帰納極限について

任意に可換体 $\Bbbk$ をとり固定する．簡単のため $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ とかく．

1　次数付き代数

定義 1.1.

> 環 A が **$\Bbbk$-代数** (**$\Bbbk$-algebra**) であるとは，与えられた環の加法に関して $\Bbbk$-ベクトル空間をなしており，次の両立条件をみたすもの：
>
> $$\forall c \in \Bbbk,\ \forall x, y \in A, \qquad c(xy) \ = \ (cx)y \ = \ x(cy)$$
>
> 基礎体を固定してある場合，単に**代数**という．

例えば，（n 次正方行列全体のなす）行列環 $\mathsf{Mat}_n(\Bbbk)$ は行列の演算で代数．また，多項式環 $\Bbbk[X]$ も多項式の演算で代数．

代数とは，環としてだけではなく，ベクトル空間（= 線型代数が存分に使える）としての構造も持つ，すごく調べやすい対象．例えば行列環は，n 次の行列単位[1] $E_{ij} := (\delta_{ik}\delta_{\ell j})_{k\ell}$ を用いれば，ベクトル空間として

$$\mathsf{Mat}_n(\Bbbk) \ = \ \bigoplus_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \Bbbk E_{ij}$$

となる（次元はモチロン n^2）．多項式環は

$$\Bbbk[X] \ = \ \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Bbbk X^i \qquad (= \{\sum_{i=0}^{n} c_i X^i \mid c_i \in \Bbbk,\, n \in \mathbb{N}_0\})$$

となる．

注意 1.2.

> ここのムゲンの意味は，基底 $\{X^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ で生成される，（無限次元）ベクトル空間という意味．単にベクトル空間としてしか見ていないから，巾乗 X^i も単なる記号にしか見ていない．積のコトを考えるときに意味を持つ（持たせる），というだけ．

行列環とは違い，多項式環の上記の直和分解は積とすごく相性がいい．実際，各 $i \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\Bbbk[X]$ の 1 次元部分空間

$$\Bbbk[X]^{(i)} \ := \ \Bbbk X^i \qquad (= \ \{cX^i \mid c \in \Bbbk\})$$

を考えたら，モチロン $\Bbbk[X] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Bbbk[X]^{(i)}$ と直和でかけていて，積は

$$\Bbbk[X]^{(i)} \cdot \Bbbk[X]^{(j)} \ = \ \Bbbk[X]^{(i+j)}$$

と，i, j の “和” として，また同じ $\Bbbk[X]^{(\bullet)}$ で記述できる．行列環は不可なことに注意．

この様に，積と上手くいっている直和分解を持つような代数に名前を付ける

---

[1] つまり，n 次正方行列で，どっかが 1 で他ゼロな行列

定義 1.3.

代数 A が **次数付き代数** (**graded algebra**) であるとは，部分空間たち $A^{(i)} \subset A$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ で，$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^{(i)}$ かつ，A の積に関して $A^{(i)}A^{(j)} \subset A^{(i+j)}$ をみたすものが存在するときを言う．

多項式環は上記のように次数付き代数．多変数の場合も同様に次数付き代数になる．その前に多変数多項式環を定義する．

定義 1.4.

不定元たち X_1, X_2 を固定．多項式環 $\Bbbk[X_1]$ は可換環であったことに注意すると，それ係数の多項式環

$$\Bbbk[X_1, X_2] \ := \ (\Bbbk[X_1])[X_2]$$

を考えることが可能．これを 2 変数多項式環という．帰納的に可換環 $\Bbbk[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ を考えることができ，これを多変数（いまは n）多項式環という．

もちろん多変数多項式環は自然に代数になる．ベクトル空間として

$$\Bbbk[X_1, X_2, \ldots, X_n] \ = \ \bigoplus_{i_1=0}^{\infty} \bigoplus_{i_2=0}^{\infty} \cdots \bigoplus_{i_n=0}^{\infty} \Bbbk X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

となる．さて，多変数多項式には斉次という概念があった．各 $i \in \mathbb{N}_0$ に対して，$f \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ が i **次斉次**であるとは，

$$\forall c \in \Bbbk, \qquad f(cX_1, \ldots, cX_n) \ = \ c^i f(X_1, \ldots, X_n)$$

をみたすときをいう．例えば $f(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + 4X_1X_2^2 + 17X_1X_2X_3$ は 3 次斉次多項式で，0 次斉次多項式は定数．そこで，各 $i \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(i)} \ := \ \{ f \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] \mid f \text{ は } i \text{ 次斉次多項式 } \} \ = \ \bigoplus_{i_1 + \cdots + i_n = i} \Bbbk X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

とおけば，これは明らかに $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ の部分空間で，$i \neq j$ ならば $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(i)} \cap \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(j)} = 0$ だから $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(i)}$ とわかる．明らかに i 次斉次多項式と j 次斉次多項式の積は $(i+j)$ 次斉次だから，

$$\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(i)} \cdot \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(j)} \quad \subset \quad \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]^{(i+j)}$$

となり，結局，多変数多項式環 $\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ は次数付き代数となる．

注意 1.5.

