c - af_{\sigma'} \in I_{\prec abc}$  (resp.  $af_{\sigma'}c - f_{\sigma} \in I_{\prec abc}$ ).  $\square$

補題 3.3 と補題 3.5 より次が従う:

<sup>13)</sup> なお, [B] の inclusion の方の “定義” に typo があることに注意.

**補題 3.6.**

順序  $\preceq$  が  $\Sigma$ -両立と仮定する. このとき  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}} \implies$  任意の ambiguity は  $\preceq$ -解消.

### 3.3 Diamond Lemma

**命題 3.7.**

順序  $\prec$  が  $\Sigma$ -両立かつ DCC をみたすとする. このとき  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}} \iff$  任意の ambiguity は  $\prec$ -解消.

*Proof.* まず  $(\implies)$  は, 補題 3.6 のまま. 次に  $(\impliedby)$  は, 補題 2.9 より単項式で主張が言えたら十分. 任意に  $w \in \langle X \rangle$  を取り固定する. 補題 2.7 から  $w$  は有限簡約. 仮定より DCC なので Noetherian induction が使える. そこで  $\forall w' \prec w$  に対して  $w'$  が一意既約と仮定し,  $w$  をがそうなることを示していく. まず, 任意の  $a(w_\sigma - f_\sigma)b \in I_{\prec w}$  に対して,  $\Sigma$ -両立性から  $f_\sigma = \sum_{y \prec w_\sigma} \alpha_y y$  ( $\alpha_y \in \mathbb{k}$ ) と表示することができるが,  $a(w_\sigma - f_\sigma)b = aw_\sigma b - \sum_{y \prec w_\sigma} \alpha_y ayb$  の項は  $I_{\prec w}$  の定義から  $ayb \prec aw_\sigma b \prec w$  となっているので, I.H. が使えて一意簡約. いま  $r_{a,\sigma,b}(a(w_\sigma - f_\sigma)b) = 0$  に注意すると,  $r_\Sigma(a(w_\sigma - f_\sigma)b) = 0$ . 従って  $I_{\prec w} \subset \text{Ker}(r_\Sigma)$  を得る (後で使う).

さて  $w \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  を示す. 任意の基本簡約  $r_1, r'_1 \in \mathcal{R}_{\text{elem}}$  with  $r_1(w) \neq w \neq r'_1(w)$  をとり固定する. もし  $r_1(w), r'_1(w)$  がともに一意簡約がいえたら,  $r_\Sigma(r_1(w)) = r_\Sigma(r'_1(w))$  となるので,  $w$  は一意簡約.

従って, 以下で  $r_1(w), r'_1(w) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  をいう. 取り方の  $r_1(w) \neq w \neq r'_1(w)$  より  $r_1 = r_{a,\sigma,b}$  かつ  $r'_1 = r_{a',\sigma',b'}$  という形をしている. すると  $w$  は  $w_\sigma, w_{\sigma'}$  を含むはずだが, 一般性を失うことなくその位置は  $w_\sigma$  が左側で  $w_{\sigma'}$  が右側にあるとしてよい. 後は  $w_\sigma, w_{\sigma'}$  の位置としては, 以下の3つのパターンに場合分けされる (正確に言うと inclusion はもう一方が必要だが):

- (1) disjoint の場合:  $\exists x \in \langle X \rangle$  s.t.  $w = aw_\sigma xw_{\sigma'}b'$  with  $aw_\sigma x = a'$  and  $xw_{\sigma'}b' = b$ .

$$w = \underbrace{a w_\sigma x}_{a'} \overbrace{w_{\sigma'} b'}^b$$

まず  $r_{a,\sigma,b}(w) = af_\sigma xw_{\sigma'}b'$  かつ  $r_{a',\sigma',b'}(w) = aw_\sigma xf_{\sigma'}b'$  となっている. 補題 2.2 から, この各単項式は  $w$  より低いので, I.H. より一意簡約. さらにその線形結合だから  $r_{a,\sigma,b}(w), r_{a',\sigma',b'}(w)$  自身もまた一意簡約 (see 補題 2.9). すると, 補題 2.10 から

$$r_\Sigma(r_{a,\sigma,b}(w)) = r_\Sigma(af_\sigma xw_{\sigma'}b') = r_\Sigma(r_{a,\sigma,x}(aw_\sigma x)w_{\sigma'}b') = r_\Sigma(aw_\sigma xw_{\sigma'}b') = r_\Sigma(w)$$

を得る. 同様にして  $r_\Sigma(r_{a',\sigma',b'}(w)) = r_\Sigma(w)$  も得るので OK.

