群と表現の話

Taiki Shibata*

2019 年 10 月 30 日 〜 2019 年 11 月 2 日
@ 筑波大学

概要

群は対称性の記述をはじめとして数学のいたるところに顔を出す．群を表現するとは，抽象的でありイメージが掴みにくい群を，よく理解している行列の言葉（線形代数）で「表現」するということである．群そのものを見るよりずっと広い世界でものを考えることができるという利点がある．

本講義は群の定義から始めて，群の表現をさまざまな例を通して理解することを目的とする．特に，表現の指標という概念を導入し，有限群の表現を研究する際にこの指標が強力な道具になることを見る．リー群やリー代数の表現の初歩についても触れる．

このノートは講義でもお話ししていないことを追加した増補版です．不定期にアップデートしたり，間違いがたくさんあったりすると思いますので，ご利用の際はくれぐれもご注意ください．

* Okayama University of Science

目次

1　定義と例

1.1　群の話

まずは群の復習からはじめる．

定義 1.1.

集合 G と写像 $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh$ が与えられたとする．以下の条件をみたすとき G を**群**とよぶ：

(1) 結合法則：$\forall g,h,k \in G$, $(gh)k = g(hk)$．これより ghk とかいても make sense.
(2) 単位元：$\exists e \in G$ s.t. $\forall g \in G$, $ge = g = eg$.
(3) 逆元：$\forall g \in G$, $\exists h \in G$ s.t. $gh = e = hg$.

特に G が有限集合（$\# G < \infty$）のとき**有限群**という．

命題 1.2.

群 G に対して，

- 定義の (2) において，e の存在はただ一つ．
- 定義の (3) において，h は g に対して，ただ一つ．これを $h = g^{-1}$ とかく．

Proof. もし $e' \in G$ が (2) をみたしたら，$e' = ee' = e$．もし $h' \in G$ が (3) をみたしたら，$h' = h'e = h'(gh) = (h'g)h = eh = h$. □

定義 1.3.

G を群とする．

- G の部分集合 H が**部分群**であるとは，以下の条件をみたすときをいう：
  (1) $\forall x,y \in H$, $xy \in H$.
  (2) $e \in H$.
  (3) $\forall x \in H, x^{-1} \in H$.
- G の部分群 N が**正規部分群**であるとは，$\forall g \in G, \forall x \in N$, $gxg^{-1} \in N$ をみたすときをいう．

群 G の部分群 H を固定する．このとき $g \sim g' \Leftrightarrow \exists h \in H$ s.t. $g' = gh$ は同値関係となり，同値類全体の集合（剰余集合）を

$$G/H \ := \ \{gH \mid g \in G\}$$

とかく．集合 G/H の個数（濃度）を G における H の**指数**といい $(G:H)$ とかく．いま $\Lambda := G/H$ とおくとき，各 $\lambda \in \Lambda$ に対して選択公理により代表系 $\{g_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が選べて（有限群の場合は不要），

$G = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda H$ (disjoint union) と分解できる．これを**左剰余類分解**という．

注意 1.4.

一般的な注意を．

(1) 具体的には写像 $G \to \Lambda = G/H; g \mapsto [g] := \{x \in G \mid g \sim x\} = gH$ が全射だから $\lambda \in \Lambda$ に対して，$X_\lambda := \{g \in G \mid [g] = \lambda\} \neq \varnothing$．すると選択公理から直積集合に関して $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \varnothing$ とわかり，元 $(g_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ がとれる．これで $G = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}[g_\lambda]$ となる．

(2) 右剰余類分解 $g \sim' g' :\iff \exists h \in H$ s.t. $g' = hg$ での分解 $H\backslash G = \{Hg' \mid g \in G\}$ with $G = \bigsqcup_\mu Hg'_\mu$ も考えられる．このとき

$$G/H \longrightarrow H\backslash G; \quad gH \longmapsto Hg^{-1}$$

が全単射であることが分かる．従って，指数 $(G : H)$ の定義は右左関係ない．

この分解（と $\#H = \#g_\lambda H$）から **Lagrange の定理**

$$\#G \;=\; (G : H)\cdot \#H$$

が導かれる．但し G が無限集合の場合は，濃度の意味の積.

例 1.5.

$g \underset{\text{conj}}{\sim} g' :\iff \exists x \in G$ s.t. $g' = xgx^{-1}$ としたら G 上の同値関係．このときの同値類を

$$g^G \;:=\; \{xgx^{-1} \mid x \in G\}$$

とかき，g の**共役類 (conjugacy class)** と呼ぶ．各 g を固定するごとに全射 $G \to g^G; x \to xgx^{-1}$ が定義できる．いま

$$C_G(g) \;:=\; \{x \in G \mid xg = gx\}$$

は G の**中心化群 (centralizer)** と呼ばれ，G の部分群となり，剰余集合 $G/C_G(g)$ が考えられる．すると先のから誘導される $G/C_G(g) \to g^G$ は全単射となる．もし G が有限群だったら，これから

$$\#G \;=\; \#C_G(g)\cdot \#g^G$$

が成立する．当たり前だが $C_G(e) = G, e^G = \{e\}$ に注意する．

特に G の正規部分群 N に対して，G/N には自然な積 $(gN)(hN) := (gh)N$ が well-defined に定まり，これで群をなす．これを**剰余群**というのだった.

例 1.6.

群の例を以下に列挙する：

(1) **巡回群**：無限なものは $\mathbb{Z}$．有限なものについては,

(a) 加法的に書くときは $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$,

(b) 乗法的に書くときは $C_n = \{e^{k\pi\sqrt{-1}/n} \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$.

(2) **対称群** S_n. 例えば $S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$ と表記する.

(3) **交代群** $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathsf{sgn}(\sigma) = 1\}$.

(4) **一般線型群** $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \mathsf{det}A \neq 0\}$.

(5) **特殊線形群** $\mathsf{SL}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \mathsf{det}A = 1\}$.

(6) **直交群** $\mathsf{O}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid {}^tAA = E_n\}$（$E_n$ は単位行列）

(7) **回転群** $\mathsf{SO}_n(\mathbb{C}) = \mathsf{SL}_n \cap \mathsf{O}_n(\mathbb{C})$

(8) $ax+b$ **群** $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{Mat}_2(\mathbb{C}) \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$

(9) 単位元 1 をもつ（可換とは限らない）環 R の**乗法群**

$$R^\times \;:=\; \{u \in R \mid \exists v \in R \text{ s.t. } uv = 1 = vu\}.$$

例えば $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathsf{GL}_1(\mathbb{C})$ とか，$\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})^\times = \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ とか.

定義 1.7.

群 G, G' について，写像 $\varphi : G \to G'$ が**群準同型**であるとは $\forall g, h \in G,\ \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ をみたすときをいう．全体を $\mathsf{Hom}_{\mathsf{grp}}(G, G')$ とかく．もし φ が全単射なら**群同型**といい，$G \cong G'$ とかく．

自動的に $\varphi(e) = e'$ および $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ が成り立つことに注意（$e' \in G'$ は単位元)．実際，最初のは $\varphi(e) = \varphi(ee) = \varphi(e)\varphi(e)$ でキャンセルでき，次のは $e' = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$ から逆元になってることが分かる.

命題 1.8.

群準同型 $\varphi : G \to G'$ に対して，**像** $\mathsf{Im}(\varphi) := \{\varphi(g) \mid g \in G\}$ および，**核** $\mathsf{Ker}(\varphi) := \{x \in G \mid \varphi(x) = e'\}$ はいずれも部分群．特に $\mathsf{Ker}(\varphi)$ は正規部分群.

Proof. 部分群であることは自明．正規であることは，$\forall g \in G, x \in \mathsf{Ker}(\varphi)$ に対して，

$$\varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(x)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e) = e'$$

より $gxg^{-1}\mathsf{Ker}(\varphi)$. □

単射の簡単な判定法がある：

命題 1.9.

群準同型 $\varphi : G \to G'$ に対して，φ が単射 $\iff$ $\mathsf{Ker}(\varphi) = \{e\}$.

Proof. ($\Longrightarrow$) 任意の $x \in \mathsf{Ker}(\varphi)$ に対して，$\varphi(x) = e' = \varphi(e)$ だから，仮定より $x = e$. ($\Longleftarrow$) $\varphi(g) = \varphi(h)$ のとき，$e' = \varphi(g)\varphi(h)^{-1} = \varphi(gh^{-1})$ なので，仮定より $gh^{-1} = e \therefore g = h$. □

次は，いわゆる準同型定理である：

命題 1.10 (群準同型定理)**.**

群準同型 $\varphi : G \to G'$ に対して，$G/\mathsf{Ker}(\varphi) \cong \mathsf{Im}(\varphi);\ g\,\mathsf{Ker}(\varphi) \mapsto \varphi(g)$ は群同型.

Proof. 写像が well-defined かつ単射であることは,

$$\varphi(g) = \varphi(h) \iff gh^{-1} \in \mathsf{Ker}(\varphi) \iff gh^{-1}\,\mathsf{Ker}(\varphi) = \mathsf{Ker}(\varphi) \iff g\,\mathsf{Ker}(\varphi) = h\,\mathsf{Ker}(\varphi)$$

より従い，全射および群準同型は明らか. □

例 1.11.

準同型と準同型定理の例たち：

(1) $\mathsf{sgn} : S_n \to C_2 = \{\pm 1\}; \sigma \mapsto \mathsf{sgn}(\sigma)$ は準同型で，$n \geqslant 2 \Longrightarrow S_n/A_n \cong C_2$.

(2) $\mathsf{det} : \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times; A \mapsto \mathsf{det}(A)$ は準同型で，$\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})/\mathsf{SL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$.

実は，任意の有限群は対称群の部分として実現可能である：

命題 1.12 (Cayley の定理)**.**

$\forall G$:有限群，$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $G \leqslant S_n$.

Proof. まず $n := \#G$ とおくとき，

$$\varphi : G \longrightarrow \mathsf{Bij}(G)\ :=\ \{\ G \text{ から } G \text{ への全単射な写像 }\};\quad g \longmapsto (x \mapsto gx)$$

が群準同型であることは容易にわかる．つぎに $\varphi(g) = \mathsf{id}_G \iff \forall x \in G,\ gx = x \iff g = e$ だから，この φ は単射．よって準同型定理から $G \cong \mathsf{Im}(\varphi) \leqslant \mathsf{Bij}(G) \overset{\text{def}}{=} S_n$. □

注意 1.13.

例えば，示し方の通りに実現すると $S_m \leqslant S_{m!}$ となるから，このままでは一般には使えぬ... しかし，これから「位数 n の群は同型を除き有限個である」ことが従う．実際，$\mathfrak{P}(S_n) = 2^{n!}$ だから.

定義 1.14.

環 A が **$\mathbb{C}$-代数**であるとは，与えられた加法に関して A は $\mathbb{C}$-ベクトル空間であり，次をみたす：

$$\forall c \in \mathbb{C},\ x, y \in A,\quad c(xy) = (cx)y = x(cy).$$

例えば正方行列 $\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ は行列の積で $\mathbb{C}$-代数．いま $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V に対して,

$$\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V) := \{f : V \to V \mid f : \text{線型写像}\}$$

とおく．これは point-wise な演算でベクトル空間をなし，さらに id_V を単位元として，写像の合成を積として $\mathbb{C}$-代数になる．

補題 1.15.

もし $\dim(V) = n$ ならば $\mathbb{C}$-代数としての同型 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ が存在する．但し，$n = 0$ の時は $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) := \{0\}$ と定義する．

Proof. まず V の基底 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を固定する．各 $1 \leqslant j \leqslant n$ と $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ に対して，$f(v_j) = \sum_i a_{ij} v_i$ なるスカラー $a_{ij} \in \mathbb{C}$ が定まる．そこで

$$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}); \quad f \longmapsto (a_{ij})_{ij}$$

を考えることはできる．これが全単射な環準同型であることを確かめるのはたやすい．□

この同型は基底を固定した non-canonical なものに注意．ベクトル空間 V に対して，

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \ := \ \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)^{\times} \ = \ \{f : V \to V \mid f : \text{線型同型}\}$$

とおくと群になる．もし $\dim(V) = n$ ならば，補題と同様にして non-canonical だが $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ である．また $n = 0$ のときは便宜的に $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V) := \{0\}$ としておく．ゼロ写像だけからなる集合．

1.2 群の表現

群を表現するとは，群の各元（抽象的）に対して，正則行列（具体的）を対応させ研究する，という気持ちのものである．正確に述べよう：

定義 1.16.

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が，群 G の**表現**（略して G-**表現**）であるとは，群準同型 $\rho : G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ が存在するときをいう．正確にはペア (V, ρ) を G-表現といえば誤解がない．

記法 1.17.

表現の表記や言葉遣いに関して若干の約束をする．

(1) 積のように

$$g.v \ := \ (\rho(g))(v) \qquad (g \in G, v \in V)$$

とかくと便利なのでそうする．

(2) いきなり ρ_V とかくと，表現 V の群準同型 $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ のことを意味する．

(3) 表現 V が有限次元のとき，**有限次元表現**という．

例 1.18.

以下は，群の表現の例：

(1) 群 G と任意のベクトル空間 V に対して，$G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V); g \mapsto \mathsf{id}_V$ は表現で，**自明表現**という.

(2) 特に $V = \mathbb{C}$ のとき $G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times; g \mapsto 1$ を **1 次元の自明表現**といい，1_G と書くことにする.

(3) 行列のベクトルへの積 $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n); A \mapsto (v \mapsto Av)$ はもちろん表現.

(4) 回転群 $\mathsf{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ は，平面 $\mathbb{R}^2$ での回転運動.

(5) $ax+b$ 群 $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{C}) \mid a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$ はいわゆる $\mathbb{C}^2$ のアフィン変換.

(6) n 変数多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ は

$$S_n \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]); \quad \sigma \longmapsto (f(X_1, \ldots, X_n) \mapsto f(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}))$$

によって S_n の表現.

(7) 上のとき，自然数 d に対して $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{(d)}$ を d-次斉次多項式全体とすると，これは S_n の有限次元表現になる．例えば $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^{(1)} = \mathbb{C}X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}X_n$ とか，$\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]^{(2)} = \mathbb{C}X_1X_2 \oplus \mathbb{C}X_2X_3 \oplus \mathbb{C}X_1X_3 \oplus \mathbb{C}X_1^2 \oplus \mathbb{C}X_2^2 \oplus \mathbb{C}X_3^2$ とか.

(8) 交代群 A_4 は，四面体の各頂点に $1, 2, 3, 4$ と番号を振ったときの “回転運動” を記述してる：
- 何もしない：(1)
- 面回転：$(123), (132); (134), (143); (124), (142); (234), (243)$
- 辺の中点を結んで回転：$(12)(34), (13)(24), (14)(23)$

(9) 二面体群

$$D_n := \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, srs = r^{-1} \rangle.$$

意味は「正 n 角形を動かしたときに重ね合わせれるやつら」で，r が回転，s が鏡映に対応.
注意：D_2 はクラインの四元群で，$\{(1), (12)(23), (13)(24), (14)(23)\}$ $(\lhd A_4)$ のこと.

(10) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times; \bar{k} \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}k/n}$ は一次元表現.

群 G に対して，

$$\mathcal{L}(G) := \mathsf{Map}(G, \mathbb{C}) \ \ (:= G \text{ から } \mathbb{C} \text{ への写像全体の集合})$$

とおく．これは次のように point-wise な構造を入れることによりベクトル空間：

- $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(G)$ に対して，$\varphi + \psi : G \longrightarrow \mathbb{C}; x \longmapsto \varphi(x) + \psi(x)$
- $\varphi \in \mathcal{L}(G)$, $c \in \mathbb{C}$ に対して，$c\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}; x \longmapsto c\varphi(x)$

各 $g \in G$ と $\varphi \in \mathcal{L}(G)$ に対して，元 $g.\varphi \in \mathcal{L}(G)$ を次で定義する.

$$g.\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad x \longmapsto \varphi(g^{-1}x).$$

命題 1.19.

$\rho_{\mathcal{L}(G)} : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(G)); g \mapsto (\varphi \mapsto g.\varphi)$ により $\mathcal{L}(G)$ は G の表現．これを**左正則表現**という．

Proof. まず $\varphi \mapsto g.\varphi$ が全単射であることは，逆写像が $\varphi \mapsto g^{-1}.\varphi$ で与えられることから明らか．和とスカラーで閉は自明．これが表現，つまり $(gh).\varphi = g.(h.\varphi)$ になることも

$$((gh).\varphi)(x) = \varphi((gh)^{-1}x) = \varphi(h^{-1}g^{-1}x) = (h.\varphi)(g^{-1}x) = (g.(h.\varphi))(x) \qquad (x \in G)$$

と，すぐ分かる． □

ベクトル空間 V の双対空間を $V^* = \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ とかき，自然なペアリングを

$$\langle \, , \, \rangle : V^* \times V \longrightarrow \mathbb{C}; (f, v) \longmapsto \langle f, v \rangle \ := \ f(v)$$

とかく．ここで V が有限次元と仮定し $V = \bigoplus_i \mathbb{C}e_i$ と基底を表示するとき，双対空間 V^* のペアリングに対する双対基底を $V^* = \bigoplus_i \mathbb{C}e_i^*$ と書くことにする．つまり $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

命題 1.20.

有限次元 G-表現 V に対して，V^* はペアリングを通して G-表現となる．これを**反傾表現**という．上記基底で行列表示すると $\rho_{V^*}(g) = {}^t\rho_V(g)^{-1}$ となる．

Proof. 表現を $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ とかく．このとき $\rho_{V^*} : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V^*)$ が次の式で定まる：

$$\langle \rho_{V^*}(g)f, \rho(g)v \rangle = \langle f, v \rangle \qquad f \in V^*, v \in V.$$

実際，有限次元だからこれでよい．いま行列表示で $\rho_V(g) = (a_{ij})_{ij}$, $\rho_{V^*}(g) = (b_{ij})_{ij}$ と書いておくとき，$f = e_i^*, v = e_j$ として考えると，

$$\delta_{ij} = \langle e_i^*, e_j \rangle = \langle \rho_{V^*}(g)e_i^*, \rho_V(g)e_j \rangle = \sum_k \sum_\ell \langle b_{ik}e_k^*, a_{j\ell}e_\ell \rangle = \sum_k b_{ik}a_{jk}$$

となる．従って，$(b_{ij})_{ij} \cdot {}^t(a_{ij})_{ij} = E_{\mathsf{dim}V}$ なので，$(b_{ij})_{ij} = {}^t(a_{ij})_{ij}^{-1}$ となる． □

注意 1.21.