似た感じの分け方で，（総）次数を考えたくなるが，$\{ f \in \Bbbk[X] \mid \mathsf{deg}(f) = k \}$ は部分空間にならない．例えば $(1 + X + X^2) + (2X - X^2) = 1 + 3X$ だから．では $\{ f \in \Bbbk[X] \mid \mathsf{deg}(f) \leqslant k \}$ ならいいと思うが，そしたら，今度は直和に分けれないので NG．でもこれはこれで意味がある．それは次．

2 フィルター付き代数

先程の最後の注意にあったように，その固定した（総）次数以下の集合というのもある意味自然な対象で，ちゃんと全体をコントロールしてそう．名前がついてる．

定義 2.1.

代数 A が**フィルター付き代数 (filtered algebra)** であるとは，部分空間の列

$$0 \subset A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A$$

で，$A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ かつ，A の積に関して $A_k A_\ell \subset A_{k+\ell}$ をみたすものが存在するときを言う．

多項式環 $\Bbbk[X]$ は $\Bbbk[X]_k := \{f \in \Bbbk[X] \mid \mathsf{deg}(f) \leqslant k\}$ を考えれば[2)]，これでフィルター付きになる．

$$\Bbbk[X] \;=\; \bigcup_{k=0}^{\infty} \Bbbk[X]_k, \qquad \Bbbk[X]_k \cdot \Bbbk[X]_\ell \subset \Bbbk[X]_{k+\ell}.$$

多変数の場合も同様にして**総次数 (total degree)** でフィルターが付けれる．ここで，総次数は $0 \neq f = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$ に対して，

$$\mathsf{tdeg}(f) \;:=\; \mathsf{Max}\{i_1 + \cdots + i_n \mid c_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0\}$$

であった．例えば $2 + X_1 + X_1X_2 + 7X_1^2X_2$ なら総次数は $X_1^2X_2$ の箇所で見て $2 + 1 = 3$.

次は基本的である．証明はそのまんま．

命題 2.2.

次数付き代数 $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^{(i)}$ に対して，$A_k := \bigoplus_{i=0}^{k} A^{(i)}$ とおけば，これで A はフィルター付き代数になる．これを A の grading に付随する filtering という．

注意 2.3.

実はある意味で逆もいえて，フィルター付き代数 $A = \bigcup_k A_k$ が与えられたら，$G^{(i)} := A_i/A_{i-1}$ とおけば（ただし $A_{-1} := 0$），A の積から誘導される自然な積で，次数付き代数 $\mathsf{gr}(A) := \bigoplus_i G^{(i)}$ が自然に得られる．これを A の filtering に付随する grading という（俗に「A のグルをとる」という）．この $\mathsf{gr}(A)$ は時として A より扱いやすく，A の性質をよく反映している．今回の話には関係ないが.

さて，次数付きとフィルター付きの概念を導入したが，先程の命題からフィルター付きの方が，次数付きよりも上位互換であることが分かった．確かに情報としては次数付きの方が，直和分解を要請している分，よりその代数の構造に一歩踏み込んでいる．輪切りにしてピースを手に取ることができる感じ．一方で，フィルター付きの方は，内側から徐々に肉を詰めていく感じ．直接輪切りにできない代わ

[2)] ゼロ多項式の次数は $-\infty$ であったことに注意．つまり $\forall k,\ 0 \in \Bbbk[X]_k$.