- (2) overlap の場合:  $\exists x, y, z \in \langle X \rangle$  s.t.  $w = axyzb'$  with  $xy = w_\sigma$  and  $yz = w_{\sigma'}$ .

$$w = a \underbrace{x y}_{w_\sigma} \overbrace{z b'}^{w_{\sigma'}}$$

このとき  $(x, y, z; \sigma, \sigma')$  が overlap ambiguity だから、仮定より  $f_\sigma z - x f_{\sigma'} \in I_{\prec xyz}$  となっている。従って、 $a(f_\sigma z - x f_{\sigma'})b' \in I_{\prec axyzb'=w}$  となる。他方で、最初に示したことから  $I_{\prec w} \subset \text{Ker}(r_\Sigma)$  なので

$$r_\Sigma(a f_\sigma z b' - a x f_{\sigma'} b') = r_\Sigma(a(f_\sigma z - x f_{\sigma'})b') = 0$$

となる<sup>14)</sup>。いま補題 2.2 より  $a f_\sigma z b = r_{a, \sigma, x b}(a w_\sigma z b)$  の単項式たちは  $a w_\sigma z b = w$  より低いので、I.H. からそれらは一意簡約、よって  $a f_\sigma z b$  もそう。同様にして  $x f_{\sigma'} b' \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  も従う。よって、 $r_\Sigma(a f_\sigma z b' - a x f_{\sigma'} b') = r_\Sigma(a f_\sigma z b') - r_\Sigma(a x f_{\sigma'} b')$  となるから、以上の事と合わせると：

$$r_\Sigma(r_{a, \sigma, b}(w)) = r_\Sigma(a f_\sigma z b') = r_\Sigma(a x f_{\sigma'} b') = r_\Sigma(r_{a', \sigma', b'}(w)).$$

(3) inclusion の場合： $\exists x, z \in \langle X \rangle$  s.t.  $ax = a'$  and  $zb = b'$ .

$$w = a \underbrace{x w_{\sigma'} z}_{w_\sigma} b'$$

このとき  $(x, y := w_{\sigma'}, z; \sigma, \sigma')$  が inclusion ambiguity だから、仮定より  $x f_{\sigma'} z - f_\sigma \in I_{\prec xyz}$  となっている。従って、 $a(x f_{\sigma'} z - f_\sigma)b' \in I_{\prec axyzb'=w}$  となる。あとは、overlap の時と全く同様にして  $r_\Sigma(r_{a, \sigma, b}(w)) = r_\Sigma(r_{a', \sigma', b'}(w))$  がいえる。

以上から  $r_1(w), r'_1(w) \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  が示され、 $w \in \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$  がいえた。□

これまでの命題 2.13 と命題 3.7 を合わせることで次を得る。これが Bergman の diamond lemma [B, Theorem 1.2] の主張である。

### 定理 3.8.

順序モノイド  $(\langle X \rangle, \preceq)$  が  $\Sigma$ -両立かつ DCC をみたすとき、以下は同値：

- (1) 任意の ambiguity は 解消.
- (2) 任意の ambiguity は  $\preceq$ -解消.
- (3) 任意の  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の元は一意簡約 i.e.,  $\mathbb{k}\langle X \rangle = \mathbb{k}\langle X \rangle_{\text{red.uni.}}$ .
- (4)  $\mathbb{k}$ -加群として  $\mathbb{k}\langle X \rangle / (w_\sigma - f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma} \cong \bigoplus_{w \in \langle X \rangle_{\text{irr}}} \mathbb{k}\bar{w}$ .

## 4 PBW 定理

PBW(Poincaré-Birkhoff-Witt) 定理とは、リー代数の普遍包絡代数の基底を記述するものである。殆ど全てのリー代数の教科書にはその証明が載っているが、せっかくなのでここでは diamond lemma の応用としての証明を、Bergman オリジナル [B, Section 3] の方法をなぞって見てみる。

相変わらず  $\mathbb{k}$  を単位元をもつ可換環とする。ひとまずリー代数の復習から始める：

<sup>14)</sup> まだ中身が一意簡約か不明なので、和に分解できないことに注意。

**定義 4.1.**

$\mathbb{k}$ -加群  $\mathfrak{g}$  が  $\mathbb{k}$  上のリー代数 :  $\iff \mathbb{k}$ -双線型写像  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  が存在して次をみたす :

- [交代性]  $\forall A \in \mathfrak{g}, [A, A] = 0;$
- [Jacobi 恒等式]  $\forall A, B, C \in \mathfrak{g}, [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$