Section 3.2 で考える群環 $\mathbb{C}G$ を使うと，$\mathcal{L}(G)$ はその双対で与えられる：

$$\mathcal{L}(G) = \mathsf{Map}(G, \mathbb{C}) = \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}) = (\mathbb{C}G)^*.$$

いま $\mathbb{C}G$ には自然な左 G-表現 $g.x := gx$ $(g, x \in G)$ が入っているが，これの反傾表現は

$$\langle g.\varphi, g.x \rangle = \langle \varphi, x \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{L}(G), \ g, x \in G$$

だから，これは左正則表現 on $\mathcal{L}(G)$ に一致している．

定義 1.22.

群 G の表現 V に対して，部分空間 $W \subset V$ が G の**部分表現**であるとは，$\forall g \in G, \forall w \in W$, $g.w \in W$ が成り立つときをいう．

命題 1.23.

上記のとき，商空間 V/W も自然な $g.(v+W) = g.v+W$ で G-表現．これを**商表現**という．

Proof. well-defined が気になる．もし $v+W = v'+W$ ならば，$v-v' \in W$ であるから，部分表現なので $g.v - g.v' = g.(v-v') \in W$．従って $g.v+W = g.v'+W$． $\square$

記法 1.24.

記法として $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ から得られる，というニュアンスで，$\rho|_W : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(W)$ や $\rho|_{V/W} : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V/W)$ などとかくと，ときに便利である．より正確には $\rho_V|_W$ などとかくべきかもだが，$\rho = \rho_V$ という了解のもとで，と解釈する．この $\rho|_W$ を単に ρ_W とかくと，W に別の（オリジナルの）G-表現の構造が入っていたときに混乱するので使わない．

例 1.25.

$ax+b$ 群の場合，$W = \{\, {}^t(x,0) \mid x \in \mathbb{C}\}$ は $V = \mathbb{C}^2$ の部分表現．そして $V/W = \{\, {}^t(\bar{0},\bar{y}) \mid y \in \mathbb{C}\}$ は商表現．ベクトル空間としては $V \cong W \oplus (V/W)$ だが，G-表現としては違う．実際，$W, V/W$ では b の情報が失われているから．また，一般にベクトル空間の直交補空間は G-表現にはならない．実際，いまの例で $W^{\perp} = \{\, {}^t(0,y) \mid y \in \mathbb{C}\}$ だが，$ax+b$ 群で不変ではない．

表現 V の部分表現たち W, W' に対して，共通部分 $W \cap W'$ や，和 $W + W' = \{w + w' \in V \mid w \in W, w \in W'\}$ もまた自然に表現になる．

命題 1.26 (対応定理)**.**

G-表現 V と，その部分表現 W を固定する．このとき，次は包含を保つ全単射：

$$\{\, U\colon V \text{ の部分表現} \mid W \subset U \,\} \xrightarrow{\cong} \{\, \overline{U}\colon V/W \text{ の部分表現} \}; \quad U \longmapsto U/W.$$

Proof. 射影を $\mathsf{pr} : V \to V/W$ とかくとき（これはのちの言葉で G-準同型なので），逆像 $\mathsf{pr}^{-1}(\overline{U}) = \{x \in V \mid \mathsf{pr}(x) \in \overline{U}\}$ （も G-表現になり，これ）が逆を与える．包含もよい． $\square$

ベクトル空間たち V, V' に対して，ベクトル空間 $V \oplus V' := V \times V'$ をその**外部直和**というのだった．

定義 1.27.

群 G の表現たち V, V' に対して，外部直和 $V \oplus V'$ も $g.(v,v') := (g.v, g.v')$ $(g \in G, v \in V, v' \in V')$ とすることで G の表現になる．これを**直和表現**という．

行列でいうとブロック行列．

$$\rho_{V\oplus V'}(g) = \begin{pmatrix} \rho_V(g) & 0 \\ 0 & \rho_{V'}(g) \end{pmatrix}.$$

このとき $\rho_{V\oplus V'} = \rho_V \oplus \rho_{V'}$．

注意 1.28.

適当なベクトル空間の部分空間たち W, W' に関して $W \cap W' = 0$ のとき，ベクトル空間の和 $W + W'$ を**内部直和**と呼ぶのだった．これをいまだけ $W \oplus' W'$ と書くことにする．このとき

$$W \oplus W' \longrightarrow W \oplus' W'; \quad (w, w') \longmapsto w + w'$$

は明らかに同型である．逆にベクトル空間 V, V' の外部直和 $V \oplus V' = V \times V'$ は，明らかにその部分空間 $V \times 0 := \{(v, 0) \mid v \in V\}$ と $0 \times V' := \{(0, v') \mid v' \in V'\}$ の内部直和とモノとして一致する：$V \oplus V' = (V \times 0) \oplus' (0 \times V')$.

本稿ではこの様な理由から，内部直和と外部直和をシビアに区別しない（が，たまに書く）．

1.3 既約表現

定義 1.29.

群 G の表現 $V \neq 0$ について．V の部分表現が V と 0 以外にも存在するとき**可約 (reducible)** であるという．そうでないとき**既約 (irreducible)** であるという．

直和表現は，明らかに可約．一次元表現は，明らかに既約．従って，任意の群準同型 $G \to \mathbb{C}^\times$ は 1 次元既約 G-表現を与える．

命題 1.30.

表現 V の部分表現 W と V の既約部分表現 L の和 $W + L$ は，（内部）直和 $W \oplus L$ もしくは W に一致．特に既約部分どもの和も直和．

Proof. 共通部分 $W \cap L$ は，特に L の部分表現なので，既約性から $W \cap L = 0$ か L のいずれか．後者の場合，$L = W \cap L \subset W$ なので $W + L = W$. $\square$

定義 1.31.

群 G の表現たち V, V' について，線型写像 $f : V \to V'$ が **G-準同型**であるとは $\forall g \in G, \forall v \in V$, $f(g.v) = g.f(v)$ が成り立つときをいう．また f が全単射のとき $V \cong_G V'$ とかき，**G-同型**であるという．

記号として G-準同型全体を $\mathsf{Hom}_G(V, V')$ とかく．ベクトル空間のときと同様にして G-表現たち V_1, V_2, V_1', V_2' に対して

$$\mathsf{Hom}_G(V_1 \oplus V_2, V_1' \oplus V_2') \cong \mathsf{Hom}_G(V_1, V_1') \oplus \mathsf{Hom}_G(V_1, V_2') \oplus \mathsf{Hom}_G(V_2, V_1') \oplus \mathsf{Hom}_G(V_2, V_2')$$

が成立．特に $\mathsf{End}_G(V) := \mathsf{Hom}_G(V, V)$ とかく．もちろん任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して $c.\mathsf{id}_V : V \to V; v \mapsto cv$ は $\mathsf{End}_G(V)$ の元.

命題 1.32.

G-表現 V に対して，$\mathsf{End}_G(V)$ は，$\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V)$ の $\mathbb{C}$-部分代数.

Proof. G-準同型たちの，和・スカラー倍・合成が，また G-準同型であるから自明. □

線型写像 $f : V \to V'$ の核は $\mathsf{Ker}(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ だったことを思い出す.

命題 1.33.

G-準同型 $f : V \to V'$ に対して，$\mathsf{Im}(f)$ は V' の部分表現で，$\mathsf{Ker}(f)$ は V の部分表現.

Proof. 像は当たり前．核の方は $\forall g \in G, x \in \mathsf{Ker}(f), f(g.x) = g.f(x) = g.0 = 0$ なので，$g.x \in \mathsf{Ker}(f)$ となり，よい. □

既約表現環の準同型は，著しい性質がある：

命題 1.34.

既約 G-表現たち L, L' について，任意の G-準同型 $f : L \to L'$ は $f = 0$ もしくは G-同型 $f : L \xrightarrow{\cong_G} L'$ のいずれか.

Proof. まず $\mathsf{Ker}(f) \subset L$ と $\mathsf{Im}(f) \subset L'$ は部分表現だったから，既約性より $\mathsf{Ker}(f) = 0$ or L かつ $\mathsf{Im}(f) = 0$ or L'．もし $f \neq 0$ とすると $\mathsf{Ker}(f) = 0$ かつ $\mathsf{Im}(f) = L'$．よって $f : L \to L'$ は G-同型射. □

一般に G-表現 V に対して，$\mathbb{C} \cong \mathbb{C}.\mathsf{id}_V \subset \mathsf{End}_G(V)$ であるが，既約表現の場合は一致する：

定理 1.35 (シューアの補題)**.**

有限次元の既約 G-表現 L について，ベクトル空間として $\mathsf{End}_G(L) \cong \mathbb{C}$．特に，有限次元既約 G-表現たち L, L' に対して，

$$\mathsf{Hom}_G(L, L') \;\cong\; \begin{cases} \mathbb{C} & \text{if } L \cong_G L', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. 有限次元の仮定から $n = \mathsf{dim}L$ とするとき $\mathsf{End}_G(L) \subset \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(L) \cong \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ となっている．いま $f \in \mathsf{End}_G(L)$ に対して，この同一視のもと有限サイズの複素行列とみたとき，$\mathbb{C}$ が代数閉体であるから f は固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ をもつ（線型代数の一般論）．対する固有ベクトルを $v_\lambda \in L$ とかくとき，$f(v_\lambda) = \lambda v_\lambda$ をみたしている．いま

$$\langle G.v_\lambda \rangle_{\mathbb{C}} \;:=\; \{\sum_{g \in G} c_g \cdot g.v_\lambda \in L \mid c_g \in \mathbb{C} \text{ with } c_g = 0 \text{ a.e. } g \in G\}$$

とおくと，これは v_λ の生成する L の G-部分表現になる．すると，既約性の仮定からこれは 0 もしくは L となる．いま固有ベクトルは非ゼロなので L に一致と分かる．すると $\forall v \in L, \exists c_g \in \mathbb{C}$ s.t.

$v = \sum_g c_g \cdot g.v_\lambda$ なので

$$f(v) = f(\sum_g c_g \cdot g.v_\lambda) = \sum_g c_g \cdot g.f(v_\lambda) = \sum_g c_g \cdot g.(\lambda v_\lambda) = \lambda(\sum_g c_g \cdot g.v_\lambda) = \lambda v$$

となるから $f = \lambda.\mathrm{id}_L$. 次の主張は先の命題と合わせて，自明. □

注意 1.36.

仮定に関する注意：

(1) 基礎体は代数閉の必要あり．もしそうでなければ $\mathsf{End}_G(L)$ は，いわゆる斜体になる.

(2) また無限次元ベクトル空間で，固有値をもたない例としては,

$$\ell^2 = \{(x_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum_n |x_n|^2 < \infty\}$$

において，shift map $f : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$ を考えると，固有値ない．実際，固有値 λ と，対する固有ベクトル $v_\lambda = (v_1, v_2, \dots)$ があるとすると，$(0, v_1, \dots) = f(v_\lambda) = \lambda v_\lambda = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots)$ なので，$\lambda = 0$ かつ $v_\lambda = 0$ となり矛盾.

定義 1.37.

群 G に対して，G-表現 V が**完全可約**であるとは，任意の V の部分表現 W に対して，部分表現 $W' \subset V$ が存在して，（内部）直和で $V = W \oplus W'$ となるときをいう.

命題 1.38.

G の有限次元表現 V に対して，次が成立：

$$V \text{ は完全可約} \iff V \text{ は適当な既約部分 } G\text{-表現の（内部）直和で書けている.}$$

Proof. ($\Longrightarrow$) もし V が既約であれば何もすることない．可約とすると，特に既約な $\exists L \subset V$ が取れる．すると仮定より $V = L \oplus {}^\exists W$ となる．すると $\mathsf{dim}W < \mathsf{dim}V$ なので，帰納法でも用いればよい.

($\Longleftarrow$) これも帰納法による．仮定から $V = \bigoplus_i L_i$ と既約たちの直和で書けている（同型な物も並べてる）．任意の非自明な部分表現 $W \subset V$ をとる．もし $\exists i$ s.t. $W = L_i$ なら，その他のを W' とすればよいのでおしまい．違うとすると，$\exists i$ s.t. $L_i \subset W$ である.

（実際，違うとすると，$\forall i$, $L_i \not\subset W$ となっている．一般に既約性から $L_i \cap W = 0$ or L_i だがもし $L_i \cap W = L_i$ なら，これは $L_i \subset W$ を意味するので NG．従って $\forall i$, $L_i \cap W = 0$ でなくてはならない．しかし，この場合

$$W = V \cap W = \bigoplus_i (L_i \cap W) = 0$$

なので非自明性に矛盾する.）

ここで商表現 V/L_i を考えれば，W/L_i はその部分表現．いま $\mathsf{dim}(V/L_i) < \mathsf{dim}V$ なので，帰納法の仮定から,

$$\exists \overline{W}' \subset V/L_i \quad \text{s.t.} \quad V/L_i = (W/L_i) \oplus \overline{W}'$$

となっている．対応定理から $L_i \subset \exists W' \subset V$ s.t. $\overline{W}' = W'/L_i$ である．ここでさらに帰納法の仮定から，

$$\exists W'' \subset W' \quad \text{s.t.} \quad W' = L_i \oplus W''$$

となる．このとき次元をみれば，$\mathsf{dim}V = \mathsf{dim}W + \mathsf{dim}W''$ とわかる．また構成から $W \cap W'' = 0$ なので，和 $W + W'' \subset V$ は一致し（内部）直和． $\square$

2 有限群の表現論

以下で G を有限群（$\#G < \infty$）とする．

2.1 既約分解

有限群の既約表現の性質をこれから調べていく．まずすぐ分かることは次である：

命題 2.1.

既約な G-表現は有限次元.

Proof. G-表現 L が既約だと仮定する．特に $L \neq 0$ なので $0 \neq v \in L$ がとれるが, 既約性から, これの生成する部分 G-表現は $L = \langle G.v \rangle_{\mathbb{C}}$ となる．これは “自由度” が G しかないので, $\mathrm{dim} L \leqslant \#G < \infty$. □

線型写像の G-準同型化ができる.

補題 2.2.

G-表現たち $(V, \rho), (V', \rho')$ について．任意の $\mathbb{C}$-線型写像 $f : V \to V'$ に対して,

$$T_f : V \longrightarrow V'; \quad v \mapsto \sum_{x \in G} \rho'(x) \circ f \circ \rho(x^{-1})(v)$$

は G-準同型（有限群なので和は有限，well-defined であることに注意).

Proof. 任意の $g \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}
T_f(\rho(g)v) &= \sum_{x \in G} \rho'(x) \circ f \circ \rho(x^{-1}) \circ \rho(g)(v) \\
&\underset{y=g^{-1}x}{=} \sum_{y \in G} \rho'(gy) \circ f \circ \rho(y^{-1})(v) \qquad (\because \text{群だから } G \to G; h \mapsto hg \text{ は全単射}) \\
&= \rho'(g)(T_f(v)).
\end{aligned}$$

と計算でき O.K. □

次は有限群の表現論（標数ゼロの代数閉体上）での基本的な結果である：

定理 2.3 (マシュケ (Maschke) の定理)**.**

任意の有限次元 G-表現は完全可約.

Proof. 有限次元表現 (V, ρ) について，任意の非自明な部分 G-表現 W をとり固定する．ベクトル空間の基底を延長して $V = W \oplus U$ としておく．これに関する射影を $\mathsf{pr} : V = W \oplus U \to W$ とかく．いま基礎体の標数がゼロであることから，$T'_{\mathsf{pr}} := \frac{1}{\#G} T_{\mathsf{pr}} : V \to W$ が考えられる．これは次のようにして

$T'_{\mathsf{pr}}|_W = \mathrm{id}_W$ が分かる：

$$T'_{\mathsf{pr}}(w) = \frac{1}{\#G}\sum_{x\in G}\rho(x)\circ \mathsf{pr}(x^{-1}.w) = \frac{1}{\#G}\sum_{x\in G}x.(x^{-1}.w) = \frac{1}{\#G}\#G\ w = w.$$

さて $W' := \mathsf{Ker}(T'_{\mathsf{pr}})$ とおけば T'_{pr} が G-準同型だったから G-表現であり，$V = W \oplus W'$ が，次のようにしていえる：

直和であることは $w \in W \cap W'$ に対して $0 = T'_{\mathsf{pr}}(w) = T'_{\mathsf{pr}}|_W(w) = w$ より．次に，全体に一致は，任意の $v \in V$ に対して $v = T'_{\mathsf{pr}}(v) + (v - T'_{\mathsf{pr}}(v))$ とみるとき，$T'_{\mathsf{pr}}(v) \in \mathsf{Im}(T'_{\mathsf{pr}}) \subset W$ はよいから $v - T'_{\mathsf{pr}}(v) \in W' = \mathsf{Ker}(T'_{\mathsf{pr}})$ ならよい．これは

$$T'_{\mathsf{pr}}(v - T'_{\mathsf{pr}}(v)) = T'_{\mathsf{pr}}(v) - T'_{\mathsf{pr}}(T'_{\mathsf{pr}}(v)) = T'_{\mathsf{pr}}(v) - T'_{\mathsf{pr}}|_W(T'_{\mathsf{pr}}(v)) = T'_{\mathsf{pr}}(v) - T'_{\mathsf{pr}}(v) = 0$$

より従う． □

注意 2.4.