りに「ずっと向こう」というのを，内側の有限的なところから，攻めていける（構成できる）という利点がある．

先にコンセプトだけ言うと，無限変数というものの定義は，有限変数の「ずーっといった先」と考えるのが自然なので，このフィルトレーション的な考え方で構成して見せる．しかし大問題として，「ずーっといった先」は，ある大きなハコが決まっていて，その中での話（部分空間という言葉は，それが入っているベクトル空間が必要）．ハコがないのに行った先という言葉は意味をなさない．

次に，そのハコを構成をするための道具を説明する．

3 加群の帰納極限 (inductive limit)

一般に，A を代数として，A-加群たち M_k $(k \in \mathbb{N}_0)$ が与えられたとする．これだけではお互い独立しているが，各 $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ with $k \leqslant \ell$ に対して，A-加群射（:= A-加群準同型）たち $f_{k\ell} : M_k \to M_\ell$ が存在していると仮定する（つまり相互関係を入れる）．ただし $f_{kk} = \mathsf{id}_{M_k}$ としておく．

以下では，これが次の条件を満たすとする[3)]：

$$k \leqslant \ell \leqslant m \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{tikzcd} M_k \arrow[rr, "f_{k\ell}"] \arrow[dr, "f_{km}"'] & \circlearrowright & M_\ell \arrow[dl, "f_{\ell m}"] \\ & M_m & \end{tikzcd}$$

ニュアンスとしては，M_k たちが，順序の推移律を保ちながら，ちゃんと並んでいるという感じ（もちろん M_k たちに包含関係はないからこれはいいすぎだが）．これからさらに色を付けていく．

外部直和として $\bigoplus_k M_k$ を考えることはできる．モノとしては

$$\bigoplus_k M_k \ := \ \{(x_k)_k \in \prod_k M_k \mid \ \text{非ゼロな}\ x_k\ \text{は有限個}\ \}$$

で，当たり前に（成分ごとの演算で）A-加群になる．但し，簡単のために直積集合は $\mathbb{N}_0$ の順序で並べておく（つまり $\bigoplus_k M_k = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots$）．各 k に対して，自然な包含写像

$$i_k \ : \ M_k \longrightarrow \bigoplus_k M_k; \quad x_k \longmapsto (0, \ldots, 0, x_k, 0, \ldots)$$

を考えることができる（あたりまえだが，単射に注意）．

さて，色を付ける[4)]ために，次の集合で生成される $\bigoplus_k M_k$ の A-部分加群 N を考える：

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{ i_k(x_k) - i_\ell(f_{k\ell}(x_k)) \mid x_k \in M_k,\ k \leqslant \ell \}$$

これで割ったものを

$$\varinjlim_k M_k \ := \ (\bigoplus_k M_k)/N$$

[3)] 矢印 $\circlearrowright$ は図式が可換であることを意味し，式で書けば $f_{km} = f_{\ell m} \circ f_{k\ell}$ ということ．でも式だけではどこからどこへかが分からないから図式で書く．

[4)] 例えば $\mathbb{R}[X]$ を $X^2 + 1$ で生成されるイデアルで割ったら，複素数っぽい色が出るような感覚．何かで割ることは，関係式を入れているということ．

とかき M_k たちの**帰納極限** (**inductive limit**) や[5)]，**順極限** (**direct limit**) という．

ニュアンスとしては，N で割ったということなので，与えられた k より先の ℓ では（つまり M_ℓ では），伝達係 $f_{k\ell}$ を通して一直線に並んでいるとみなせれるという感じ．ちゃんと言うと，剰余加群の中で元を $\overline{x} := x + N$ と書くことにすると，任意の $k \in \mathbb{N}_0$ と元 $x_k \in M_k$ に対して

$$k \leqslant \forall \ell, \quad \overline{i_k(x_k)} \ = \ \overline{i_\ell(f_{k\ell}(x_k))}$$

が成立しているような場所が $\varinjlim_k M_k$ である．

以下で，いろんな性質を見ていくことで感覚を確かにする．まず，自然な射影 $\pi : \bigoplus_k M_k \longrightarrow (\bigoplus_k M_k)/N; x \mapsto \overline{x}$ との合成として

$$f_k \ := \ \pi \circ i_k \ : \ M_k \longrightarrow \varinjlim_k M_k; \qquad x_k \longmapsto \overline{i_k(x_k)}$$

とおく．以下が成立する[6)]：

命題 3.1.

(1) $k \leqslant \ell \Longrightarrow f_k = f_\ell \circ f_{k\ell}$.

(2) $\forall \overline{x} \in \varinjlim_k M_k$, $\exists k \in \mathbb{N}_0$, $\exists x_k \in M_k$ s.t. $\overline{x} = f_k(x_k)$.

(3) $x_k \in M_k$ $[f_k(x_k) = 0 \Longrightarrow k \leqslant \exists \ell$ s.t. $f_{k\ell}(x_k) = 0]$.