もちろん, 双線型性と交代性から次が成立する<sup>15)</sup>.

$$[\text{反対称性}] \quad \forall A, B \in \mathfrak{g}, [A, B] = -[B, A].$$

リー代数  $\mathfrak{g}$  の **普遍包絡代数 (universal enveloping algebra)** は, 次で与えられるのであった :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \mathbb{k}\langle X \rangle / (AB - BA - [A, B])_{A, B \in \mathfrak{g}}.$$

ここで  $(AB - BA - [A, B])_{A, B \in \mathfrak{g}}$  は, 部分集合  $\{AB - BA - [A, B] \mid A, B \in \mathfrak{g}\}$  によって生成される  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の両側イデアル.

以下で,  $\mathbb{k}$ -加群として自由なリー代数  $\mathfrak{g}$  をとり固定し, その基底を  $X$  とかく. さらに任意に  $X$  上の全順序  $\leq_X$  をとり固定する. PBW の定理とは次の主張のことを指す :

**定理 4.2.**

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  は  $\mathbb{k}$ -自由であり, その基底は

$$\{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle, x_1 \leq_X x_2 \leq_X \cdots \leq_X x_n\} \cup \{1\}$$

で与えられる. ここで  $\bar{x}$  は  $x \in \langle X \rangle$  の  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  への自然な像.

以下で, 適切な reduction system を与えることで, diamond lemma を用いてこの PBW 定理を証明する.

### 4.1 Reduction System

与えられた基底と順序 (と反対称性) を用いれば, 普遍包絡代数を定義するイデアルは

$$(AB - BA - [A, B])_{A, B \in \mathfrak{g}} = (yx - (xy - [x, y]))_{x, y \in X \text{ with } x <_X y}$$

と書き換えられることに注意する. そこで

$$\Sigma := \{(x, y) \in X \times X \mid x <_X y\}, \quad w_\sigma := yx, \quad f_\sigma := xy - [x, y] \quad \text{for } \sigma = (x, y) \in \Sigma$$

とおき, reduction system  $\{(w_\sigma, f_\sigma)\}_{\sigma \in \Sigma}$  を考える. 以下で, リー代数  $\mathfrak{g}$  の元は自然に  $\mathbb{k}\langle X \rangle$  の元<sup>16)</sup> と見る.

<sup>15)</sup> 一般に写像  $\mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}; \alpha \mapsto 2\alpha (= \alpha + \alpha)$  は単射 (“2-divisible” という) ではないので, 反対称性からは交代性は出てこないことに注意する. 反対称性だけを仮定したい場合は, 基礎環は 2-divisible と仮定すればよい (標数が 2 でない体とか).

<sup>16)</sup> テンソル代数と考えたら  $(\mathbb{k}X)^{\otimes 1}$  の箇所.

最後に, ambiguity が全解消できたら, 既約単項式たち  $\langle X \rangle_{\text{irr}}$  が所望の基底になるのだった. 先にその形を決定しておく:

**補題 4.3.**

$$\langle X \rangle_{\text{irr}} = \{x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle \mid n \in \mathbb{N}, x_1 \leq_X x_2 \leq_X \cdots \leq_X x_n\} \cup \{1\}.$$

*Proof.* まず全順序性から全てが比較可能であることに注意する. 簡約は定義から順序が“逆”になっているものをひっくり変えすものだったので, 既約  $\Leftrightarrow$  順番どおり. よって右辺のがすべての既約.  $\square$

各  $\sigma \in \Sigma$  に対して,  $w_\sigma$  の“長さ”は2であることを考えると, 明らかに inclusion ambiguity は存在しないことに注意する. 従って, 以下では overlap ambiguity の解消をする.

## 4.2 順序の定義

モノイド  $\langle X \rangle$  上に順序を定めるために, 言葉の準備をする: 元  $w = x_1 x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle \setminus \{1\}$  with  $x_1, \dots, x_n \in X$  について.

- $\text{length}(w) := n$  をその **length** と呼ぶ.
- $\text{m-ind}(w) := \#\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i < j \text{ and } x_i >_X x_j\}$  をその **misordering index** と呼ぶ.

ただし  $\#\emptyset := 0$  として,  $w = 1$  のときは  $\text{length}(1) := 0$  としておく. 特に  $\text{m-ind}(1) = \text{m-ind}(x) = 0$  for all  $x \in X$  でありちゃんと並んでいる場合も  $\text{m-ind}$  はゼロとなる.