マシュケの定理の証明から，基礎体の標数が G の位数と互いに素であるなら，体の中で $1/\#G$ が考えられるので，任意の G-表現は完全可約である．以下にダメな場合の例をあげる：

(1) 基礎体の標数と群の位数が互いに素でなときにダメな例：二元体 $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ に関して，

$$\rho : C_2 = \{\pm 1\} \longrightarrow \mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2); \qquad 1 \longmapsto \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad -1 \longmapsto \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

を考えると，$V = \mathbb{F}_2^2 = \begin{pmatrix}\mathbb{F}_2\\ \mathbb{F}_2\end{pmatrix} \supset V' = \begin{pmatrix}\mathbb{F}_2\\ 0\end{pmatrix}$ は C_2-表現だが，二つの部分表現の（内部）直和 $V = V' \oplus \bullet$ にはならない．

(2) 無限群のときにダメな例：$ax + b$ 群の $V = \mathbb{C}^2$ への表現．部分表現として $W = \mathbb{C}\,{}^t(1, 0)$ がとれるので可約．だがこれは二つの部分表現の（内部）直和にならぬ．どうしても動く．

マシュケの定理と，前のことから，有限次元表現 V はどんどん分解し，互いに同型でない既約部分 G-表現たち $L_1, \ldots, L_s$ と，自然数 $n_1, \ldots, n_s$ が存在して

$$V \ = \ L_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus L_s^{\oplus n_s}$$

と，既約表現のたくさんの直和でかけることはわかる．より詳しく：

系 2.5.

上記の設定で，V の既約な部分表現は $L_1, \ldots, L_s$ で，すべて尽くされている．また上記分解は，順序を除き一意的．

Proof. 任意の V の既約部分 G-表現 L に対して，与えられた分解に $\mathsf{Hom}_G(L, -)$ をとると

$$\mathsf{Hom}_G(L, V) \cong \bigoplus_{i=1}^{s}\mathsf{Hom}_G(L, L_i^{\oplus n_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^{s}\mathsf{Hom}_G(L, L_i)^{\oplus n_i}$$

となっており，左辺は包含写像を考えたら $\mathsf{Hom}_G(L,V)\neq 0$ なので，右辺で見て $1\leqslant \exists j\leqslant s$ s.t. $\mathsf{Hom}_G(L,L_j)\neq 0$．するとシューアの補題から $L\cong L_j$ でなくてはならない．よって O.K. さらにこのとき，再びシューアの補題から

$$\mathsf{Hom}_G(L_j,V)\cong\bigoplus_{i=1}^{s}\mathsf{Hom}_G(L_j,L_i)^{\oplus n_i}\cong\mathbb{C}^{\oplus n_j}$$

よって $n_j=\mathsf{dimHom}_G(L_j,V)$ とわかった．従って，もし別の既約分解 $V=\bigoplus_k L_k'^{\oplus n_k'}$ があったとしても，L_k' は V の既約部分 G-表現なので，どれかの L_i に一致し，さきと同様の考え方で $n_k'=\mathsf{dimHom}_G(L_k',V)=\mathsf{dimHom}_G(L_i,V)=n_i$ を得る． $\square$

このとき，分解 $V=L_1^{\oplus n_1}\oplus\cdots\oplus L_s^{\oplus n_s}$ を V の（重複なしの）**既約分解**と呼び，各 L_i を V の**既約成分**と呼ぶことにする．また $[V:L_i]:=n_i=\mathsf{dimHom}_G(L_i,V)$ と書かれ，V における L_i の**重複度**と呼ばれる．

この結果から「既約表現さえ知れればよい」と分かった！

補題 2.6.

G の有限次元表現 V を先のように $V=\bigoplus_i L_i^{\oplus n_i}$ と既約分解するとき，$\mathbb{C}$-代数としての同型 $\mathsf{End}_G(V)\cong\bigoplus_i\mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ がある（もちろん右辺は成分ごとの演算）．

Proof. まずシューアの補題から

$$\mathsf{End}_G(V)\cong\bigoplus_{i,j}\mathsf{Hom}_G(L_i,L_j)^{\oplus n_in_j}=\bigoplus_i\mathsf{Hom}_G(L_i,L_i)^{\oplus n_i^2}\cong\bigoplus_i\mathbb{C}^{\oplus n_i^2}\cong\bigoplus_i\mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$$

と $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての同型があるのはよい．

主張をいうためには L を既約として $V=L^{\oplus n}$ のときに，$\mathbb{C}$-代数としての同型 $\mathsf{End}_G(V)\cong\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ をいえばよい．対応を述べるために，コピーで $V=L^{(1)}\oplus\cdots\oplus L^{(n)}$ with G-同型射 $f_i:L\xrightarrow{\cong}L^{(i)}(\forall i)$ と表示しておく．ブレ調整の同型として $f_{ij}:L^{(j)}\xrightarrow{f_j^{-1}}L\xrightarrow{f_i}L^{(i)}$ を考える．これは $f_{ij}\circ f_{jk}=f_{ik}$ をみたす．さて次の G-準同型を考える．

$$e_{ij}:V\longrightarrow V;\quad v\longmapsto\begin{cases}f_{ij}(v) & \text{if } v\in L^{(j)},\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

これは $e_{ij}\in\mathsf{End}_G(V)$ であり，これによって先のベクトル空間の同型は

$$\mathsf{End}_G(V)\xrightarrow{\cong}\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C});\quad e_{ij}\longmapsto E_{ij}$$

と分かる．右辺のは行列単位．さらに

$$e_{ij}\circ e_{k\ell}(v)=\begin{cases}e_{ij}(f_{k\ell}(v)) & \text{if } v\in L^{(\ell)}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}=\begin{cases}f_{ij}(f_{k\ell}(v)) & \text{if } v\in L^{(\ell)}\ \&\ f_{k\ell}(v)\in L^{(j)}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}=\delta_{jk}e_{i\ell}(v)$$

となってるのでので，これが環としての同型を与えるのは当たり前． $\square$

シューアの補題は，有限の場合は逆も言える．

命題 2.7 (シューアの補題の精密版)**.**

有限次元表現 V について，V は既約 $\iff \mathsf{End}_G(V) \cong \mathbb{C}$.

Proof. $(\Longrightarrow)$ は済．$(\Longleftarrow)$ は先の補題で n_i が一つだけ 1 で後がゼロでなくてはならないので OK. □

行列の言葉に直せば，基底を固定 $V \cong \mathbb{C}^n$ して $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \subset \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ とみるとき，$\mathsf{End}_G(V) = \{A \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \forall g \in G,\ \rho(g)A = A\rho(g)\}$ であるから，上記結果は，次のように翻訳できる：

$$V \text{ が既約} \iff [\forall g \in G,\, \rho(g)A = A\rho(g) \Longrightarrow \exists c \in \mathbb{C} \text{ s.t. } A = cE_n]$$

つまり具体的に表現の行列実現が分かっている場合（おおむねこれは難しいが)，それが既約かどうかは，行列の計算（例えば PC とか使って）で判定可能であることを言っている．

例 2.8.

既約表現分解の例たち

(1) $S_2 = \{(1), (12)\}$ の 2 次元表現 $\mathbb{C}[X_1, X_2]^{(1)} = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2$ について．まず $L = \mathbb{C}(X_1 + X_2)$ が一次元の自明な既約部分表現であることが分かる．そこで $\mathbb{C}^2$ と同一視して, 標準内積 $(\ ,\ )_{\mathbb{C}}$ に関する直交補空間を考えると,

$$L^\perp = \{c_1X_1 + c_2X_2 \mid (c_1X_1 + c_2X_2, L)_{\mathbb{C}} = 0\} = \{c_1X_1 + c_2X_2 \mid c_1 + c_2 = 0\}$$

となる．よって $L^\perp = \mathbb{C}(X_1 - X_2)$ である．これへの作用は,

$$(1).(X_1 - X_2) = X_1 - X_2, \qquad (12).(X_1 - X_2) = X_2 - X_1 = -(X_1 - X_2)$$

なので，これは符号表現 $\mathsf{sgn} : S_2 \to \mathbb{C}^\times$ のこと．これで $\mathbb{C}[X_1, X_2]^{(1)} = L \oplus L^\perp$ と分解する．

(2) $S_3 = \langle \sigma_1 = (12), \sigma_2 = (23) \rangle$ の 3 次元表現 $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]^{(1)} = \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \oplus \mathbb{C}X_3$ に関して．これも $L = \mathbb{C}(X_1 + X_2 + X_3)$ が一次元の既約な部分表現であることが分かる．そこで $\mathbb{C}^3$ と同一視して，標準内積に関する直交補空間 $L^\perp$ を考え，以下のように基底 $X_1 - X_3, X_2 - X_3$ を固定する

$$L^\perp = \{c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 \mid c_1 + c_2 + c_3 = 0\} = \mathbb{C}(X_1 - X_3) \oplus \mathbb{C}(X_2 - X_3)$$

これは真ん中の表示から，ちゃんと 2 次元部分表現になっている．この基底で行列表示を考えると,

$$\sigma_1.\big(a(X_1 - X_3) + b(X_2 - X_3)\big) = b(X_1 - X_3) + a(X_2 - X_3),$$
$$\sigma_2\big(a(X_1 - X_3) + b(X_2 - X_3)\big) = a(X_1 - X_3) + (-a - b)(X_2 - X_3)$$

なる計算から

$$\rho|_{L^\perp} : S_3 \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(L^\perp) \cong \mathsf{GL}_2(\mathbb{C}); \quad \sigma_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とわかる．他の元の行先は generators の積に沿って計算すればよい．

さて，これが既約であることを，先の補題で確かめよう．任意の行列 $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ に対して，

$$\rho|_{L^\perp}(\sigma_1) \cdot A = A \cdot \rho|_{L^\perp}(\sigma_1)\ \&\ \rho|_{L^\perp}(\sigma_2) \cdot A = A \cdot \rho|_{L^\perp}(\sigma_2) \Longrightarrow (b = c\,\&\, a = d)\ \&\ (b = 0)$$

と分かるので，このとき $A = aE_2$ となり既約．これで既約分解 $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]^{(1)} = L \oplus L^\perp$ を得たことになる．

(3) 有限巡回群 $G = C_n = \langle x \rangle = \{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ について．各 $0 \leqslant m \leqslant n-1$ に対して $\theta_m := 2\pi m/n$ とおき，回転行列で

$$\rho_m : G \longrightarrow \mathsf{GL}_2(\mathbb{C}); x^k \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(k\theta_m) & \sin(k\theta_m) \\ -\sin(k\theta_m) & \cos(k\theta_m) \end{pmatrix} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

を考えると C_n の 2 次元表現になっている．

いま複素数で考えているから $\mathbb{C}^2$ の基底として $v_1 := {}^t(1, \sqrt{-1}), v_2 := {}^t(1, -\sqrt{-1})$ をとることができ，つまりベクトル空間として $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$ と分解できる．作用で飛ばすと

$$\rho_m(x^k)v_1 \ = \ (\cos(k\theta_m) - \sqrt{-1}\sin(k\theta_m))v_1 \ = \ e^{k\theta_m\sqrt{-1}}v_1$$

となるから $\mathbb{C}v_1$ は一次元の部分表現である．同様に $\rho_m(x^k)v_2 = e^{-k\theta_m\sqrt{-1}}v_2$ となるから $\mathbb{C}v_2$ も一次元の部分表現である．よって，C_n-表現の既約分解 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$ を得た．

以上のことから，G-表現を知るとは，次のことを知るということに帰着した：

- { 既約 G-表現全体 }$/\cong_G$ の様子（個数とか，代表元とか）
- G-表現 V, V' について，$V \cong_G V'$ or not の判定法
- G-表現 V について，V が既約 or not の判定法
- G-表現 V について，V の既約成分などの様子
- 既約表現 L の様子（次元とか）

2.2 有限次元表現の指標

行列の正則性を知る道具として，行列式があった．有限次元表現の様々な性質を知る道具として，指標と呼ばれる概念がある．このセクションでは，この指標が既約表現の様々な情報を抜き出してくれることをみる．

行列 $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ に対して，$\mathsf{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ を A の**トレース**という．すぐ分かるように $\mathsf{tr}(AB) = \mathsf{tr}(BA)$ が成り立つ．

注意 2.9.

任意の正方行列 A は，適当な正則行列 $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ が存在して $P^{-1}AP$ を上三角にすることができるのだった．そのときの対角成分は明らかに A の固有値たちである．一方でトレースの性質から

$$\mathsf{tr}(P^{-1}AP) = \mathsf{tr}(P^{-1}(AP)) = \mathsf{tr}((AP)P^{-1}) = \mathsf{tr}(A)$$

と計算できる．従って，$\mathsf{tr}(A)$ は A の固有値すべての和に一致することが分かった．

定義 2.10.

有限次元 G-表現 $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ に対して，適当な基底をとり $\mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ と同一視したとき，写像

$$\chi_V : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad g \longmapsto \mathsf{tr}(\rho(g))$$

を V の**指標**という．既約な表現の指標を**既約指標**といったり．

モチロン $\chi_V \in \mathcal{L}(G) = \mathsf{Map}(G, \mathbb{C})$ である．

補題 2.11.

指標は基底の取り方によらず，定まる．

Proof. 表現 ρ が別の基底で同一視 $\mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V) \cong \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ されたとき，これを ρ' とかけば，線型代数の一般論から $\forall g \in G, \exists P \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}\rho(g)P = \rho'(g)$ となっている（基底変換行列）．するとトレースの性質から $\mathsf{tr}(\rho'(g)) = \mathsf{tr}(P^{-1}\rho(g)P) = \mathsf{tr}(\rho(g))$ となり，よい． □

注意 2.12.

行列に対してトレースを考えたが，時には線型写像のままの方が記述が楽な時もある．有限次元ベクトル空間 V と線型写像 $f : V \to V$ について．基底を $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}e_i$ と固定して，以前のようにその双対基底を $V^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}e_i^*$ と書いておくことにする．このとき

$$\mathsf{tr}(f) := \sum_{i=1}^n \langle e_i^*, f(e_i) \rangle$$

と定め，これを f のトレースという（基底の取り方に依存しないことが示せる）．すぐ分かるようにこの基底に関する f に対応する表現行列を A とかくとき，$\mathsf{tr}(f) = \mathsf{tr}(A)$ である．この表示で

$$\chi_V(g) = \sum_{i=1}^n \langle e_i^*, g.e_i \rangle$$

と指標を書いておくと，たまに計算のときに見通しが立ちやすくなる．

指標の簡単な性質をまとめる：

命題 2.13.

V を n 次元 G-表現とする（$n < \infty$）．以下で $g, h \in G$ を任意にとり固定する．

(1) $\chi_V(e) = n$.

(2) $\chi_V(g)$ は，n 個の 1 の $\#G$ 乗根の和.

(3) $\chi_V(g^{-1}) = \chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V}(g)$．ここで $\overline{\chi_V}(g) := \overline{\chi_V(g)}$（複素共役）.

(4) $\chi_V(ghg^{-1}) = \chi_V(h)$．つまり**類関数**である.

(5) $\chi_V(gh) = \chi_V(hg)$.

(6) $n = 1 \Longrightarrow \chi_V : G \to \mathbb{C}^\times$ であり，群準同型.

Proof. (1) 定義より $\rho(e) = \mathsf{id}_V$ なので，単位行列に対応するので明らか.

(2) まず $\rho(g)$ の固有値を（重複こみで）$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とかくと，トレースの性質から $\chi_V(g) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ となっている．対応する固有ベクトルを $v_1, \ldots, v_n$ とかけば $\rho(g)v_i = \lambda_i v_i$ をみたしている．いま G は有限群だから $g^{\#G} = e$ に注意する（巡回群 $\langle g \rangle$ に対して Lagrange の定理を apply すればよい）と，各 i に対して

$$v_i = \rho(e)v_i = \rho(g^{\#G})v_i = \rho(g) \circ \cdots \circ \rho(g)v_i = \lambda_i^{\#G} v_i$$

なので $v_i \neq 0$ であることから，λ_i は 1 の $\#G$ 乗根（特に非ゼロに注意）.

(3) 反傾表現の行列実現と，計算により

$$\chi_{V^*}(g) = \mathsf{tr}(\rho_{V^*}(g)) = \mathsf{tr}({}^t\rho_V(g^{-1})) = \mathsf{tr}(\rho_V(g^{-1})) = \chi_V(g^{-1})$$

はよい．次に，先の問題の記号を用いると $\rho_V(g^{-1}) = \rho_V(g)^{-1}$ の固有値は λ_i^{-1} ですべて．さらにこれは $\lambda_i = e^{k_i \pi \sqrt{-1}/\#G}$ の形なので（$1 \leqslant {}^\exists k_i \leqslant \#G$），$\overline{\lambda_i} = e^{-k_i \pi \sqrt{-1}/\#G} = \lambda_i^{-1}$ という基本的な事実に注意すればよい.

(4) これはトレースの性質から直ちに従う.

(5) まず $x := g^{-1}, y := gh$ とおくと，$\chi_V(xyx^{-1}) = \chi_V(g^{-1}ghg) = \chi_V(hg)$ となる．よって，先の結果から $\chi_V(y) = \chi_V(xyx^{-1})$ が成立してるので，OK.

(6) 一次元の場合，$\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ だから，$\chi_V = \rho$ であるので当然.

□

補題 2.14.

有限次元 G-表現たち V, V' に対して，直和 $V \oplus V'$ の指標は $\chi_{V \oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$．また部分表現 $W \subset V$ に対して，商表現 V/W の指標は $\chi_{V/W} = \chi_V - \chi_W$.

Proof. 直和はあたりまえ．商は，基底を $W \subset V$ と延長すると，

$$\rho_V(g) = \begin{pmatrix} \rho|_W(g) & * \\ O & \rho|_{V/W}(g) \end{pmatrix}$$

と表示できることから従う. □

例 2.15.