$\because$ これらを示すという行為で，$\varinjlim_k M_k$ の正体を知るという感じ．なぜ N はああいう定義なのかとかそういうのは，証明することで理解ができる．

(1) これは単純で，任意の $x_k \in M_k$ に対して

$$\begin{aligned} f_\ell(f_{k\ell}(x_\ell)) &= i_\ell(f_{k\ell}(x_\ell)) + N \qquad (\because \ f_\ell \text{ の定義}) \\ &= i_k(x_\ell) + N \qquad (\because \ k \leqslant \ell \text{ と } N \text{ の定義}) \\ &= f_k(x_k) \qquad (\because \ f_k \text{ の定義}) \end{aligned}$$

となるから O.K.

(2) まず $x \in \bigoplus_k M_k$ なので，定義から有限個の元で $x = \sum_{k=0}^n i_k(x_k)$ とかけている（$x_k \in M_k$）．するとより大きい $n < m$ で（$m = n+1$ で十分）考えれば，

$$\begin{aligned} \overline{x} = x + N &= \sum_{k=0}^n i_k(x_k) + N \qquad (\because \ x \text{ の表示}) \\ &= \sum_{k=0}^n i_m(f_{km}(x_k)) + N \qquad (\because \ k \leqslant m \text{ と } N \text{ の定義}) \end{aligned}$$

[5)] 正確には M_k と $f_{k\ell}$ の．

[6)] 言葉でいうと，(1) は情報伝達係 $f_{k\ell}$ と仲良し，(2) は帰納極限の元はしょせん，有限なところから f_k で引っ張ってこれる．(3) は帰納極限でゼロなら，ずっと行った先のどこかでもゼロ．

$$= i_m(\sum_{k=0}^{n} f_{km}(x_k)) + N \qquad (\because \text{ 線型性})$$

$$= f_m(\sum_{k=0}^{n} f_{km}(x_k)) \qquad (\because\ f_m \text{ の定義})$$

となるので，これでよい．

(3) 仮定から $i_k(x_k) \in N$ ということなので，$\exists \alpha_s \in A, \exists d_s \in \bigcup_k \{\cdots\}$ s.t. $i_k(x_k) = \sum_s \alpha_s d_s$ の形．この表示ではなにも手に着かないので，より詳しく分け直す．添え字集合の $\mathbb{N}_0$ は整列集合なので一直線に並べられる．いま $i_k(x_k)$ つまり k が知りたいので，(a) それ以前と (b) それ以降と (c) その他の 3 つに $\sum_s \alpha_s d_s$ をリネーム（記号を改めて）して分けておく：

(a) $S_1 := \sum_i \alpha_i(i_k(y_{k_i}) - i_{\ell_i} f_{k\ell_i}(y_{k_i}))$ with $\alpha_i \in A$, $y_{k_i} \in M_k$, $k \leqslant \ell_i$.
(b) $S_2 := \sum_j \beta_j(i_{p_j}(z_{p_j}) - i_k f_{p_j k}(z_{p_j}))$ with $\beta_j \in A$, $z_{p_j} \in M_{p_j}$, $p_j \leqslant k$.
(c) $S_3 := \sum_i \sum_j \gamma_{ij}(i_{p_j}(w_{p_j}) - i_{\ell_i} f_{p_j \ell_i}(w_{p_j}))$ with $\gamma_{ij} \in A$, $w_{p_j} \in M_{p_j}$.

such that $S_1 + S_2 + S_3 = \sum_s \alpha_s d_s$．モチロン最後の S_3 は調整項で，$\sum_s \alpha_s d_s = i_k(x_k)$ だから $S_1 + S_2$ で，i_k 以外のところ i_{ℓ_i}, i_{p_j} が出てきてるからそれを打ち消す役目の項．さて $S_1 + S_2 + S_3 = i_k(x_k)$ の目で見たら，片々比較して消えているところなどが出てくる[7]ので，以下の関係式たちを得る：

(i) $i_k(x_k) = \sum_i \alpha_i i_k(y_{k_i}) - \sum_j \beta_j i_k f_{p_j k}(z_{p_j})$.
(ii) $0 = -\sum_i \alpha_i i_{\ell_i} f_{k\ell_i}(y_{k_i}) - \sum_i \sum_j \gamma_{ij} i_{\ell_i} f_{p_j \ell_i}(w_{p_j})$.
(iii) $0 = \sum_j \beta_j i_{p_j}(z_{p_j}) + \sum_i \sum_j \gamma_{ij} i_{p_j}(w_{p_j})$.