**定義 4.4.**

モノイド  $\langle X \rangle$  上に次のようにして二項関係  $\preceq$  を定める: 各  $w, w' \in \langle X \rangle$  に対して,  $w \preceq w' : \Leftrightarrow$

$$\text{or} \begin{cases} w = w'; \\ \text{length}(w) < \text{length}(w'); \\ n := \text{length}(w) = \text{length}(w'), \exists \tau \in \mathfrak{S}_n \text{ s.t. } w = \tau(w') \text{ and } \text{m-ind}(w) < \text{m-ind}(w'). \end{cases}$$

ここで  $\mathfrak{S}_n$  は  $n$  次対称群であり,  $w = x_1 x_2 \cdots x_n$  に対して  $\tau(w) := x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(n)}$  と書いている.

つまり, まずは単純に長さで比較して, もし一緒に構成要員が同じならちゃんと並んでるか否かで順序を決める.

**補題 4.5.**

この  $\preceq$  は, モノイド構造を保つ半順序であり,  $\Sigma$ -両立かつ DCC をみたす.

*Proof.* 半順序であること (反射律・反対称律・推移律) は定義から自明. 順序モノイドであることは  $\text{length}$  の箇所は OK なので, その他のところを考える (条件の3番目が気になる). まず

$w = x_1x_2 \cdots x_n \in \langle X \rangle$  と  $x \in X$  に対して、次はすぐにわかる。

$$\text{m-ind}(xw) = \text{m-ind}(w) + \#\{j \in \{1, 2, \dots, n\} \mid x >_X x_j\}.$$

すると、もし  $w \prec w'$  かつ  $\text{length}(w) = \text{length}(w')$  であれば、定義から  $w, w'$  の中に出てくる  $X$  の元は共通しているので、 $\text{m-ind}(xw) < \text{m-ind}(xw')$  が任意の  $x \in X$  に対して成り立ち、 $xw \prec xw'$  を得る ( $\mathfrak{S}_{n+1}$  の元も自然なもので OK). もちろん逆側からの積  $\text{m-ind}(wx)$  も似たような記述ができるので、これらのことから  $(\langle X \rangle, \prec)$  は順序モノイドとなることが分かる。

また任意の  $\sigma = (x, y) \in \Sigma$  に対して ( $x <_X y$  に注意),  $w_\sigma = xy, f_\sigma = yx - [x, y]$  だが

$$\text{m-ind}(xy) = 0 < 1 = \text{m-ind}(yx), \quad \text{length}([x, y]) = 1 < 2 = \text{length}(yx)$$

なので<sup>17)</sup>  $\Sigma$ -両立も OK. 最後の DCC は、 $\text{length}$  も  $\text{misordering index}$  もそうだから OK. □

### 4.3 overlap ambiguity を $\prec$ -解消する

任意に  $\sigma = (y, z), \sigma' = (x, y) \in \Sigma$  を取り固定する. このとき  $w_\sigma = zy, f_\sigma = yz - [y, z], w_{\sigma'} = yx, f_{\sigma'} = xy - [x, y]$  である. 定義から  $x <_X y <_X z$  となっていることに注意する. 次を示すことが最終目標:

#### 命題 4.6.

overlap ambiguity  $(z, y, x; \sigma, \sigma')$  は  $\prec$ -解消. つまり  $r_{1, \sigma, x}(zyx) - r_{z, \sigma', 1}(zyx) \in I_{\prec zyx}$ .

さて、我々の  $w := zyx$  は  $\text{m-ind}(w) = 3$  であり、

$$\begin{aligned} \text{m-ind}(xyz) &= 0, \\ \text{m-ind}(xzy) &= \text{m-ind}(yxz) = 1, \\ \text{m-ind}(yzx) &= \text{m-ind}(zxy) = 2 \end{aligned}$$

だから、順序の定義より

$$xyz, xzy, yxz, yzx, zxy \prec w = zyx$$

となっている. 補助的に  $\sigma'' := (x, z) \in \Sigma, w_{\sigma''} = zx, f_{\sigma''} = xz - [x, z]$  を用意する. 記号の定義より、

$$I_{\prec w} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Span}_{\mathbb{k}}\{a(w_\sigma - f_\sigma)b \mid a, b \in \langle X \rangle, \sigma \in \Sigma, aw_\sigma b \prec w\}$$

だったので、集合の中で「 $a$  が 1 かつ  $b \in X$ 」もしくは「 $a \in X$  かつ  $b = 1$ 」ならば、 $aw_\sigma b, aw_{\sigma'} b, aw_{\sigma''} b \prec w$  であるから、 $aw_\sigma b, aw_{\sigma'} b, aw_{\sigma''} b \in I_{\prec w}$  となる. 以下で、 $f \equiv g$  を  $f - g \in I_{\prec w}$  の意味で使うことにして、具体的に書き下せば、以下のようになる.