指標の例たち：

(1) $G = C_3 = \{1, x, x^2\}$ の場合，群準同型 $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$ は，$\varphi(x) := \alpha \in \mathbb{C}^\times$ とおくと，$1 = \varphi(1) = \varphi(x^3) = \varphi(x)^3 = \alpha^3$ をみたさなくてはならないので，$\alpha = 1, e^{2\pi\sqrt{-1}/3}, e^{4\pi\sqrt{-1}/3}\,(= e^{-\pi\sqrt{-1}/3})$ のいずれか．よって，一次元表現（よって指標）はこの 3 つしかない．

(2) 対称群 S_n の有限次元表現 $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]^{(1)} = \mathbb{C}X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}X_n$ を考える．このとき，入れ替えだから，行列 $\rho(\sigma)$ は各行が「ひとつだけ 1 で他はゼロ」からなる．そして対角成分に 1 がくるためには $\sigma(i) = i$ でなくてはならない．よって

$$\chi_{\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]^{(1)}}(\sigma) \;=\; \#\{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \;\&\; \sigma(i) = i\}$$

と計算しやすい．

2.3 直交関係

各 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(G)$ に対して，

$$(\varphi, \psi) \;:=\; \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \varphi(g)\,\overline{\psi(g)}$$

とおく（有限群なのでこれは可能）．

補題 2.16.

これは $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathcal{L}(G)$ 上の内積になっている．

Proof. 一般に $\mathbb{C}$ ベクトル空間 V 上の内積 $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ とは，以下をみたすもののことだった：

(1) 両側が加法を保つ：$\forall v, w, x, y \in V,\ (v + w, x + y) = (v, x) + (v, y) + (w, x) + (w, y)$.

(2) スカラーに関して：$\forall a, b \in \mathbb{C}, v, w \in V,\ (av, bw) = a\bar{b}(x, w)$（注意：文献によっては複素共役が逆の場合もあり）.

(3) エルミート対称性：$(v, w) = \overline{(w, v)}$.

(4) 非退化：$\forall v \in V\ [(v, v) = 0 \Longrightarrow v = 0]$.

(5) 正定値：$\forall v \in V,\ (v, v) \geqslant 0$.

いまのヤツがこれらをみたすことは quite easy to see. □

指標の性質（命題 2.13(3)）から，指標の空間上では

$$(\chi_V, \chi_{V'}) \;=\; \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_V(g)\,\chi_{V'}(g^{-1})$$

ともかけることに注意.

定理 2.17 (第一直交関係)**.**

既約 G-表現（必然的に有限次元）たち L, L' に対して，

$$(\chi_L, \chi_{L'}) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{if } L \cong_G L', \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. まず表現を $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(L) \cong \mathsf{GL}_n(\mathbb{C}), \rho' : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(L') \cong \mathsf{GL}_m(\mathbb{C})$ と表示し，行列の成分表示で $\rho(g) = (\rho(g)_{ij})_{ij}, \rho'(g) = (\rho'(g)_{ij})_{ij}$, とかく．次の値が知りたい：

$$(\chi_L, \chi_{L'}) = \frac{1}{\#G} \sum_g \chi_L(g)\, \chi_{L'}(g^{-1}) = \frac{1}{\#G} \sum_g \sum_i \sum_j \rho(g)_{ii} \cdot \rho'(g^{-1})_{jj}$$

いま任意の線形写像 $f : L' \to L$ に対して，以前のように $T_f : L' \to L$ を考えると，これは G-準同型なのであった．すると，仮定の既約性からシューアの補題が使え，

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad T_f \overset{\text{id}}{=} (\sum_g \sum_{k,\ell} \rho(g)_{ik} f_{k\ell} \rho'(g^{-1})_{\ell j})_{ij} = \begin{cases} \lambda E_n & \text{if } L \cong_G L' \\ O & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで同一視で $f \overset{\text{id}}{=} (f_{ij})_{ij}$ と書いてる．特に，任意に i, j を固定しておき f を行列単位 $E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{\ell j})_{k\ell}$ でとれば，T_f の (i, j) 成分は

$$\sum_g \sum_{k,\ell} \rho(g)_{ik} f_{k\ell} \rho'(g^{-1})_{\ell j} = \sum_g \rho(g)_{ii} \rho'(g^{-1})_{jj}$$

となり知りたかったものになる．

従って，$L \ncong_G L'$ であれば，これはゼロでなくてはならないので，$(\chi_L, \chi_{L'}) = 0$．次に $L \cong_G L'$ のとき，$\rho = \rho'$ としてよいから，

$$\lambda \cdot \mathsf{dim} L = \mathsf{tr}(T_f) = \mathsf{tr}(\sum_g \rho(g) \circ f \circ \rho'(g^{-1})) = \mathsf{tr}(\sum_g f) = \#G \cdot \mathsf{tr} f$$

と，スカラーが $\lambda = \frac{\#G}{\mathsf{dim} L} \cdot \mathsf{tr} f$ と決定できる．いま $f = E_{ij} = (\delta_{ik}\delta_{\ell j})_{k\ell}$ と行列単位を考えているので $\mathsf{tr} f = \delta_{ij}$ に注意すれば，$T_f = \lambda E_n$ の (i, j) 成分は

$$\sum_g \sum_{k,\ell} \rho(g)_{ik} f_{k\ell} \rho'(g^{-1})_{\ell j} = \lambda \delta_{ij} = \frac{\#G}{\mathsf{dim} L} \delta_{ij}^2$$

とわかる．従って，

$$(\chi_L, \chi_{L'}) = \frac{1}{\#G} \sum_g \sum_i \sum_j \rho(g)_{ii} \rho'(g^{-1})_{jj} = \frac{1}{\#G} \sum_i \sum_j \frac{\#G}{\mathsf{dim} L} \delta_{ij}^2 = \sum_i \frac{1}{\mathsf{dim} L}$$

と計算できる．和は $\mathsf{dim} L$ 個なので O.K. □

系 2.18.

既約表現たち $L_1, \ldots, L_s$ が互いに非同型ならば，その指標 $\chi_{L_1}, \ldots, \chi_{L_s}$ は $\mathcal{L}(G)$ の中で線型独立.

Proof. 実直に $a_1\chi_{L_1} + \cdots + a_s\chi_{L_s} = 0$ と仮定する（$a_i \in \mathbb{C}$）．内積を考えると，第一直交関係から

$$1 \leqslant \forall j \leqslant s, \quad 0 = (\chi_{L_j}, \sum_i a_i\chi_{L_i}) = \sum_i a_i(\chi_{L_j}, \chi_{L_i}) = a_j$$

を得るのでよい. □

系 2.19.

有限次元 G-表現の既約分解を重複込みで $V = \bigoplus_i W_i$ かくとき，任意の既約 G-表現 L に対して $(\chi_V, \chi_L) = \#\{i \mid W_i \cong_G L\}$.

Proof. 直和なので $\chi_V = \sum_i \chi_{W_i}$ とかけてる．すると $(\chi_V, \chi_L) = \sum_i(\chi_{W_i}, \chi_L)$ なので，第一直交関係より，これの計算結果は L と G-同型な W_i たち. □

系 2.20.

有限次元 G-表現たち V, V' に対して $V \cong_G V' \iff \chi_V = \chi_{V'}$.

Proof. ($\Longrightarrow$) は明らか．($\Longleftarrow$)（重複無しの）既約分解を $V = \bigoplus_i L_i^{\oplus n_i}$ とかくとき，V と V' の対称性から V' の（重複なしの）既約分解を $V' = \bigoplus_i L_i^{\oplus m_i} \oplus \bigoplus_j L_j'^{\oplus k_j}$ とかいても一般性は失われない．ただし，既約因子に出てこないときは $m_i, k_j = 0$ と考える．すると

$$\chi_V = \sum_i n_i\chi_{L_i}, \qquad \chi_{V'} = \sum_i m_i\chi_{L_i} + \sum_j k_j\chi_{L_j'}$$

であるから，指標の線型独立性から $n_i = m_i$ かつ $k_j = 0$ でなくてはならない. □

このことから

$$\{\text{ 有限次元 } G\text{-表現 }\}/\cong_G \longrightarrow \mathcal{L}(G); \quad [V] \longmapsto \chi_V$$

は well-defined で単射と分かった.

系 2.21.

有限次元 G-表現 V に対して，V は既約 $\iff (\chi_V, \chi_V) = 1$.

Proof. ($\Longrightarrow$) は第一直交関係のまま．($\Longleftarrow$) 既約分解を $V = \bigoplus_i L_i^{\oplus n_i}$ とかくとき，仮定および第一直交関係から

$$1 = (\chi_V, \chi_V) = \sum_{i,j} n_i n_j \delta_{i,j} = \sum_i n_i^2.$$

よって，ただひとつの n_i が 1 で，他はゼロ. □

有限次元 G-表現 V について，その線型双対 V^* は反傾表現で G-表現になるのであった.

系 2.22.

有限次元 G-表現 V に対して，V が既約 $\iff$ L^* が既約.

Proof. 命題 2.13(3) を用いて指標を計算すると，

$$(\chi_{V^*}, \chi_{V^*}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_{V^*}(g)\chi_{V^*}(g^{-1}) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi_V(g^{-1})\chi_V(g) = (\chi_V, \chi_V)$$

となるので，系 2.21 より OK. □

2.4 既約表現の個数

いま G は有限群なので $\mathcal{L}(G) = \mathsf{Map}(G, \mathbb{C})$ は有限次元 G-表現であることに注意する．明示的に記述するため，各 $x \in G$ に対して

$$\delta_x : G \longrightarrow \mathbb{C}; \quad a \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{if } a = x, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと，これは $\mathcal{L}(G) = \bigoplus_{x\in G}\mathbb{C}\delta_x$ と，基底となる．実際，共通部分がゼロはよくて，任意の $\varphi \in \mathcal{L}(G)$ に対して $\varphi = \sum_{x\in G}\varphi(x)\delta_x$ とかけるから．従って，特に $\mathsf{dim}\mathcal{L}(G) = \#G$ と有限次元.

この基底への左正則作用を計算すると，

$$\forall g \in G, \quad g.\delta_x(a) = \delta_x(g^{-1}a) = \delta_{gx}(a) \qquad (\because x = g^{-1}a \iff gx = a)$$

であるから

$$\rho_{\mathcal{L}(G)} : G \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(G)); \quad g \longmapsto (\delta_x \mapsto \delta_{gx})$$

とわかった．さて，$\mathcal{L}(G)$ の指標 $\chi_{\mathcal{L}(G)}$ を調べよう．

補題 2.23.

各 $g \in G$ に対して，

$$\chi_{\mathcal{L}(G)}(g) = \begin{cases} \#G & \text{if } g = e, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. ここだけの記号として $G = \{x_1, \ldots, x_N\}$ と表示しておく．先の各基底に対する作用の具体的表示により，例えば $v = \sum_i a_i\delta_{x_i}$ への作用を考えたら，$g.v = \sum_i a_i\delta_{gx_i}$ となるから，係数がシフトするだけ．従って表現行列は各 i 行に対して，1 がただ一回で，あとはすべてゼロ．そして各 i に対して，

$$i \text{ のところの対角に } 1 \text{ が来る} \iff gx_i = x_i \iff g = e$$

となる．従って $g = e$ なら次元分だけ 1 が並び $\mathsf{dim}\mathcal{L}(G) = \#G$ となる．他方で $g \neq e$ ならひとつも対角成分に 1 がないので，$\chi_{\mathcal{L}(G)}(g) = 0$. □

命題 2.24.

任意の既約 G-表現 L に対して，L と同型になる $\mathcal{L}(G)$ の既約成分の個数は $\mathsf{dim}L$ に一致．特に $\mathcal{L}(G) = L_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus L_r^{\oplus n_r}$ と既約分解すれば，$n_i = \mathsf{dim}L_i$ であり $\#G = \mathsf{dim}\mathcal{L}(G) = \sum_{i=1}^r n_i^2$

Proof. 先の補題から，

$$(\chi_{\mathcal{L}(G)}, \chi_L) = \frac{1}{\#G}\sum_{x\in G}\chi_{\mathcal{L}(G)}(x)\cdot\chi_L(x^{-1}) = \frac{1}{\#G}\#G\cdot\chi_L(e) = \mathsf{dim}L$$

だった．最左辺は前やった系より，同型の個数を与えるのだった．また「特に」以降は，$L = L_i$ を考えればよい． □

以下，$\mathsf{Irr}(G) := \{$（有限次元）既約 G-表現 $\}/\cong_G$ とかいておく．

命題 2.25.

既約な G-表現は同型を除いて有限個：$\#\mathsf{Irr}(G) < \infty$.

Proof. 勝手な既約 G-表現 L は $\mathsf{dim}L \geqslant 1$ なので，先の命題から，必ず $\mathcal{L}(G)$ の既約因子のどれかに一致する．他方で $\mathcal{L}(G)$ の既約因子は有限個なので，主張が従う． □

いま $\mathcal{L}(G) = L_1^{\oplus n_1} \oplus \cdots \oplus L_r^{\oplus n_r}$ と既約分解すれば，各既約成分 L_i は明らかに既約 G-表現なので，明示的に $\#\mathsf{Irr}(G) = r$ となる．

2.5 指標の計算

類関数全体を次のようにおく：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} &:= \{\varphi \in \mathcal{L}(G) \mid \forall x, y \in G, \varphi(xyx^{-1}) = \varphi(y)\} \\ &= \{\varphi \in \mathcal{L}(G) \mid \forall x, y \in G,\ \varphi(xy) = \varphi(yx)\}.\end{aligned}$$

二つ目の等式は，以前の指標の箇所でもやったような変形による．この $\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ は $\mathcal{L}(G)$ の部分空間.

補題 2.26.

$\mathsf{dim}\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} = \#\{$ G の共役類 $\}$.

Proof. 共役類による分解を $G = \bigsqcup_i c_i^G$ とかく（$c_i^G = \{gc_ig^{-1} \mid g \in G\}$）．従って，$\varphi \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ を決めることは，各 $\varphi(c_i)$ の行先を決めれば十分とわかり，OK. □

前のことから，既約表現の同値類の個数は有限個と分かっているので $\mathsf{Irr}(G) = \{[L_1], \ldots, [L_r]\}$ と表示する．ここで $[L_i] = \{L \mid L$ は既約 G-表現で $L \cong_G L_i$ $\}$ の同値類.

注意 2.27.

前のことから任意の既約表現は $\mathcal{L}(G)$ の既約成分に含まれている $L_i \subset \mathcal{L}(G)$ ので，いままでの $\mathcal{L}(G)$ の既約分解に出てきた r は，いまの意味の r と同じもの.

補題 2.28.

$\chi_{L_1}, \ldots, \chi_{L_r}$ は $\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ の（正規直交）基底をなす：$\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}\chi_{L_i}$.

Proof. まず，第一直交関係から $(\chi_{L_i}, \chi_{L_j}) = \delta_{ij}$ なので，線型独立，つまり直和なのはよい．また $(\supset)$ は指標が類関数だから良い．逆 $(\subset)$ をいう．そのためには，次がいえたらよい：

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}\ [\ \forall i,\ (\varphi, \chi_{L_i}) = 0 \Longrightarrow \varphi = 0\ ].$$

実際，これがいえたら，他にも線型独立なベクトルらがあったときに，いままでの χ_{L_i} たちと O.N.B. を作れば，いまの仮定からそれらはゼロになり矛盾するから．

以下で主張を示す．各 i に対して，次の写像を考える：

$$R_i^{\varphi} : L_i \longrightarrow L_i; \quad v \longmapsto \sum_{x \in G} \varphi(x)\, \rho_{L_i}(x^{-1})(v) \qquad \text{i.e.,} \quad R_i^{\varphi} = \sum_{x \in G} \varphi(x)\, \rho_{L_i}(x^{-1})$$

これは G-準同型である．

$$\left(\begin{array}{l} \text{実際，} \varphi \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} \text{ だから，} \\[1ex] R_i^{\varphi}(g.v) = \displaystyle\sum_x \varphi(x) x^{-1} g.v \underset{y = x^{-1}g}{=} \sum_y \varphi(gy^{-1}) y.v = \sum_y \varphi(y^{-1}g) y.v \underset{z = y^{-1}g}{=} \sum_z \varphi(z) g z^{-1}.v \\[1ex] \text{となり，これは } g.R_i^{\varphi}(v) \text{ に一致.} \end{array}\right)$$

いま L_i は既約なので，シューアの補題から $\exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ s.t. $R_i^{\varphi} = \lambda_i.\mathsf{id}_{L_i}$．両辺のトレース取れば $\mathsf{tr}(R_i^{\varphi}) = \lambda_i \cdot \mathsf{dim} L_i$．一方で，トレースは，仮定から

$$\mathsf{tr}(R_i^{\varphi}) = \sum_x \varphi(x)\, \mathsf{tr}\big(\rho_{L_i}(x^{-1})\big) = \sum_x \varphi(x)\, \chi_{L_i}(x^{-1}) = \#G \cdot (\varphi, \chi_{L_i}) = 0$$

となる．従って，合わせると $\lambda_i = 0$ i.e., $R_i^{\varphi} = 0$ と分かった．

さて同一視により $L_i \subset \mathcal{L}(G)$ と考えて，既約分解を $\mathcal{L}(G) = \bigoplus_{i=1}^{r} L_i^{\oplus n_i}$ しておく．いま左正則表現 $\rho_{\mathcal{L}(G)} : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}(G))$ を，この既約分解に沿って分解 $\rho_{\mathcal{L}(G)} = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_{L_i}^{\oplus n_i}$ しておく．すると先ほどの結果から，各 $g \in G$ に対して

$$\sum_x \varphi(x)\, \rho_{\mathcal{L}(G)}(x^{-1})(\delta_g) = \sum_i \sum_x \varphi(x)\, \rho_{L_i}^{\oplus n_i}(x^{-1})(\delta_g) = \sum_i (R_i^{\varphi})^{\oplus n_i}(\delta_g) = 0$$

となる．一方で，左辺は左正則表現なので

$$\sum_x \varphi(x) \rho_{\mathcal{L}(G)}(x^{-1})(\delta_g) = \sum_x \varphi(x) \delta_{x^{-1}g}$$

となる．以上を合わせると，$\sum_x \varphi(x)\delta_{x^{-1}g} = 0$ を得るが $\{\delta_y\}_y$ は線型独立だったから，これをみたすとき $\varphi(\forall x) = 0$ となる． $\square$

いままでのことから，次が分かる：

定理 2.29.

既約 G-表現（の同値類）たちを $\mathsf{Irr}(G)=\{[L_1],\dots,[L_r]\}$ と表示するとき，

(1) $r=\#\{\ G$ の共役類 $\}$.