さらに $i \neq i' \Longrightarrow \ell_i \neq \ell_{i'}$ などと取っておいたんだと言っておけば，

(i)' $x_k = \sum_i \alpha_i y_{k_i} - \sum_j \beta_j f_{p_j k}(z_{p_j})$.
(ii)' $\forall i, 0 = \alpha_i f_{k\ell_i}(y_{k_i}) + \sum_j \gamma_{ij} f_{p_j \ell_i}(w_{p_j})$.
(iii)' $\forall j, 0 = \beta_j z_{p_j} + \sum_i \gamma_{ij} w_{p_j}$.

となる．さて，$\ell := \mathsf{Max}\{\ell_i\}$ とでも取って，(i)' の両辺に $f_{k\ell}$ を施すと

$$\begin{aligned}
f_{k\ell}(x_k) &= \sum_i \alpha_i f_{k\ell}(y_{k_i}) - \sum_j \beta_j f_{k\ell} f_{p_j k}(z_{p_j}) \\
&= \sum_i \alpha_i f_{k\ell}(y_{k_i}) - \sum_j \beta_j f_{p_j \ell}(z_{p_j}) \quad (\because p_j \leqslant k \leqslant \ell \text{ かつ } f_{\bullet,\star} \text{ の定義}) \\
&= \sum_i \alpha_i f_{\ell_i \ell} f_{k\ell_i}(y_{k_i}) - \sum_j \beta_j f_{p_j \ell}(z_{p_j}) \quad (\because \ell_i \leqslant \ell \text{ かつ } f_{\bullet,\star} \text{ の定義}) \\
&= -\sum_i f_{\ell_i \ell}(\sum_j \gamma_{ij} f_{p_j \ell_i}(w_{p_j})) - \sum_j \beta_j f_{p_j \ell}(z_{p_j}) \quad (\because \text{(ii)'}) \\
&= -\sum_j \big(\sum_i \gamma_{ij} f_{p_j \ell}(w_{p_j}) + \beta_j f_{p_j \ell}(z_{p_j})\big) \quad (\because \text{整理})
\end{aligned}$$

[7] もちろん $i_\bullet$ どもの行先は直和 $\bigoplus_k M_k$ なので，成分で比較して同じ添え字と違う添え字で分離するという意味.

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_j f_{p_j\ell}\Big(\sum_i \gamma_{ij} w_{p_j} + \beta_j z_{p_j}\Big) \quad (\because \text{整理}) \\
&= 0 \quad (\because \text{(iii)'})
\end{aligned}
$$

できた. □

これらから，$\varinjlim_k M_k$ で一致していれば，もとの空間で「ずーっと先で一致」している事が言える：

系 3.2.

任意の $x_k \in M_k, x_\ell \in M_\ell$ に対して，

$$f_k(x_k) = f_\ell(x_\ell) \quad \Longrightarrow \quad k, \ell \leqslant \exists m \quad \text{s.t.} \quad f_{km}(x_k) = f_{\ell m}(x_\ell)$$

∵ 大小に関して $k \leqslant \ell$ としても一般性を失わない[8]．すると

$$
\begin{aligned}
0 &= f_\ell(x_\ell) - f_k(x_k) \qquad (\because \text{仮定から}) \\
&= \overline{i_\ell(x_\ell)} - \overline{i_k(x_k)} \qquad (\because f_\bullet \text{ の定義}) \\
&= \overline{i_\ell(x_\ell)} - \overline{i_\ell f_{k\ell}(x_k)} \qquad (\because k \leqslant \ell \text{ と } N \text{ の定義}) \\
&= \overline{i_\ell(x_\ell - f_{k\ell}(x_k))} \qquad (\because \text{剰余加群での和と } i_\ell \text{ の線型性}) \\
&= f_\ell(x_\ell - f_{k\ell}(x_k)) \qquad (\because f_\bullet \text{ の定義})
\end{aligned}
$$

となるから，先ほどの命題より $\ell \leqslant \exists m$ s.t. $f_{\ell m}(x_\ell - f_{k\ell}(x_k)) = 0$ となる．あとは，移項して $f_{\ell m} f_{k\ell} = f_{km}$ に注意すればよい． □

この新しく作った $\varinjlim_k M_k$ with $f_k : M_k \to \varinjlim_k M_k$ はいわゆる universal property をもつ[9]：

命題 3.3.