<sup>17)</sup> ここで  $\text{length}([x, y])$  は怪しい記号になっているが、ブラケットをとった後に基底の線形結合にでてくるそれぞれが、というような意味で適宜解釈してください.

- (1)  $\sigma = (y, z)$  の場合に  $a = x, b = 1$  とすれば,  $xzy \equiv xyz - x[y, z]$ ;
- (2)  $\sigma = (y, z)$  の場合に  $a = 1, b = x$  とすれば,  $zyx \equiv yzx - [y, z]x$ ;
- (3)  $\sigma' = (x, y)$  の場合に  $a = z, b = 1$  とすれば,  $zyx \equiv zxy - z[x, y]$ ;
- (4)  $\sigma' = (x, y)$  の場合に  $a = 1, b = z$  とすれば,  $yxz \equiv xyz - [x, y]z$ ;
- (5)  $\sigma'' = (x, z)$  の場合に  $a = y, b = 1$  とすれば,  $yzx \equiv yxz - y[x, z]$ ;
- (6)  $\sigma'' = (x, z)$  の場合に  $a = 1, b = y$  とすれば,  $zxy \equiv xzy - [x, z]y$ .

次の補題は基本的だがパワフル :

#### 補題 4.7.

$$\forall A, B \in \mathfrak{g}, \forall w \in \langle X \rangle, \text{length}(w) \geq 3 \implies AB - BA - [A, B] \in I_{\prec w} \quad (\text{例の記法でかけば } AB \equiv BA + [A, B]).$$

*Proof.* まず  $I_{\prec w}$  の定義より, 主張を  $\mathfrak{g}$  の任意の基底  $x, y$  に対して示せば十分であることに注意する. もし  $x <_X y$  なら,  $\sigma := (x, y) \in \Sigma$  であり  $w_\sigma = yx$  and  $f_\sigma = xy - [x, y]$  だったので,

$$xy - yx - [x, y] = -w_\sigma + f_\sigma = -1(w_\sigma - f_\sigma)1$$

かつ  $\text{length}(w_\sigma) = 2 \leq 3 \leq \text{length}(w)$  だから,  $xy - yx - [x, y] \in I_{\prec w}$ . もし  $y <_X x$  なら  $\sigma' := (y, x) \in \Sigma$  であり  $w_{\sigma'} = xy$  and  $f_{\sigma'} = yx - [y, x]$  なので,  $xy - yx - [x, y] = 1(w_{\sigma'} - f_{\sigma'})1$  with  $\text{length}(w_{\sigma'}) = 2 \leq 3 \leq \text{length}(w)$  で OK. □

以下では  $w = zyx$  とする. 先程の準備の番号 (1)–(6) を使い (全ての番号を使うわけではないが) 計算していく :

$$\begin{aligned}
& r_{1, \sigma, x}(zyx) - r_{z, \sigma', 1}(zyx) \\
&= yzx - [y, z]x - zxy + z[x, y] \\
&\stackrel{(5), (6)}{\equiv} (yxz - y[x, z]) - [y, z]x - (xzy - [x, z]y) - z[y, x] \\
&\stackrel{(1), (4)}{\equiv} ((xyz + [y, x]z) - y[x, z]) - [y, z]x - ((xyz + x[y, z]) - [x, z]y) - z[y, x] \\
&= (x[y, z] - [y, z]x) + ([x, z]y - y[x, z]) + (z[x, y] - [x, y]z) \quad (\because \text{反対称性}) \\
&\equiv [x, [y, z]] + [[x, z], y] + [z, [x, y]] \quad (\because \text{補題 4.7}) \\
&= [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \quad (\because \text{反対称性}) \\
&= 0 \quad (\because \text{Jacobi 恒等式}).
\end{aligned}$$

よって,  $r_{1, \sigma, x}(zyx) - r_{z, \sigma', 1}(zyx) \in I_{\prec w}$  がいえ,  $\preceq$ -解消! 以上から, 命題 4.6 が示された.

## 謝辞

前のバージョンで議論に誤りがり, 服部真宗氏 (名古屋大学) にご指摘いただき訂正しました. ここにお礼申し上げます.



## 参考文献

- [B] G. M. Bergman, The Diamond Lemma for Ring Theory, Advances in Math. **29**, pp.178–218 (1978).
- [V] V. S. Varadarajan, Supersymmetry for mathematicians: an introduction, Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. **11**, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, (2004).