(2) 正則表現は $\mathcal{L}(G)\cong_G L_1^{\oplus \mathsf{dim}L_1}\oplus\cdots\oplus L_r^{\oplus\mathsf{dim}L_r}$ と既約分解する.

定理の記号で

$$\#G \ = \ (\mathsf{dim}L_1)^2+\cdots+(\mathsf{dim}L_r)^2$$

が成り立つが，これを本稿の中だけ**次元等式**ということにする.

指標を計算するときの便利な道具を紹介. Recall that 元 $g\in G$ に対して $C_G(g)=\{x\in G\mid gx=xg\}$ とおき $g^G=\{xgx^{-1}\mid x\in G\}$ とおいたのだった.

命題 2.30 (第二直交関係)**.**

$\forall g,h\in G$ に対して，

$$\chi_{L_1}(g)\chi_{L_1}(h^{-1})+\cdots+\chi_{L_r}(g)\chi_{L_r}(h^{-1}) \ = \ \begin{cases}\#C_G(g) & \text{if } g^G=h^G,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

条件は δ_{g^G,h^G} とかけば，見にくいが見やすい.

Proof. 共役類による分解を $G=\bigsqcup_{i=1}^r c_i^G$ とかく. まず次の主張をいう：

$$\sum_{i=1}^r \frac{1}{\#C_G(c_i)}\chi_{L_k}(c_i)\chi_{L_\ell}(c_i^{-1}) \ = \ \delta_{k\ell}$$

指標の第一直交関係と，指標が類関数であることから，

$$\delta_{k\ell}=(\chi_{L_k},\chi_{L_\ell})=\frac{1}{\#G}\sum_x \chi_{L_k}(x)\chi_{L_\ell}(x^{-1})=\frac{1}{\#G}\sum_{i=1}^r \#c_i^G\cdot\chi_{L_k}(c_i)\chi_{L_\ell}(c_i^{-1})$$

あとは，全単射 $G/C_G(c_i)\leftrightarrow c_i^G$ に注意すればよい.

さて，次の $r\times r$ 行列を考える：

$$A \ := \ \big(\chi_{L_k}(c_\ell)\big)_{k\ell},\quad B \ := \ \big(\frac{1}{\#C_G(c_k)}\chi_{L_\ell}(c_k^{-1})\big)_{k\ell}$$

これは上記計算から

$$AB=(\sum_i \chi_{L_k}(c_i)\frac{1}{\#C_G(c_i)}\chi_{L_\ell}(c_i^{-1}))_{k\ell}=E_r$$

と分かる. 従って，特に正則であり，$BA=E_r$ も成り立つ. これの成分比較が主張のやつ. □

2.6 有限アーベル群の場合

群の演算が可換のとき，**アーベル群**と呼ばれるのだった. 今までの結果を有限アーベル群（アーベルかつ有限群）の場合に適用してみよう.

系 2.31.

有限群 G に関して TFAE:

(1) G アーベル群.
(2) $\#\mathsf{Irr}(G) = \#G$.
(3) 任意の既約 G-表現 L に対して $\mathsf{dim}L = 1$.

Proof. 以下で $r = \mathsf{Irr}(G) = \#\{\ G$ の共役類 $\}$ とおく.

(1) $\Longrightarrow$ (2): このとき G の共役類全体は G に一致する．よって $\#\{\ G$ の共役類 $\} = \#G$.
(2) $\Longrightarrow$ (3): 一般に $\mathcal{L}(G) \cong_G \bigoplus_{i=1}^r L_i^{\oplus n_i}$ と既約分解をかけば，$\#G = \sum_{i=1}^r n_i^2$ となるのであった．すると仮定から $r = \sum_{i=1}^r n_i^2$ であるから，全て $n_i = 1$ でなくてはならない.
(3) $\Longrightarrow$ (1): 上のことから，$\#G = \sum_{i=1}^r n_i^2 = r$ なので，共役類は trivial で，アーベル.

□

一般に一次元表現は既約であったが，上記のことからアーベル群の場合は，逆もいえたことになる（有限性なしは，以下の注意参照）.

注意 2.32.

シューアの補題からも，次のようにして（G の有限性なしに）証明可能：

アーベル群 G に対して，有限次元な既約表現 $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(L)$ が与えられたとき，$\forall g, h \in G$ に対して $gh = hg$ が成り立つので，

$$\rho(g)(h.v) = \rho(g)\big(\rho(h)v\big) = \rho(gh)(v) = \rho(hg)(v) = \rho(h)\big(\rho(g)v\big)$$

だから $\rho(g) \in \mathsf{End}_G(L)$ とわかる．一方で，シューアの補題から $\mathsf{End}_G(L) \cong \mathbb{C}$ なので，これは $\exists c_g \in \mathbb{C}^\times$ s.t. $\rho(g) = c_g.\mathsf{id}_L$ の形．すると，$0 \neq v \in L$ を固定したとき，$\mathbb{C}.v$ は L の G-部分表現となるから，既約性より一致し $\mathsf{dim}L = \mathsf{dim}(\mathbb{C}.v) = 1$.

以下で G を有限アーベル群とする.

有限生成アーベル群の基本定理から，有限生成アーベル群は必ず $\mathbb{Z}^\ell \oplus \bigoplus_i \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ の形をしているのだった．もっと詳しく m_i は適当な素数のベキ乗．いまの場合，有限なので $G = \bigoplus_i \mathbb{Z}/m_i\mathbb{Z}$ である.

補題 2.33.

素数 p に対して，$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ であったとする．このときの G の既約表現は

$$\rho_m : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \quad \overline{x} \longmapsto e^{2\pi\sqrt{-1}xm/p}$$

の $\rho_0, \cdots, \rho_{p-1}$ で尽くされる.

Proof. これらは一次元表現なので既約なのはよい．先のことから，有限アーベル群の既約表現の同型類は群の位数だけあるので，これらで全部. □

注意 2.34 (有限アーベル群であっても代数閉体上でなければ，既約表現は一次元にならぬ例)**.**

前やった有限巡回群 $G = C_n = \langle x \rangle$ の例

$$\rho_m : G \to \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}); x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta_m) & \sin(\theta_m) \\ -\sin(\theta_m) & \cos(\theta_m) \end{pmatrix}$$

に関して．$\mathbb{R}$ 上では $n \geqslant 3$ with $m \neq n/2$ で，表現が $\mathbb{C}$ 上のときのような 1 次元二つの分解をもたないので，既約と分かる．

注意 2.35.

他にも $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ なら，各 $0 \leqslant k \leqslant p-1, 0 \leqslant \ell \leqslant q-1$ に対して，$G \to \mathbb{C}^\times$; $(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto e^{2\pi\sqrt{-1}xk/p} \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}y\ell/q}$ が G のすべての既約表現を与える．

任意の群準同型たち $\alpha, \beta : G \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$(\alpha \cdot \beta)(x) \; := \; \alpha(x)\beta(x) \qquad (x \in G)$$

と定義すると，$\mathsf{Hom}_{\mathsf{grp}}(G, \mathbb{C}^\times)$ は有限アーベル群になる．実際，単位元は $\epsilon(x) := 1$ であり，逆元は $\overline{\alpha}(x) := \alpha(x)^{-1} = \overline{\alpha(x)}$ とおくと，$(\overline{\alpha} \cdot \alpha)(x) = \alpha(x)^{-1}\alpha(x) = 1$ となるので，これ．Note that $\mathcal{L}(G)$ の代数的構造とは違う．

定義 2.36.

$\hat{G} := \mathsf{Hom}_{\mathsf{grp}}(G, \mathbb{C}^\times)$ とかき G の**双対群 (dual group)** と呼ぶ．

任意の既約 G-表現 L に対して，L は一次元なので，指標は $\chi_L \in \hat{G}$．逆もしかりなので，$\hat{G} = \{\chi_L \mid L \in \mathsf{Irr}(G)\}$ である．換言すると，次の全単射を得る：

$$\mathsf{Irr}(G) \xrightarrow{\cong} \hat{G}; \quad L \longmapsto \chi_L$$

特に $\#G = \#\mathsf{Irr}(G) = \#\hat{G}$ に注意．

補題 2.37.

$\hat{G}$ は $\mathcal{L}(G)$ の正規直交基底をなす．

Proof. 直交性はスミ．アーベル性より $\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} = \{\varphi \in \mathcal{L}(G) \mid \forall x, y \in G, \varphi(xy) = \varphi(yx)\} = \mathcal{L}(G)$ である．一方で以前やったことから，すべての既約指標は $\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ の基底をなすのだったから，$\mathcal{L}(G)$ の基底でもある． □

よって，任意の写像（関数）$G \to \mathbb{C}$ は，直交する素性の良い群準同型 $\chi_L : G \to \mathbb{C}^\times$ たちの，和とスカラー倍で書けることが分かった．

スカラーを記述してみよう．そのために $\varphi \in \mathcal{L}(G)$ と $\alpha \in \hat{G}$ に対して，内積によって $\hat{\varphi}(\alpha) := (\varphi, \alpha)$ とおく．

補題 2.38.

任意の $\varphi \in \mathcal{L}(G)$ に対して，$\varphi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} \hat{\varphi}(\alpha)\,\alpha$.

Proof. とりあえず $\hat{G}$ は $\mathcal{L}(G)$ の基底をなすのであったから $\varphi = \sum_{\alpha \in \hat{G}} a_\alpha \alpha$ とかけている．すると，指標の直交性から $(\varphi, \beta) = a_\beta$ for all $\beta \in \hat{G}$ となる．よっておき方から，主張は従う． □

各 $x \in G$ と $\alpha \in \hat{G}$ に対して，$\langle x, \alpha \rangle := \alpha(x)$ とおく．

注意 2.39.

内積の定義から，$\hat{\varphi}$ は明示的に

$$\hat{\varphi}(\alpha) \ = \ \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \varphi(x) \langle x, \overline{\alpha} \rangle$$

となり，フーリエ変換

$$\hat{f}(\xi) \ = \ \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}x\xi}\, dx$$

に似ている．実際，$\alpha(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}***}$ であり，複素共役は $\overline{\alpha}(x) = e^{-2\pi\sqrt{-1}***}$ だから．補題の主張は，フーリエ逆変換を意味している．

一般に有限次元ベクトル空間 V について，一回の双対は $V \cong V^*$ だが自然ではない同型だった．しかし $V \cong V^{**}$ は自然だった．同様のことが群の場合でも言える：

定理 2.40 (有限群のポントリャーギン双対)**.**

$G \to \hat{\hat{G}}; x \mapsto \langle x, - \rangle$ は自然な群同型.

Proof. まず $\langle x, - \rangle : \hat{G} \to \mathbb{C}^\times$ が群準同型であることはよい．次に $x \neq y$ in G に対して，$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ を $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ をみたすようにとり固定する．このとき先の結果から

$$\sum_\alpha \hat{\varphi}(\alpha) \langle x, \alpha \rangle = \varphi(x) \neq \varphi(y) = \sum_\alpha \hat{\varphi}(\alpha) \langle y, \alpha \rangle$$

であるから $\exists \alpha \in \hat{G}$ s.t. $\langle x, \alpha \rangle \neq \langle y, \alpha \rangle$ である．よって $G \to \hat{\hat{G}}; x \mapsto \langle x, - \rangle$ は単射．一方で，$\#G = \#\hat{G} = \#\hat{\hat{G}}$ だから，あわせて全単射. □

2.7 対称群や交代群の例

まず一般に，次に注意：

注意 2.41.

群 G について．群論の知識から **交換子群**

$$[G, G] \ := \ \langle ghg^{-1}h^{-1} \in G \mid g, h \in G \rangle$$

は正規部分群であった．すると，これで割った $G/[G,G]$ はアーベル群になる．このとき群準同型 $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$ は

$$\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(h)\varphi(g) = \varphi(hg)$$

をみたすので $[G,G] \subset \mathsf{Ker}(\varphi)$，つまり準同型 $\overline{\varphi} : G/[G,G] \to \mathbb{C}^\times$ を誘導する．逆に準同型 $G/[G,G] \to \mathbb{C}^\times$ が与えられたら，自然な射影 $G \to G/[G,G]$ と合わせて，準同型 $G \to \mathbb{C}^\times$ を得る．

2.7.1 対称群の場合

まず言葉を定義する：

定義 2.42.

自然数 n について，自然数たち $(n_1, n_2, \dots, n_s)$ が n **の分割** $\iff$ $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_s > 0$ with $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$

このとき，記号として $(n_1, n_2, \dots, n_s) \vdash n$ とかかれたりする．

例 2.43.

$n = 5$ なら，

$$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$$

の 7 通り．これは**ヤング図形 (Young diagram)** を用いて表すと，分かりやすい．

さて，対称群 S_n を考える．元 $\sigma \in S_n$ は，互いに素な巡回置換（n までの数がただ 1 回だけ現れる）たちの積に分解できるのだった：

$$\exists \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s \in S_n : \text{巡回置換} \quad \text{s.t.} \quad \sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_s$$

意味を考えると，このときの巡回置換たちは並べ替えを除き一意的とわかる．そこで長い順に $\tau_1, \dots, \tau_s$ と並べるとき，数列 $\ell_i := \mathsf{length}(\tau_i)$ は σ に対して一意的に定まる．定め方から $\ell_1 \geqslant \cdots \geqslant \ell_s > 0$ with $\ell_1 + \cdots + \ell_s = n$ をみたすので，n の分割となっている．そこで，これを **σ の定める n の分割**と呼ぶことにする．

例 2.44.

$n = 9$ のとき $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \in S_9$ に関して，$\sigma = (134)(256)(78)(9)$ とできる．順に $\tau_1 = (134), \tau_2 = (256), \tau_3 = (78), \tau_4 = (9)$ とでもすると，σ の定める 9 の分割は $(\ell_1 = 3, \ell_2 = 3, \ell_3 = 2, \ell_4 = 1)$ となる．

ふたつの元 $\sigma, \tau \in S_n$ に対して，$\sigma \underset{\text{conj}}{\sim} \tau :\iff \exists \mu \in S_n$ s.t. $\tau = \mu \sigma \mu^{-1}$ は同値関係になるのであった．

補題 2.45.

$S_n/\underset{\text{conj}}{\sim} \longrightarrow \{\ n\text{ の分割 }\};\sigma \longmapsto (\sigma\text{ の定める }n\text{ の分割})$ は全単射.

Proof. まず well-defined をいう．互いに素な巡回置換分解を $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ とかくとき

$$\sigma \underset{\text{conj}}{\sim} \tau \iff \exists \mu \in S_n \text{ s.t. } \tau = \mu\sigma\mu^{-1} = (\mu\tau_1\mu^{-1})\cdots(\mu\tau_s\mu^{-1})$$

となる．いま $\tau_i = (k_1^{(i)}, \ldots, k_{\ell_i}^{(i)})$ と表示するとき，$\mu\tau_i\mu^{-1} = (\mu(k_1^{(i)}), \ldots, \mu(k_{\ell_i}^{(i)}))$ と知っているが，$\mu \in S_n$ なので $\mathsf{length}(\tau_i) = \mathsf{length}(\mu\tau_i\mu^{-1})$ とわかる．よって well-defined.

次に単射は，$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s, \tau = \mu_1 \cdots \mu_t$ の定める n の分割が一致すると仮定する．分割の定義から $s = t$ および，各 i に対して $\mathsf{length}(\tau_i) = \mathsf{length}(\mu_i)$ である．すると「群論」の知識から σ, τ は共役であることが従う（いわゆる型が一緒というやつ）．最後に全射は，任意の n の分割 $(n_1, \ldots, n_s)$ に対して，

$$\tau_1 := (1, 2, \ldots, n_1), \tau_2 = (n_1+1, \ldots, n_1+n_2), \ldots, \tau_s = (n_1 + \cdots + n_{s-1} + 1, \ldots, n_1 + \cdots + n_s)$$

とおけば，明らかに $\sigma := \tau_1 \cdots \tau_s$ が与えられたものになる． □

例 2.46.

全射性について，先の例の設定だとすると，$\tau'_1 := (123), \tau'_2 := (456), \tau'_3 := (78), \tau'_4 := (9)$ が証明での構成．いま $\mu := (234)$ に対して，

$$\mu(\tau'_1\tau'_2\tau'_3\tau'_4)\mu^{-1} = (\mu(1)\mu(2)\mu(3))(\mu(4)\mu(5)\mu(6))(\mu(7)\mu(8))(\mu(9)) = (134)(256)(78)(9) = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$$

となり，確かに $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 \underset{\text{conj}}{\sim} \tau'_1\tau'_2\tau'_3\tau'_4$.

系 2.47.