もし別の A-加群 L と射 $g_k : M_k \to L$ たちで，任意の $k \leqslant \ell$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
M_k \arrow[rr, "f_{k\ell}"] \arrow[dr, "g_k"'] & \circlearrowright & M_\ell \arrow[dl, "g_\ell"] \\
& L &
\end{tikzcd}
$$

をみたすものがあれば，ただ一つの A-加群射 $h : \varinjlim_k M_k \to L$ が存在して，任意の k に対して

$$
\begin{tikzcd}
M_k \arrow[d, "f_k"'] \arrow[dr, "g_k"] & \\
\varinjlim_k M_k \arrow[r, dashed, "h"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & L.
\end{tikzcd}
$$

（慣習として，存在する射は点線でかく.）

[8] これは数学用語で，逆 $\ell \leqslant k$ だとしても同じ証明方法が使えるからパスするよという宣言.

[9] 適当にあり合わせで作ったわけではなくて，欲しかったこの性質を持つものはこれただ一つ，という意味.

$\because$ まず先ほどの命題より，任意の $\overline{x} \in \varinjlim_k M_k$ に対して，$\exists k, \exists x_k \in M_k$ s.t. $\overline{x} = f_k(x_k)$ なのであったから，主張のが可換図式になるように設定されるべきなので，$h(\overline{x}) := g_k(x_k)$ と定義されるべき．

さてこれが well-defined を言わねばならぬ．つまり，別ので $f_\ell(x_\ell) = \overline{x} = f_k(x_k)$ となっていた時に，$g_\ell(x_\ell) = g_k(x_k)$ を言わねばならぬ．

先の系より，適当な $k, \ell \leqslant m$ で $f_{\ell m}(x_\ell) - f_{km}(x_k) = 0$ となる．すると

$$\begin{aligned} g_k(x_k) &= g_m f_{km}(x_k) \qquad (\because k \leqslant m \text{ と仮定}) \\ &= g_m f_{\ell m}(x_\ell) \qquad (\because \text{さっきのこと}) \\ &= g_\ell(x_\ell) \qquad (\because \ell \leqslant m \text{ と仮定}) \end{aligned}$$

でオシマイ．射 h の一意性も構成から明らか． $\square$

注意 3.4.

universal property を持つとき，それは（モノが存在すれば）同型を除いて一意的であることが，一般に言えている．実際，さっきの記号で (L, g_k) が universal property を持つとすれば，今度は $(\varinjlim_k M_k, f_k)$ の方をお客さんと見れば，$\exists! h' : L \to \varinjlim_k M_k$ で例の図式を可換にするものがただ一つ存在する．他方で，当たり前に $\mathrm{id} : \varinjlim_k M_k \to \varinjlim_k M_k$ も例の図式を可換にするのだから，一意性から結局は $h \circ h' = \mathrm{id}$ を強いる．全く同様に $\mathrm{id} : L \to L$ でも考えれば $h' \circ h = \mathrm{id}$ を強いるので，総じて h は全単射．つまり $L \cong \varinjlim_k M_k$．テンソルを作るときも同じ感じで，所望の性質を持つモノで universal property をもつものとして実現される．

いまは構成的に $\varinjlim M_k$ を作ったが，射と可換図式だけで結局はその物体の性質を論じることができる（但し，それをみたすものが存在することを言うには，今のように構成して見せる必要が一回ある）．こういうのを圏論という．具体的なモノではなく機能に着目する．

以上でハコ $\varinjlim M_k$ が作れたことになる！例えば，逆にハコが最初からあった場合，ちゃんと今作ったやつになっているか不安．実際それは OK で次が成り立つ：

補題 3.5.

A-加群 M をとり固定する．このとき，M の部分加群たち $\{M_k\}_k$ で，$k \leqslant \ell$ なら $i_{k\ell} : M_k \hookrightarrow M_\ell$ と包含関係のあるものを適当に考える．さらに，次をみたすと仮定する：

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}_0, \quad \exists m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{s.t.} \quad M_k + M_\ell \subset M_m$$

すると，帰納極限が考えられ，次が成立する：

$$\varinjlim_k M_k \;\cong\; \sum_k M_k \;=\; \bigcup_k M_k.$$

$\because$ まず $\sum_k M_k = \bigcup_k M_k$ は，仮定より右辺が加群になっているので O.K. 次に $\varinjlim_k M_k \cong \sum_k M_k$ を universality を用いて示す．そのために $L := \sum_k M_k$ と，自然な包含 $\iota_k : M_k \hookrightarrow L$ を考えれば，ペ

ア (L, ι_k) に関して，universal property から $\exists ! h : \varinjlim_k M_k \to L$ で例の図式

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[d, "f_k"'] \arrow[dr, "\iota_k"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"', near end] & \\ \varinjlim_k M_k \arrow[r, "h"'] & L. \end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在する．このとき