$\#\mathsf{Irr}(S_n) = \#\{\ n\text{ の分割 }\}$

Proof. 前の補題から $\#\{\ S_n\text{ の共役類 }\} = \#\{\ n\text{ の分割 }\}$ はよい．他方で，一般の有限群 G に対して，$\#\mathsf{Irr}(G) = \#\{\ G\text{ の共役類 }\}$ を知っている． □

例 2.48 ($S_3 = \{(1), (12), (23), (13), (123), (132)\}$ の既約表現)**.**

まずは，分割の個数を考えると $3 = 2+1 = 1+1+1$ の 3 つなので，先の系から $\mathsf{Irr}(S_3) = \{[L_1], [L_2], [L_3]\}$ とわかる．共役類は具体的には $S_3 = (1)^{S_3} \sqcup (12)^{S_3} \sqcup (123)^{S_3}$ である．自明に

$$\mathsf{triv} : S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \sigma \longmapsto 1, \qquad \mathsf{sgn} : S_3 \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \sigma \longmapsto \mathsf{sgn}(\sigma)$$

が 1 次元既約表現を与えているので，それぞれを L_1, L_2 としておく．

さて，知りたいのは L_3 である．まず次元は，次元等式から

$$6 = \#S_3 = (\mathsf{dim}L_1)^2 + (\mathsf{dim}L_2)^2 + (\mathsf{dim}L_3)^2 \qquad \therefore \quad \mathsf{dim}L_3 = 2$$

次に指標は，例えば第二直交関係（で $h = 1$ としたもの）より

$$\chi_{L_1}(\sigma)\chi_{L_1}(1) + \chi_{L_2}(\sigma)\chi_{L_2}(1) + \chi_{L_3}(\sigma)\chi_{L_3}(1) = \delta_{\sigma^{S_3},(1)^{S_3}} \cdot \#C_{S_3}((1)) = 6 \cdot \delta_{\sigma,(1)}$$

を得るが，一般に指標の単位元での値は次元に一致していたことに注意したら，左辺は $1 + \mathsf{sgn}(\sigma) + 2\chi_{L_3}(\sigma)$ となる．よってそれぞれで計算すると χ_{L_3} の値が分かる．表にまとめると次のようになる（**指標表**）：

		$(1)^{S_3}$	$(12)^{S_3}$	$(123)^{S_3}$
$L_1 = \mathsf{triv}$	χ_{L_1}	1	1	1
$L_2 = \mathsf{sgn}$	χ_{L_2}	1	-1	1
L_3	χ_{L_3}	2	0	-1

例 2.49 (S_3 の続き)**.**

第二直交関係が面倒であれば，次のような考え方もできる．まず S_3 の $V := \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]^{(1)} \cong \mathbb{C}X_1 \oplus \mathbb{C}X_2 \oplus \mathbb{C}X_3$ への入れ替え作用を考えると，先の記号で自明に $L_1 = \mathbb{C}(X_1 + X_2 + X_3)$ である．このとき，商 V/L_1 の指標は $\chi_{V/L_1} = \chi_V - \chi_{L_1}$ となるのであった．これの内積を計算してみる．

前やったことから $\chi_V(\sigma) = \#\{1 \leqslant i \leqslant 3 \mid \sigma(i) = i\}$ だったから，この V のは計算できる．実際，

$$(\chi_{V/L_1}, \chi_{V/L_1}) = (\chi_V, \chi_V) - 2(\chi_V, \chi_{L_1}) + (\chi_{L_1}, \chi_{L_1}) = 2 - 2(\chi_V, \chi_{L_1}) + 1$$

であり，最初のは指標の定義から（複素共役（逆元）は関係なく，また類関数であることに注意），

$$(\chi_V, \chi_V) = \frac{1}{6}(\chi_V(1)^2 + 3 \cdot \chi_V(12)^2 + 2 \cdot \chi_V(123)^2) = \frac{1}{6}(3^2 + 3 \cdot (3-2)^2 + 2 \cdot (3-3)^2) = 2$$

となり，最後のは L_1 が既約だから $(\chi_{L_1}, \chi_{L_1}) = 1$ であることから従う．よって，

$$(\chi_{V/L_1}, \chi_{V/L_1}) = 2 - 2(\chi_V, \chi_{L_1}) + 1 = 3 - 2(\chi_V, \chi_{L_1})$$

いま，これは重複度を与える量なので，必ず非負整数であることに注意すると，$(\chi_V, \chi_{L_1}) = 0, 1$ でなくてはならず，他方で，V の中に少なくとも一つは L_1 が既約因子として入っているので，$(\chi_V, \chi_{L_1}) \geqslant 1$ である．よって同時に満たすには $(\chi_V, \chi_{L_1}) = 1 \therefore (\chi_{V/L_1}, \chi_{V/L_1}) = 1$ と分かる．従って V/L_1 が 2 次元既約表現であることが分かった．

ちなみにこの時の商は，標準内積を用いて同一視でき，

$$V/L_1 \cong L_1^{\perp} = \{v \in V \mid (v, L_1)_{\mathbb{C}} = 0\} = \{c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 \mid c_1 + c_2 + c_3 = 0\}$$

もちろん $V \cong L_1 \oplus L_1^{\perp}$ と既約分解．行列表示 $\rho' : S_3 \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(L_1^{\perp}) \cong \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ を具体的にしたいなら

以前やった．ここでは基底を取り換えて $L_1^{\perp} = \mathbb{C}(X_1 - X_3) \oplus \mathbb{C}(X_2 - X_3)$ のときを計算すると，

$$\rho'(12) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \rho'(23) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right), \rho'(13) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \rho'(123) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \rho'(132) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$$

これで空間を実現したことになる．

2.7.2 交代群 A_4 の場合

四面体群

$$A_4 = \{(1); (123), (132); (134), (143); (124), (142); (234), (243); (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

について．簡単のために $\sigma = (12)(34), \tau = (234)$ とかく．すると共役類は

$$(1)^{A_4} = \{(1)\}, \quad \sigma^{A_4} = \{\sigma, (13)(24), (14)(23)\},$$
$$\tau^{A_4} = \{\tau, (124), (132), (143)\}, \quad (\tau^2)^{A_4} = \{\tau^2, (123), (134), (142)\}$$

の 4 つとわかる．従って，$\mathsf{Irr}(A_4) = \{[L_1], [L_2], [L_3], [L_4]\}$ である．

注意 2.50.

S_3 では (123) と (132) は同じ共役類に入ってる．しかし，すぐ分かるように A_4 では違う！一般には S_n と違って A_n の共役類の個数を与えるのは難しい．

さて一次元の指標は，最初の注意よりアーベル化を考えてからの方がよい．事実として，

$$[A_4, A_4] = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \quad \text{クラインの四元群}$$

を知っているので，これの商は，位数が 3 の素数でアーベルであることから

$$A_4/[A_4, A_4]\ (= \{[A_4, A_4], \tau[A_4, A_4], \tau^2[A_4, A_4]\})\ \cong\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

となる．これの指標は既に知っているので，求める $\chi_{L_i} : A_4 \to \mathbb{C}^{\times}$ は，各整数 k に対して，

$$\chi_{L_1}(\tau^k) = 1, \quad \chi_{L_2}(\tau^k) = e^{2\pi\sqrt{-1}k/3}, \quad \chi_{L_3}(\tau^k) = e^{-2\pi\sqrt{-1}k/3}$$

とでもすればよい．

あとひとつ L_4 が気になる．とりあえず次元等式

$$12 = \#A_4 = (\mathsf{dim}L_1)^2 + (\mathsf{dim}L_2)^2 + (\mathsf{dim}L_3)^2 + (\mathsf{dim}L_4)^2 = 3 + (\mathsf{dim}L_4)^2$$

から $\mathsf{dim}L_4 = 3$ とわかる．具体的にはどのような空間か？に関しては，次のセクションでやる．

注意 2.51.

一般に $G \geqslant H$ で，$(G : H) = 2$ の場合，次を知っている（[本間, §7] 参照）：

まず G の既約表現 L をとり固定し，制限表現を $K := \mathsf{res}_H^G(L)$ とおく．このとき，次のうちどちらかが成立：

(1) $L \not\cong_G L \otimes_{\mathbb{C}} \mathsf{sgn}$ のとき．このとき K は既約で $\mathsf{ind}_H^G(K) \cong L \oplus (L \otimes \mathsf{sgn})$.

(2) $L \cong_G L \otimes_{\mathbb{C}} \mathsf{sgn}$ のとき．このとき互いに非同型な既約 H-表現 $\exists S, S'$ が存在し $K \cong_H S \oplus S'$ で $\mathsf{ind}_H^G(S) \cong_G \mathsf{ind}_H^G(S') \cong_G L$

さらに，H の既約表現はこのようにして全て得られる．

このとき (1) のは **non-split 型**，(2) のは **split 型**と呼ばれる．

3 誘導表現

引き続き有限群 G について考える．

既約表現の存在はよいが，構成は？これに答えるひとつの方法として，部分群の表現から元の群の表現（誘導表現）を構成する方法がある．そうするとその既約分解を考えれば，既約表現が何個かは掘り起こせることになる．誘導表現を構成するためにまずは環・加群論から言葉を準備する．

3.1 環・加群論からの準備

一般に R を 1 をもつ環（群環のために非可換）とする．

定義 3.1.

アーベル群 M が**左 (resp. 右) R-加群**であるとは, $\exists R\times M\to M;(r,m)\mapsto r.m$ (resp. $\exists M\times R\to M;(m,r)\mapsto m.r$) s.t.

- $(r+s).m=r.m+s.m$ (resp. $m.(r+s)=m.r+m.s$)
- $r.(m+n)=r.m+r.n$ (resp. $(m+n).r=m.r+n.r$)
- $r.(s.m)=(rs).m$ (resp. $(m.r).s=m.(rs)$)
- $1.m=m$ (resp. $m.1=m$)

をみたすときをいう．また右かつ左 R-加群 M が**両側 R-加群**であるとは，$r.(m.s)=(r.m).s$ をみたすときをいう．

作用は $R\to\mathsf{End}_{\mathbb{Z}}(M)$ とみれば，表現と似ている．

定義 3.2.

左 R-加群たち M,N の間のアーベル群準同型 $f:M\to N$ が **R-準同型**であるとは, $f(r.m)=r.f(m)$ をみたすときをいう．全単射のとき **R-同型**と．いつものように M から N への R-準同型全体を $\mathsf{Hom}_R(M,N)$ とかく．もし M が両側 R-加群（あるいは R が可換環）であれば，次でまた左 R-加群となる：

$$(f+g)(m):=f(m)+g(m),\quad (r.f)(m):=f(m.r)$$

また $M^*:=\mathsf{Hom}_R(M,R)$ を M の**双対 R-加群**という．

もし R が体なら，加群の概念はベクトル空間と同じ．ベクトル空間のときと同じように，いろいろ概念を定義していく：

定義 3.3.

左 R-加群 M に対して，

- 元 $x_1, \dots, x_n \in M$ が R **上線型独立**であるとは，次をみたすときをいう：

$$\forall a_i \in R \quad [\sum_i a_i x_i = 0 \Longrightarrow a_i = 0]$$

- 部分集合 $B \subset M$ が M **の基底**であるとは，B の任意の有限個の（相異なる）元が線型独立であり，かつ $\langle B \rangle_R := \sum_{x \in B}^{\text{fin.}} Rx := \{\sum_i^{\text{fin.}} a_i x_i \in M \mid a_i \in R, x_i \in B\} = M$ をみたすときをいう．
- M が**自由 R-加群** $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, B$: M の基底．$\mathsf{rank}(M) := \# B$ を M の**ランク**という．

注意 3.4.

部分集合 $B \subset M$ について，$n := \# B < \infty$ とする．このとき B が基底になることと，

$$R^n \longrightarrow M; \quad (a_1, \dots, a_n) \longmapsto \sum_i a_i x_i$$

が R-同型であることが同値．ここで直積 $R^n = R \times \cdots \times R$ は，それぞれの成分ごとの積で R-加群．

補題 3.5.

R が可換と仮定すと，有限生成な自由 R-加群のランクは一定．

Proof. 先の注意から $R^m \cong R^n \Longrightarrow m = n$ を言えばよい．R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ をとると，仮定の可換性より $k := R/\mathfrak{m}$ は体になる．自然な全射 $\varphi : R^n \to (R/\mathfrak{m})^n = k^n$ を考えたとき，核は $\mathsf{Ker}(\varphi) = \mathfrak{m}R^n$ となっているので $R^n/\mathfrak{m}R^n \cong k^m$．すると $R^m \cong R^n$ から $k^n \cong k^m$ が従い，体の時は $n = m$ と知っているのでよい． □

非空な集合 X に対して，$RX := \bigoplus_{x \in X} Rx := R^{\oplus \# X}$ は自由 R-加群．

定義 3.6.

右 R-加群 M と左 R-加群 N に対して，$M \times N$ を自由基底としてもつ $\mathbb{Z}$-加群の剰余加群

$$M \otimes_R N \; := \; \Big(\bigoplus_{(m,n) \in M \times N} \mathbb{Z}(m,n) \Big) \,/\, (\text{ 以下ので生成される部分 } \mathbb{Z}\text{-加群 })$$

- $m, m' \in M, n \in N, \;\; (m + m', n) - (m, n) - (m', n)$
- $m \in M, n, n' \in N, \;\; (m, n + n') - (m, n) - (m, n')$
- $r \in R, m \in M, n \in N, \;\; (m.r, n) - (m, r.n)$

を M, N の R 上の**テンソル積**という．標準射影と元の行先を $\otimes_R : M \times N \to M \otimes_R N; (m, n) \mapsto m \otimes_R n$ とかく．

定義から $M \otimes_R N$ の任意の元は $\sum_i m_i \otimes_R n_i$ のかたち．基礎環 R が分かりきっているときは $\otimes_R = \otimes$ と書くことが多い．

命題 3.7.

もし M が両側 R-加群（R が可換環ならいつでも so）であれば,

$$r.(m \otimes_R n) \ := \ (r.m) \otimes_R n$$

とすることで $M \otimes_R N$ は左 R-加群になる.

Proof. 実際，well-defined が気になっている．作用する前は $m.r' \otimes_R n = m \otimes_R r'n$ が成り立っているので，これにいまの作用を施すと

$$r.(m.r' \otimes_R n) \overset{\text{def}}{=} r.(m.r') \otimes_R n \overset{\text{bi-mod}}{=} (r.m).r' \otimes_R n = r.m \otimes_R r'.n = r.(m \otimes_R r'.n)$$

よって，作用は well-defined である． □

命題 3.8.

任意のアーベル群 X と，任意の双線型射 $f : M \times N \to X$ with $f(m.r, n) = f(m, r.n)$ に対して，アーベル群射 $\exists! \tilde{f} : M \otimes_R N \to X$ s.t. $f = \tilde{f} \circ \otimes_R$.

Proof. 存在性は，まず $f' : \bigoplus \mathbb{Z}(m, n) \to X; \sum_i a_i(m_i, n_i) \mapsto \sum_i a_i f(m_i, n_i)$ と拡張したとき，定義から f' はテンソルの 3 条件を満たすことがすぐ分かる．よって，商に持ち上がる．一意性は，別のがあったら線型性より一致することがすぐ分かる． □

命題 3.9.

アーベル群の同型を除き $M \otimes_R N$ は上記補題の性質をみたす唯一のもの.

Proof. もし別の L が同じ性質をみたすとすると，$M \otimes_R N$ の唯一性ので $X = L$ の場合を考えれば，$\exists! \varphi : M \otimes_R N \to L$ がある．他方で L の唯一性ので $X = M \otimes_R N$ の場合を考えれば，$\exists! \psi : L \to M \otimes_R N$ がある．合成は $\varphi \circ \psi : L \to L$ である．特に，L の唯一性で $X = L$ 自身を考えたら id_L となるので，可換図式と射の唯一性から $\varphi \circ \psi = \mathsf{id}_L$ でなくてはならない．逆も言えるから φ は全単射. □

命題 3.10.

適当な方向の R-加群たち M, N, L, P, M_λ について以下が成立.

(1) 単位律：$R \otimes_R M \to M; \sum_i r_i \otimes_R m_i \mapsto r_i.m_i$ は R-同型．同様に $M \otimes_R R \cong M$.
(2) 結合律：$(M \otimes_R N) \otimes_R L \cong M \otimes_R (N \otimes_R L)$.
(3) 対称性：$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$.
(4) 直和と：$(\bigoplus_\lambda M_\lambda) \otimes_R N \cong \bigoplus_\lambda (M_\lambda \otimes_R N)$.
(5) 適当な R-準同型たち $f : M \to L, g : N \to P$ に対して，$f \otimes_R g : M \otimes_R N \to L \otimes_R P$; $m \otimes_R n \mapsto f(m) \otimes_R g(n)$ は well-defined.
(6) 以下で R を体とし，M, N, L が有限次元であるとする.

(a) M の基底を $\{m_i\}$，N の基底を $\{n_j\}$ とかくとき，$M \otimes N$ の基底は $\{m_i \otimes_R n_j\}$．特に $\mathsf{dim}(M \otimes_R N) = \mathsf{dim}M \cdot \mathsf{dim}N$.

(b) $\mathsf{Hom}_R(M, N) \cong M^* \otimes_R N$.

(c) $\mathsf{Hom}_R(M \otimes_R N, L) \cong (M \otimes_R N)^* \otimes_R L \cong M^* \otimes_R N^* \otimes_R L \cong \mathsf{Hom}_R(M, L) \otimes_R N^*$.

(d) $\mathsf{Hom}_R(M, N \otimes_R L) \cong \mathsf{Hom}_R(M, N) \otimes_R L$.

Proof. いずれも quite easy to see. □

注意 3.11.

テンソルを用いれば，代数の定義は次のように（やさしい言葉で）いいかえられる．つまり，A が $\mathbb{C}$-代数であるとは，A は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間であり，線型写像たち

$$m : A \otimes_{\mathbb{C}} A \longrightarrow A, \qquad u : \mathbb{C} \longrightarrow A$$

が存在して，$m \circ (\mathsf{id}_A \otimes_{\mathbb{C}} m) = m \circ (m \otimes_{\mathbb{C}} \mathsf{id}_A)$ かつ $m \circ (\mathsf{id}_A \otimes_{\mathbb{C}} u) = \mathsf{id}_A = m \circ (u \otimes_{\mathbb{C}} \mathsf{id}_A)$ が成立するもののことをいう．ここで最後のは $A \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong A \cong \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} A$ と同一視している．この矢印をひっくり返すことで**余代数**の概念を得る．もっと，環上の代数・余代数も in the same fashion で可．

例 3.12.

群 G の有限次元表現 V, W について．これはもちろん $R = \mathbb{C}$-加群（ベクトル空間）なので，テンソル $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ が考えられる．これは次のような対角作用で G-表現になる

$$\rho_{V \otimes_{\mathbb{C}} W} : G \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{C}} W); \quad g \longmapsto (\sum_i v_i \otimes_{\mathbb{C}} w_i \mapsto \sum_i \rho_V(g) v_i \otimes_{\mathbb{C}} \rho_W(g) w_i)$$

行列で表示すると，$\rho_{V \otimes_{\mathbb{C}} W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g)$ である．ここで右辺は行列の**クロネッカー積**で，一般に次で定義される：

$$A = (a_{ij})_{ij},\ B = (b_{k\ell})_{k\ell} \quad \Longrightarrow \quad A \otimes B \ := \ (a_{ij} B)_{ij}$$

特に，トレースは $\mathsf{tr}(A \otimes B) = \mathsf{tr}(A)\mathsf{tr}(B)$ であるから，指標は $\chi_{V \otimes_{\mathbb{C}} W}(x) = \chi_V(x) \cdot \chi_W(x)$.

このように，勝手な表現がふたつあればテンソル $\otimes_{\mathbb{C}}$ で新しい表現がどんどん作れる．しかし，たとえ V, W が既約だとしても $V \otimes_{\mathbb{C}} W$ は一般に既約とは限らない．それでも完全可約性から，既約たちの直和で書くことは可能である．するとその時の出てくる既約たちおよび重複度を知りたくなる．これは一般に難しい話しで，組合せ論の用語を以てして，いろいろな結果が知られている．

注意 3.13.

例えば対称群の場合，既約表現たちは $\mathsf{Irr}(S_n) = \{[L_\lambda] \mid \lambda$ は n の分割 $\}$ の形にかけるのだった（ただし L_λ の具体性は，**ヤング対称子**（[岩堀] など参照）を使えば群環から構成できるが，結局何で実

現しても同型なので，いまは無視する）．このとき，

$$L_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} L_\mu \;\cong_{S_n}\; \bigoplus_\nu L_\nu^{\oplus c_{\lambda\mu}^\nu}$$

と分解したときの係数 $c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ が知りたい．指標の直交性から $c_{\lambda\mu}^\nu = (\chi_\lambda\chi_\mu, \chi_\nu)$ くらいはすぐ分かる．完全に丸投げになるが，例えば [本間, §6.2.5] をご覧ください．

テンソルを用いた大切な操作は，**係数拡大**：環の拡大 R/S があったとする．このとき左 S-加群 N に対して，$R \otimes_S N$ は自然に左 R-加群になる．

$$R \otimes_S - \;:\; \{\text{ 左 } S\text{-加群 }\} \longrightarrow \{\text{ 左 } R\text{-加群 }\}$$

という関手を得たことになる．すぐ分かることだが，任意の左 R-加群 M と左 S-加群 N に対して，$\mathsf{Hom}_R(R \otimes_S N, M) \cong \mathsf{Hom}_S(N, \mathsf{res}_S^R(M))$ が成立（随伴性，一種のフロベニウス相互律）．ここで $\mathsf{res}_S^R(M)$ は自然な作用の制限.

3.2 群環

有限群 G を基底とする $\mathbb{C}$-ベクトル空間（自由 $\mathbb{C}$-加群）として $\mathbb{C}G := \bigoplus_{g\in G}\mathbb{C}g$ を考えると，これは群の積の延長で $\mathbb{C}$-代数（非可換環）となる：

$$(\sum_{g\in G} c_g g)(\sum_{h\in G} d_h h) \;:=\; \sum_{g,h} c_g d_h gh \qquad (c_g, d_h \in \mathbb{C})$$

この $\mathbb{C}G$ は慣例で**群環**と呼ばれる．また当然のように，これは有限次元 G-表現になっている．

補題 3.14.

ベクトル空間 V 上の構造に関して，G-表現 $\iff$ 左 $\mathbb{C}G$-加群．また G-準同型 $\iff$ $\mathbb{C}G$-加群射もいえるので，G-表現圏と左 $\mathbb{C}G$-加群圏とは圏同値.

Proof. まず表現 $\rho : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられたとき，加群構造射は $\mathbb{C}G \to \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V); \sum_g c_g g \mapsto (v \mapsto \sum_g c_g\rho(g)v)$ でよい．逆に加群構造射 $\alpha : \mathbb{C}G \to \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられたとき，表現は $G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(V); g \mapsto \alpha(g)$ でよい．実際これが全単射を言わねばだが，それは $\alpha(g)\circ\alpha(g^{-1}) = \alpha(e) = \mathsf{id}_V$ だから O.K. また，射の対応もあきらか. □

他方で，$\mathcal{L}(G) = \mathsf{Map}(G, \mathbb{C})$ にも，以下のような**畳み込み積 (convolution product)** を入れることができる：

$$(\varphi * \psi)(x) \;:=\; \sum_{g\in G} \varphi(xg^{-1})\psi(g).$$

ここで $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(G), x \in G$.

補題 3.15.

$\mathcal{L}(G)$ は上記の積で $\mathbb{C}$-代数.

Proof. 環になることを言えばよい．環の単位元は明らかに δ_e である．結合律が非自明：

$$((\varphi * \psi) * \chi)(x) = \sum_g (\varphi * \psi)(xg^{-1})\chi(g) = \sum_g \sum_h \varphi(xg^{-1}h^{-1})\psi(h)\chi(g)$$

$$(\varphi * (\psi * \chi))(x) = \sum_y \varphi(xy^{-1})(\psi * \chi)(y) = \sum_y \sum_z \varphi(xy^{-1})\psi(yz^{-1})\chi(z)$$

最後のを $z = h^{-1}y$ ($\Leftrightarrow yz^{-1} = h$) と変数変換すれば，最初のが出る． □

定義から，

$$\mathcal{L}(G) \;=\; \mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}G, \mathbb{C}) \;=\; (\mathbb{C}G)^*$$

なので，ベクトル空間としては $\mathbb{C}G \cong \mathcal{L}(G)$ はよい．実は，自然な $\mathbb{C}G$ の代数構造をこれで読み替えたものが，畳み込み積であることをいう：

命題 3.16.

$\mathbb{C}$-代数として $\mathbb{C}G \cong \mathcal{L}(G)$.

Proof. 全単射は以下で与えられる：

$$\mathbb{C}G \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}(G); \qquad \sum_{g \in G} c_g g \longmapsto \sum_{g \in G} c_g \delta_g, \quad \sum_{x \in G} \varphi(x)x \longleftarrow\!\shortmid\, \varphi.$$

実際，これらが互いに逆であることは，($\hookrightarrow$) $\sum_x \varphi(x)\delta_x : y \mapsto \sum_x \varphi(x)\delta_x(y) = \varphi(y)$ また ($\hookleftarrow$) $\sum_x \delta_g(x)x = g$ よりすぐ分かる．積を保つことは，

$$\begin{aligned} \varphi * \psi \quad &\mapsto \quad \sum_x (\varphi * \psi)(x)x = \sum_x \sum_g \varphi(xg^{-1})\psi(g)x \\ &\underset{h = xg^{-1}}{=} \sum_h \sum_g \varphi(h)\psi(g)hg = (\sum_h \varphi(h)h)(\sum_g \psi(g)g) \end{aligned}$$

でよい． □

以上から次が従う：

系 3.17.

G-表現の圏 $\approx$ 左 $\mathbb{C}G$-加群の圏 $\approx$ 左 $\mathcal{L}(G)$-加群の圏.

よって，群 G（の表現）は結局は，群上の “関数環” $\mathcal{L}(G)$（の加群）を調べるのと同じであることが分かった．群よりは環の方がたくさんの構造が入っているので調べやすい．また G が位相群（群かつ位相空間であり各種演算が連続）であれば，$\mathcal{L}(G)$ として連続関数環を考えたり（例えば [高瀬] など参照），G がアフィン群スキーム（可換環上の表現可能群関手）であれば，対応する可換ホップ代数 $\mathcal{O}(G)$ を考えたり（例えば [Waterhouse] など参照）と，むしろ関数環の方が「実体である」と，考えるほうが扱いやすいことがらも多いかな，というのが個人的感覚である（もちろんすべてではないが）．例えば量子群などは名前とはうらはらに群としての実体はなく，ある種の非可換ホップ代数のことである．

さて $\mathcal{L}(G)$ の環としての中心は

$$Z(\mathcal{L}(G)) := \{\varphi \in \mathcal{L}(G) \mid \forall\psi \in \mathcal{L}(G), \varphi * \psi = \psi * \varphi\}$$

であるが，実はこれは既約指標らでコントロールできる：

命題 3.18.

既約 G-表現を $\mathsf{Irr}(G) = \{[L_1], \ldots, [L_r]\}$ とかくとき，既約指標たち $\{\chi_{L_1}, \ldots, \chi_{L_r}\}$ は，$Z(\mathcal{L}(G))$ の（正規直交）基底になる．

Proof. まず $\chi_{L_k} \in Z(\mathcal{L}(G))$ であることは，指標が類関数であることから $\forall\varphi \in \mathcal{L}(G)$,

$$(\varphi * \chi_{L_k})(x) = \sum_g \varphi(xg^{-1})\chi_{L_k}(g) \underset{h=xg^{-1}}{=} \sum_h \varphi(h)\chi_{L_k}(h^{-1}x) = \sum_h \varphi(h)\chi_{L_k}(xh^{-1}) = (\chi_{L_k} * \varphi)(x)$$

となるのでよい．次に，任意の $\varphi \in Z(\mathcal{L}(G))$ と $g, x \in G$ に対して，

$$(\varphi * \delta_g)(x) = \sum_h \varphi(xh^{-1})\delta_g(h) = \varphi(xg^{-1}), \quad (\delta_g * \varphi)(x) = \sum_h \delta_g(xh^{-1})\varphi(h) = \varphi(g^{-1}x)$$

であるから $\varphi \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ とわかり，以前のことから従う． □

注意 3.19.

証明中（をよく考える）ことから $Z(\mathcal{L}(G)) = \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ もわかる．

このことを用いると，指標の第二直交関係の別証を得る：

注意 3.20 (指標の第二直交関係の別証)**.**

各 $g \in G$ に対して

$$\alpha_g(x) \ := \begin{cases} 1 & \text{if } x \in g^G, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．すると明らかに $\forall h \in G$, $\alpha_g(hxh^{-1}) = \alpha_g(x)$ をみたす．よって，$\alpha_g \in Z(\mathcal{L}(G))$．補題から線形結合で $\alpha_g = a_1^g\chi_{L_1} + \cdots + a_r^g\chi_{L_r}$ with $a_k^g \in \mathbb{C}$ とかくとき，$a_k^g = \dfrac{1}{\#C_G(g)} \cdot \chi_{L_k}(g^{-1})$ となることを示す．

まず共役類の代表元を $c_1, \ldots, c_r$ とかく：$G = \bigsqcup_k c_k^G$．この時に $\alpha_{c_i} = \sum_k a_k^{c_i}\chi_{L_k}$ を調べる．第一直交関係から，内積は

$$(\alpha_{c_i}, \chi_{L_j}) = \sum_k a_k^{g_i}(\chi_{L_k}, \chi_{L_j}) = a_j^{c_i}$$

となるが，他方で内積の定義から

$$(\alpha_{g_i}, \chi_{L_j}) = \frac{1}{\#G}\sum_{x \in G} \alpha_{c_i}(x)\chi_{L_j}(x^{-1}) = \frac{1}{\#G} \cdot \#c_i^G \cdot \chi_{L_j}(c_i^{-1}) = \frac{1}{\#C_G(c_i)} \cdot \chi_{L_j}(c_i^{-1})$$

最後は全単射 $G/C_G(c_i) \leftrightarrow c_i^G$ および $\chi_{L_j}(hc_i^{-1}h^{-1}) = \chi_{L_j}(c_i^{-1})$ を使った．よって主張は O.K.

さて，α_g の定義から

$$\begin{cases} 1 & \text{if } h^{-1} \in g^G \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = \alpha_g(h^{-1}) = \sum_k \frac{1}{\#C_G(g)} \cdot \chi_{L_k}(g^{-1})\chi_{L_k}(h^{-1})$$

となっているから $\#C_G(g)$ をかけて，

$$\sum_k \chi_{L_k}(g^{-1})\chi_{L_k}(h^{-1}) = \begin{cases} \#C_G(g) & \text{if } h^{-1} \in g^G \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を得る．ここで $g \leftrightarrow g^{-1}$ と変えれば，$C_G(g) = C_G(g^{-1})$ であることと，$h^{-1} \in (g^{-1})^G \iff h \in g^G \iff h^G = g^G$ に注意すればよい．

3.3 誘導表現

以下で H を G の部分群とする．このとき，$\mathbb{C}H$ は $\mathbb{C}G$ の部分 $\mathbb{C}$-代数となることはすぐ分かる．よってテンソル関手 $\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} - : (\text{左 } \mathbb{C}H\text{-加群}) \to (\text{左 } \mathbb{C}G\text{-加群})$ が考えられるのだった．

定義 3.21.

H-表現 W に対して，

$$\mathsf{ind}_H^G(W) := \mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W$$

を W の G への**誘導表現**という．対応する加群射を $\mathsf{ind}(\rho) : G \to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathsf{ind}_H^G(W))$ と書くことにする．

テンソルの定義から，$\mathsf{ind}_G^G(V) \cong_G W$ であり，$G \geqslant H \geqslant K$ という部分群の列があったとき，任意の K-表現 Y に対して $\mathsf{ind}_K^G(Y) \cong_G \mathsf{ind}_H^G(\mathsf{ind}_K^H(Y))$ と，推移律が成り立つ．このセクションでは誘導表現の基本的なことを確認していく．より深い話は，例えば [Serre, Chapter 7] など参照.

命題 3.22.

有限次元 H-表現 W に対して，$\mathsf{dim}(\mathsf{ind}_H^G(W)) = (G:H) \cdot \mathsf{dim} W$.

Proof. 代表元をとって $G/H = \{g_1H, \dots, g_kH\}$ とかくとき，ベクトル空間として $\mathbb{C}G = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{C}g_iH$ となっている．すると右 $\mathbb{C}H$-加群として $\mathbb{C}G \cong \mathbb{C}H^{\oplus k}$ が言える．従って

$$\mathbb{C}G \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong \mathbb{C}H^{\oplus k} \otimes_{\mathbb{C}H} W \cong (\mathbb{C}H \otimes_{\mathbb{C}H} W)^{\oplus k} \cong W^{\oplus k}$$

であるから，$\mathsf{dim}(\mathsf{ind}_H^G(V)) = k \cdot \mathsf{dim} W$. □

H-表現 W に対して，自然に $\mathsf{Map}(G, W)$ はベクトル空間だが，その部分集合として

$$\mathsf{Ind}_H^G(W) := \{\varphi \in \mathsf{Map}(G, W) \mid \forall h \in H, \forall x \in G, \varphi(xh) = h^{-1}.(\varphi(x))\}$$

を考える．

補題 3.23.

H-表現 W に対して，$\mathsf{Ind}_H^G(W)$ は左正則表現と同様に $g.\varphi(x) := \varphi(g^{-1}x)$ $(g, x \in G)$ とすることで G-表現になる．

Proof. 和とスカラーで閉は自明．これが表現になることも，

$$((gh).\varphi)(x) = \varphi((gh)^{-1}x) = \varphi(h^{-1}g^{-1}x) = (h.\varphi)(g^{-1}x) = (g.(h.\varphi))(x)$$

より $(gh).\varphi = g.(h.\varphi)$ で O.K. □

命題 3.24.

H-表現 W に対して，G-加群として $\mathsf{Ind}_H^G(W) \cong_G \mathsf{ind}_H^G(W)$.

Proof. 全単射を与える写像は,

$$\Phi : \mathsf{ind}_H^G(W) \longrightarrow \mathsf{Ind}_H^G(W); \quad g \otimes_{\mathbb{C}H} w \longmapsto (x \mapsto \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}\delta_{gh,x}\cdot h^{-1}.w)$$

$$\Psi : \mathsf{Ind}_H^G(W) \longrightarrow \mathsf{ind}_H^G(W); \quad \varphi \longmapsto \sum_{g\in G} g \otimes_{\mathbb{C}H} \varphi(g)$$

実際，まずは Φ に関しては well-defined を２つ言わねばならない．簡単のため $\otimes$ とかく．

- テンソルは $gh' \otimes w = g \otimes h'.w$ を保つかどうかだが,

$$\Phi(gh' \otimes w) = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}\delta_{gh'h,x}\cdot h^{-1}.w \underset{h''=h'h}{=} \frac{1}{\#H}\sum_{h''\in H}\delta_{gh'',x}\cdot h''^{-1}h'.w = \Phi(g\otimes h'.w)$$

- $\Phi(g\otimes w)$ が条件 $\Phi(g\otimes w)(xh') = h'^{-1}\Phi(g\otimes w)(x)$ を満たすこと．まず $\Phi(g\otimes w)(xh') = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}\delta_{gh,xh'}\cdot h^{-1}.w$ となる．他方で,

$$h'^{-1}\Phi(g\otimes w)(x) = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}\delta_{gh,x}\cdot h'^{-1}h^{-1}.w \underset{h''=h'h}{=} \frac{1}{\#H}\sum_{h''\in H}\delta_{gh''h'^{-1},x}\cdot h''^{-1}.w$$

  いま，デルタは $gh''h'^{-1} = x \iff gh'' = xh'$ から一致.

次に互いに逆であることは,

$$(\Phi\Psi(\varphi))(x) = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}h^{-1}.\sum_{g\in G}\delta_{gh,x}\varphi(g) \underset{g=xh^{-1}}{=} \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}h^{-1}.\varphi(xh^{-1}) = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}\varphi(xh^{-1}h) = \varphi(x)$$

$$\Psi\Phi(g\otimes w) = \frac{1}{\#H}\sum_{a\in G}a\otimes\sum_{h\in H}\delta_{gh,a}\cdot h^{-1}.w = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}gh\otimes h^{-1}.w = \frac{1}{\#H}\sum_{h\in H}g\otimes w = g\otimes w$$

□

注意 3.25.

少し補足.

(1) 写像 Φ の行先は $\sum_{h\in H}\delta_{gh,x}\cdot h^{-1}.w = x^{-1}g.w$ と感じるが，これでは $x^{-1}g\notin H$ のときにダメ.

(2) 標数によっているように見えるが，次のように modify すればよい：$G/H=\{g_1H,\dots,g_kH\}$ とかくとき，各 $w\in W$ に対して，

$$\varphi_i^w(x) := \begin{cases} x^{-1}g_i.w & \text{if } x^{-1}g_i\in H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくとき

$$\mathsf{ind}_H^G(W) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Ind}_H^G(W); \qquad g_i\otimes w \longmapsto \varphi_i^w, \quad \varphi \longleftarrow \sum_{i=1}^k g_i\otimes\varphi(g_i)$$

引き続き，左剰余類分解を $k:=(G:H)$ として $G=\bigsqcup_{i=1}^k g_iH$ とかく.