- h は全射：任意の $\sum_k x_k \in \sum_k M_k$ に対して，$\sum_k x_k = \sum_k \iota_k(x_k) = \sum_k h(f_k(x_k)) = h(\sum_k f_k(x_k))$.
- h は単射：任意の $\overline{x} \in \mathsf{Ker}(h)$ に対して，少なくとも $\overline{x} \in \varinjlim_k M_k$ だから，$\exists k, \exists x_k \in M_k$ s.t. $\overline{x} = f_k(x_k)$ の形．すると，$0 = h(\overline{x}) = hf_k(x_k) = \iota_k(x_k)$ より $x_k = 0$.

だから h は同型. $\square$

この設定で $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ なわけだから，最初に行った filtration の事になっている．つまりだいぶ一般化した感じ．これで「ずーっと行った先」と言っていた意味が分かると思う．

4 より一般の定義

構成を反省してみると，加群ども M_k の順序関係，つまり $\mathbb{N}_0$ の順序がキーだった．よってここを若干変更（一般化）しても，そのまま以上の議論を通すことができる．そのために言葉を.

非空な集合 Λ 上の二項関係 $\leqslant$ が,

$$\begin{aligned} &（反射律）\forall \lambda \in \Lambda,\ \lambda \leqslant \lambda\ , \\ &（反対称律）\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ [[[\lambda \leqslant \mu] \wedge [\mu \leqslant \lambda]] \Longrightarrow \lambda = \mu]\ , \\ &（推移律）\forall \lambda, \mu, \nu \in \Lambda,\ [[[\lambda \leqslant \mu] \wedge [\mu \leqslant \nu]] \Longrightarrow \lambda \leqslant \nu] \end{aligned}$$

をみたすとき，組 $(\Lambda, \leqslant)$ を**半順序集合 (partially ordered set, poset)** という．そもそも二項関係とは単に直積集合 $\Lambda \times \Lambda$ の部分集合として考えればよい（むしろ定義）.

注意 4.1.

余談だが，もしさらに

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ [[\lambda \leqslant \mu] \vee [\mu \leqslant \lambda]]$$

が成り立つとき (つまりどれも比較可能)，**全順序集合 (totally ordered set)** という．例えば，今までの $(\mathbb{N}_0, \leqslant)$ は全順序．固定された集合 X の部分集合の関係 (包含関係) に関して，$(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ は半順序であり全順序ではない．他方，$\mathbb{Z}$ での整除関係 $x|y$ は，反射律・推移律をみたすが，$3| -3 \wedge -3|3$ but $3 \neq -3$ だから反対称律をみたさない．モチロン全順序性も NG.

さて，半順序集合 $(\Lambda, \leqslant)$ が与えられたとき，これは次のようにして圏をなす：

（対象）Λ の元すべて.

（射）$\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して，#Hom$(\lambda, \mu) = 0(\text{if } \lambda \not\leqslant \mu), = 1(\text{if } \lambda \leqslant \mu)$．射の合成は推移律のまま．

このとき，帰納極限の最初の条件 $(M_k, f_{k\ell})$ は，単に「この圏 $(\Lambda, \leqslant)$ から A-加群の圏 A-Mod への（共変）関手[10)]が与えられたとせよ」に他ならない．実際，関手 $\Phi : (\Lambda, \leqslant) \to A$-Mod が与えられたとき，その定義から，次が成立する：

$$
\begin{tikzcd}
\lambda \arrow[r, phantom, "\leqslant"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mu \\
& \nu
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\Phi(\lambda) \arrow[rr, "\Phi(\leqslant)"] \arrow[dr, "\Phi(\leqslant)"'] & \circlearrowright & \Phi(\mu) \arrow[dl, "\Phi(\leqslant)"] \\
& \Phi(\nu) &
\end{tikzcd}
$$

（左図で $\lambda \leqslant \nu$，$\mu \leqslant \nu$）

モチロン Hom$(\lambda, \lambda) = \{\mathrm{id}\}$ も OK. 今までの話しだと，$(\Lambda, \leqslant) = (\mathbb{N}_0, \leqslant)$ として，$\Phi(k) = M_k$ としたものに過ぎないと分かった！

さて，この枠組みで帰納極限を構成するにはさらに「どれよりもずっと向こうに何かとれる」という仮定が必要．半順序集合 $(\Lambda, \leqslant)$ に対して，さらに次の "上界" 条件が成り立つものを**有向集合 (directed set)** あるいは**フィルター付き集合 (filtered set)** という（定義によっては，反対称律がない場合もあるので注意）：

（上界律）$\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \exists \nu \in \Lambda \text{ s.t. } [\lambda \leqslant \nu] \wedge [\mu \leqslant \nu]$

例えば，今までの $(\mathbb{N}_0, \leqslant)$ や $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ は，それぞれ Max や和集合というのを考えればよいので，有向集合．

これらの仮定のもとで，関手 $\Phi : (\Lambda, \leqslant) \to A$-Mod が与えられたとき，$\varinjlim_\lambda \Phi(\lambda) \in A$-Mod が前セクションと全く同じように構成可能である．

5 代数の場合

今までは，環（代数）を固定して，その加群でずっと考えてきた．正確には加群の圏で考えてきた．ときにはさらに積構造が入っているときを考えたくなる．つまり基礎体を固定して代数の圏で考えたくなる．

今までの M_k として，$\Bbbk$-代数 A_k を考え，加群準同型として，代数準同型 $f_{k\ell} : A_k \to A_\ell$ を考える．加法にだけ着目すれば単に $\Bbbk$-加群（= ベクトル空間）というだけの事なので，今までの話が使える．つまり $\Bbbk$-加群 $\varinjlim_k A_k$ を構成することは可能．これに積を入れたい．

任意の $\overline{x}, \overline{y} \in \varinjlim_k A_k$ に対して，命題 3.1 から $\exists x_k \in A_k$, $\exists y_\ell \in A_\ell$ s.t. $\overline{x} = f_k(x_k)$, $\overline{y} = f_\ell(y_\ell)$ であった．そこで，$k, \ell \leqslant m$ を適当にとり固定したものに対して，

$$\overline{x} \cdot \overline{y} \ := \ f_m(f_{km}(x_k)\, f_{\ell m}(y_\ell))$$

とおきたい．

[10)] 矢印を保つような，写像のもうひとつ大きいクラス．行く前の圏で $f : A \to B$ のとき，行った先の圏で $\Phi(f) : \Phi(A) \to \Phi(B)$ となっていて，さらに合成を保つような感じのやつ．

補題 5.1.

これは well-defined.

∵まず m の取り方によらないことを言う．もっと大きい $m \leqslant m'$ をとってしまっていた場合，

$$\begin{aligned} f_m(f_{km}(x_k)\, f_{\ell m}(y_\ell)) &= f_{m'} f_{mm'}\big(f_{km}(x_k)\, f_{\ell m}(y_\ell)\big) && (\because \varinjlim_k \text{ を定義したあたりの話}) \\ &= f_{m'}\big(f_{mm'}(f_{km}(x_k))\, f_{mm'}(f_{\ell m}(y_\ell))\big) && (\because f_{\bullet,\star} \text{ は代数射，特に積を保つ}) \\ &= f_{m'}(f_{km'}(x_k)\, f_{\ell m'}(y_\ell)) \end{aligned}$$

と同じくなるのだから，OK.

次に代表元の取り方によらないことを言う．もし $\overline{x} = \overline{x'}$ & $\overline{y} = \overline{y'}$ だったとする．これらも $\overline{x'} = f_{k'}(x_{k'})$, $\overline{y'} = f_{\ell'}(y_{\ell'})$ とかけてるとする（$x_{k'} \in A_{k'}$, $y_{\ell'} \in A_{\ell'}$）．このとき，系 3.2 から，$k, k' \leqslant \exists m$ & $\ell, \ell' \leqslant \exists n$ s.t.

$$f_{km}(x_k) = f_{k'm}(x_{k'}) \quad \& \quad f_{\ell n}(y_\ell) = f_{\ell' n}(y_{\ell'})$$

となる．そこで $p := \mathsf{Max}\{m, n\}$ とでもすれば，これらの両辺にそれぞれ f_{mp}, f_{np} を施したら，

$$f_{kp}(x_k) = f_{k'p}(x_{k'}) \quad \& \quad f_{\ell p}(y_\ell) = f_{\ell' p}(y_{\ell'})$$

となる．よって，これで置換えて，先ほどの大きな m' でも考えておけばよい． □

さて，これで $\varinjlim_k A_k$ に和と積が定まった．あとはこれらが環の性質（結合律や分配律）やスカラー倍との両立を言わなければならないが，積や和の定義を考えると，全然そのままで考えている（ねじったり変なことをしていない）ので，当たり前に成立する．従って，これで $\varinjlim_k A_k$ は代数になる．