命題 3.26.

n 次元 H-表現 $\rho: H\to \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(W)\cong \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して，誘導表現の行列表示は

$$\mathsf{ind}(\rho): G \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathsf{ind}_H^G(W))\cong \mathsf{GL}_{kn}(\mathbb{C}); \quad g\longmapsto \begin{pmatrix} \rho(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \rho(g_1^{-1}gg_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(g_k^{-1}gg_1) & \cdots & \rho(g_k^{-1}gg_k)\end{pmatrix}$$

で与えられる．ただし ρ の中が H の元でないとき（i.e., $gg_j\notin g_iH$）は，ゼロとしておく．特に，

$$\chi_{\mathsf{ind}_H^G(W)}(x) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ g_i^{-1}xg_i\in H}} \chi_W(g_i^{-1}xg_i) = \sum_{\substack{gH\in G/H \\ g^{-1}xg\in H}} \chi_W(g^{-1}xg).$$

Proof. 同一視 $\mathsf{ind}_H^G(W)\cong\bigoplus_i \mathbb{C}g_i\otimes_{\mathbb{C}H}W$ しとく．各 $g\in G$ に対して，$g.(g_1\otimes w_1+\cdots+g_k\otimes w_k)$ for some $w_1,\dots,w_k\in W$ を計算すればよい．いま $gg_i\in G=\bigsqcup_\ell g_\ell H$ だから，$\exists \ell_i$ s.t. $g_{\ell_i}^{-1}gg_i\in H$ とできる．すると $\otimes$ が $\mathbb{C}H$ 上であったことに注意すれば

$$\begin{aligned} g.(g_1\otimes w_1+\cdots+g_k\otimes w_k) &= gg_1\otimes w_1+\cdots+gg_k\otimes w_k \\ &= g_{\ell_1}g_{\ell_1}^{-1}gg_1\otimes w_1+\cdots+g_{\ell_k}g_{\ell_k}^{-1}gg_k\otimes w_k \\ &= g_{\ell_1}\otimes\rho(g_{\ell_1}^{-1}gg_1)w_1+\cdots+g_{\ell_k}\otimes\rho(g_{\ell_k}^{-1}gg_k)w_k \end{aligned}$$

ここで同一視から，$g_j\otimes x$ が縦ベクトルの j 番目に x が入っているという事なので，上記計算から，

$$\mathsf{ind}(\rho)(g)\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \rho(g_{\ell_1}^{-1}gg_1)w_1 \\ \vdots \end{pmatrix} =_{(\ell_1>)} \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & \\ \rho(g_{\ell_1}^{-1}gg_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \cdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_k\end{pmatrix}.$$

指標の方はこれよりすぐ従う． □

テンソルのときのように，G-表現 V に関して，作用を制限して H-表現とみるとき $\mathsf{res}_H^G(V)$ とかく．もちろん V が有限次元のとき $\chi_{\mathsf{res}_H^G(V)}(h) = \chi_V(h)$ for all $h \in H$ である．

命題 3.27 (Frobenius の相互律)**.**

有限次元 G-表現 V と有限次元 H-表現 W に対して，$(\chi_{\mathsf{ind}_H^G(W)}, \chi_V)_G = (\chi_W, \chi_{\mathsf{res}_H^G(V)})_H$．ここで左辺は G の内積，右辺は H の内積.

Proof. まず全単射

$$\{x \in G \mid g_i^{-1} x g_i \in H\} \longrightarrow H; \qquad x \longmapsto g_i^{-1} x g_i, \quad g_i h g_i^{-1} \longleftarrow h$$

に注意すると，先の結果から

$$\begin{aligned}
(\chi_{\mathsf{ind}_H^G(W)}, \chi_V)_G &= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \chi_{\mathsf{ind}_H^G(W)}(x) \chi_V(x^{-1}) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{x \in G} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ g_i^{-1} x g_i \in H}} \chi_W(g_i^{-1} x g_i) \chi_V(x^{-1}) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in H} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \chi_W(h) \chi_V((g_i h g_i^{-1})^{-1}) \qquad (h = g_i^{-1} x g_i) \\
&= \frac{1}{\#G} \sum_{h \in H} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \chi_W(h) \chi_V(h^{-1}) \qquad (\because \text{指標は類関数}) \\
&= \frac{1}{\#G} \cdot k \cdot \sum_{h \in H} \chi_W(h) \chi_V(h^{-1})
\end{aligned}$$

となる．あとは $\#G = k \cdot \#H$ に注意すればよい． □

命題 3.28.

H の 1 次元自明表現 1_H に対して，$\forall x \in G$, $\chi_{\mathsf{ind}_H^G(1_H)}(x) = \dfrac{\#G}{\#x^G} \cdot \dfrac{\#(x^G \cap H)}{\#H}$.

Proof. まず共役作用による分解を $G = \bigsqcup_{i=1}^r c_i^G$ とかくとき，左辺は先のことから，

$$\chi_{\mathsf{ind}_H^G(1_H)}(x) = \sum_{i=1}^r \chi_{1_H}(c_i^{-1} x c_i) = \frac{1}{\#H} \sum_{g \in G} \chi_{1_H}(g^{-1} x g)$$

となる．一方で，次の集合とその上の関係を考える：

$$X := \{g \in G \mid g^{-1} x g \in H\}, \qquad a \sim b :\Longleftrightarrow ab^{-1} \in C_G(x)$$

これが同値関係になることはすぐ分かる．よって商集合 $X/\!\sim$ が考えられるが，

$$X/\!\sim \;\longrightarrow\; x^G \cap H; \quad [a] \longmapsto a^{-1} x a$$

は well-defined な全単射である．従て $\#(x^G\cap H)=\#(X/\sim)=\#X/\#C_G(x)$ を得る．最後のは簡単な計算による $\#[a]=\#C_G(x)$ から．従って，示すべき式の右辺は

$$\frac{\#G}{\#x^G}\cdot\frac{\#(x^G\cap H)}{\#H}=\#C_G(x)\cdot\frac{\#X}{\#C_G(x)\cdot\#H}=\frac{\#X}{\#H}$$

となる．いま $\sum_{g\in G}\chi_{1_H}(g^{-1}hg)$ は記号の定義（$g^{-1}hg\notin H$ ではゼロ）から，$\#X$ に一致するので，よい． $\square$

主張は，変形して

$$\chi_{\mathsf{ind}_H^G(1_H)}(x)\ =\ (G:H)\cdot\frac{\#(x^G\cap H)}{\#x^G}$$

の表示の方が見やすい．

3.4 対称群や交代群の例

ここでは誘導表現を用いて，対称群や交代群の既約表現を構成してみる．やり方は [平井] を参照した．他にも二面体群 D_n などの例も多く載っている．

計算の都合上，$\mathsf{Ind}_H^G(W)$ と G-同型な

$$\mathsf{Ind'}_H^G(W)\ :=\ \{\varphi\in\mathsf{Map}(G,W)\mid\forall h\in H,\forall x\in G,\ \varphi(hg)=h.(\varphi(g))\}$$

で考える．表現は

$$G\longrightarrow\mathsf{Ind'}_H^G(W);\quad g\longmapsto(\varphi\mapsto g.\varphi:G\to W;x\mapsto\varphi(xg)).$$

3.4.1 対称群の場合

以下では

$$S_3=\{(1),\sigma_1:=(12),\sigma_2:=(23),\sigma_1\sigma_2\sigma_1=(13),\sigma_1\sigma_2=(123),\sigma_2\sigma_1=(132)\}=\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle$$

に関して考える．以前のことから，2 次元既約表現があるのだった．これを誘導表現の部分表現として実現したい．

例 3.29 (A_3 からの誘導)**.**

まず $A_3=\{(1),\sigma_1\sigma_2=(123),\sigma_2\sigma_1=(132)\}$ だった．一次元自明表現 1_{A_3} の誘導表現

$$\mathsf{Ind'}_{A_3}^{S_3}(1_{A_3})\ =\ \{\varphi:S_3\to\mathbb{C}\mid\forall a\in A_3,\sigma\in S_3,\ \varphi(a\sigma)=\varphi(\sigma)\}$$

を考える．これは補題から $\mathsf{dim}(\mathsf{Ind'}_{A_3}^{S_3}(1_{A_3}))=(S_3:A_3)\mathsf{dim}(1_{A_3})=2$ となる．これは既約なのだろうか？

(1) 自明表現の誘導表現に関する指標公式から，S_3 の共役類上で，

x	x^{S_3}	$x^{S_3} \cap A_3$	$\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})}(x) = 2 \cdot \dfrac{\#(x^{S_3} \cap A_3)}{\# x^{S_3}}$
(1)	$\{(1)\}$	$\{(1)\}$	2
(12)	$\{(12),(23),(13)\}$	$\varnothing$	0
(123)	$\{(123),(132)\}$	$\{(123),(132)\}$	2

となる．従って，

$$(\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})}, \chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})}) = \frac{1}{6}\sum_{x \in S_3} \chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})}(x) \cdot \overline{\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})}(x)} = \frac{1}{6}(2^2 + 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 2^2) = 2$$

となるので，既約ではない！実際，いま自明表現 1_{A_3} の誘導を考えているので，$\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})$ は $\varphi(x) := 1$ の自明な写像の張る 1 次元空間を，部分表現として持つので，当たり前に既約ではない．

(2) では具体的にどんな既約表現の直和になっているのか．集合の様子から，右剰余類分解を考えれば良い気がする．例えば $A_3 \backslash S_3 = \{A_3 g_1, A_3 g_2 \mid g_1 := (1), g_2 := (12)\}$ としたら，次の同一視が考えられる．

$$\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^2; \quad \varphi \longmapsto {}^t(\varphi(g_1), \varphi(g_2))$$

この時の，S_3 の作用を知る．定義から $g.\varphi(x) = \varphi(xg)$ だったので，

$$\mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma)\begin{pmatrix}\varphi(g_1)\\ \varphi(g_2)\end{pmatrix} \overset{\mathrm{id}}{=} \begin{pmatrix}\sigma.\varphi(g_1)\\ \sigma.\varphi(g_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(g_1\sigma)\\ \varphi(g_2\sigma)\end{pmatrix}$$

となる．従って，各 $\sigma \in S_3$ に対して，$g_i\sigma \in S_3 = A_3 g_1 \sqcup A_3 g_2$ の $g_i \sigma = a g_j$ を求めればよい．もっと，各 generators σ_1, σ_2 を知れば，後は積でよい．

$$g_1\sigma_1 = (1)g_2, \quad g_2\sigma_1 = (12)^2 = (1) = (1)g_1, \quad g_1\sigma_2 = (23) = \sigma_2\sigma_1 g_2, \quad g_2\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2 g_1$$

従って，

$$\mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_1)\begin{pmatrix}\varphi(g_1)\\ \varphi(g_2)\end{pmatrix} \overset{\mathrm{id}}{=} \begin{pmatrix}\sigma.\varphi((1)g_2)\\ \sigma.\varphi((1)g_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(g_2)\\ \varphi(g_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(g_1)\\ \varphi(g_2)\end{pmatrix}$$

$$\mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_2)\begin{pmatrix}\varphi(g_1)\\ \varphi(g_2)\end{pmatrix} \overset{\mathrm{id}}{=} \begin{pmatrix}\sigma.\varphi(\sigma_2\sigma_1 g_2)\\ \sigma.\varphi(\sigma_1\sigma_2 g_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(g_2)\\ \varphi(g_1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi(g_1)\\ \varphi(g_2)\end{pmatrix}$$

つまり S_3 の $\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3}) \cong \mathbb{C}^2$ への作用は，$(1), \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1$ は trivial に，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ は $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ の積で与えられる．

さて，いま $\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3})$ は自明な 1 次元既約部分表現をもつのだった．いまの行列実現の場合，$W = \mathbb{C}\,{}^t(1,1) = \mathbb{C}(e_1 + e_2)$ がそれにあたる．これのベクトル空間としての直交補空間を考えると

$$W^{\perp} = \{ae_1 + be_2 \mid a + b = 0\} = \mathbb{C}(e_1 - e_2)$$

となる．これへの S_3 作用は上の行列をかければよいので，符号 sgn 表現になっている．

(3) まとめると，既約分解は $\mathsf{Ind}'^{S_3}_{A_3}(1_{A_3}) \cong_{S_3} W \oplus W^{\perp}$ で与えられ，W は自明表現，$W^{\perp}$ は符号表現.

気を取り直して，違う誘導をしてみる：

例 3.30.

部分群 $S_2 = \{(1), \sigma_1 = (12)\}$ に関する，自明表現の誘導 $\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})$ を考える．これは 3 次元空間である.

(1) 自明表現の誘導表現に関する指標公式から，S_3 の共役類上で，

x	x^{S_3}	$x^{S_3} \cap S_2$	$\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}(x) = 3 \cdot \dfrac{\#(x^{S_3} \cap S_2)}{\# x^{S_3}}$
(1)	$\{(1)\}$	$\{(1)\}$	3
(12)	$\{(12), (23), (13)\}$	$\{(12)\}$	1
(123)	$\{(123), (132)\}$	$\varnothing$	0

となる．従って，

$$(\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}, \chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}) = \frac{1}{6} \sum_{x \in S_3} \chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}(x) \cdot \overline{\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}(x)} = \frac{1}{6}(3^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2) = 2$$

となるので，既約ではない．もしかしたら 2 次元既約が入っているかも！

(2) さて空間と作用を実現しよう．先と同じく剰余類分解で

$$S_2 \backslash S_3 = \{S_2 g_1, S_2 g_2, S_2 g_3 \mid g_1 = (1), g_2 = \sigma_2, g_3 = \sigma_2 \sigma_1\}$$

とする．

$$\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^3; \quad \varphi \longmapsto {}^t(\varphi(g_1), \varphi(g_2), \varphi(g_3))$$

計算により

$$g_1 \sigma_1 = \sigma_1 g_1, \quad g_2 \sigma_1 = (1) g_3, \quad g_3 \sigma_1 = (1) g_2, \quad g_1 \sigma_2 = (1) g_2, \quad g_2 \sigma_2 = (1) g_1, \quad g_3 \sigma_2 = \sigma_1 g_3$$

となるから

$$\mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ほかのは，行列の積により次のように求まる：

$$\mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_1\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_2\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

先と同じく，$W := \mathbb{C}\,{}^t(1,1,1)$ が自明部分空間．その直交補空間を考えると

$$W^{\perp} = \mathbb{C}\,{}^t(1,-1,0) \oplus \mathbb{C}\,{}^t(0,-1,1)$$

となる．ここで $x_1 := {}^t(1,-1,0), x_2 := {}^t(0,-1,1)$ とおけば，$W^{\perp}$ への S_3 の制限作用は

$$\begin{aligned}
\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_1)x_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2, \\
\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_2)x_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_1
\end{aligned}$$

また

$$\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_1)x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -x_2, \quad \mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_2)x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x_1 + x_2$$

従って，

$$\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_1\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_2\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^{\perp}}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とわかった．特に，指標の内積は

$$(\chi_{W^{\perp}}, \chi_{W^{\perp}}) = \frac{1}{6}(2^2 + 3\cdot 0^2 + 2\cdot(-1)^2) = 1$$

となり既約！

(3) 指標は行列実現をせずとも，以前のように $V/W \cong W^{\perp}$ で，

$$(\chi_{W^{\perp}}, \chi_{W^{\perp}}) = (\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}, \chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}) - 2(\chi_{\mathsf{Ind}'^{S_3}_{S_2}(1_{S_2})}, \chi_W) + (\chi_W, \chi_W)$$

で，はじめにやったように，最初の項は 2 となり，最後のは既約性から 1 である．よって，指標の内積は整数だったことから 1 を強いる．

3.4.2 交代群 A_4 の場合

四面体群も 3 次元既約表現があるのだった．部分群として A_3 を考え，自明表現を誘導すると $\mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3})$ は 4 次元の空間になる．今までの記法 $\sigma = (12)(34), \tau = (234)$ を用いる．

(1) 表現空間を実現する．そのために剰余分解で

$$A_3\backslash A_4 = \{A_3 g_i \mid g_1 = (1), g_2 = (12)(34), g_3 = (13)(24), g_4 = (14)(23)\}$$

を考える（他にもとり方あるが今回はこれで）．計算により

$$g_1\sigma = g_2, \quad g_2\sigma = g_1, \quad g_3\sigma = g_4, \quad g_4\sigma = g_3$$

$$g_1\tau = (132)g_2, \quad g_2\tau = (132)g_3, \quad g_3\tau = (132) = g_1, \quad g_4\tau = (132)g_4$$

が確かめられるので，同一視 $\mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3}) \cong \mathbb{C}^4; \varphi \mapsto {}^t(\varphi(g_1), \varphi(g_2), \varphi(g_3), \varphi(g_4))$ のもと，$\mathbb{C}^4$ への A_4 の作用は

$$\mathsf{Ind}'(\rho)(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{Ind}'(\rho)(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．また $W := \mathbb{C}\,{}^t(1,1,1,1)$ の直交補空間 $W^\perp$ を考えれば $x_1 = {}^t(1,1,-1,-1), x_2 = {}^t(1,-1,1,-1), x_3 = {}^t(-1,1,1,-1)$, が基底になる．作用を計算すれば，次のようになる：

$$\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^\perp}(\sigma) = \begin{pmatrix} x_1 \mapsto x_1 \\ x_2 \mapsto -x_2 \\ x_3 \mapsto -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^\perp}(\tau) = \begin{pmatrix} x_1 \mapsto x_2 \\ x_2 \mapsto x_3 \\ x_3 \mapsto x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

内積の計算のために $\mathsf{Ind}'(\rho)|_{W^\perp}(\tau^2) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と計算しておくと，

$$\begin{aligned}(\chi_{W^\perp}, \chi_{W^\perp}) &= \frac{1}{12}\big(\chi_{W^\perp}(1)^2 + 3\cdot\chi_{W^\perp}(\sigma)^2 + 4\cdot\chi_{W^\perp}(\tau)\chi_{W^\perp}(\tau^{-1}) + 4\cdot\chi_{W^\perp}(\tau^2)\chi_{W^\perp}(\tau^{-2})\big) \\ &= \frac{1}{12}(9 + 3\cdot(-1)^2 + 4\cdot 0 + 4\cdot 0) \ = 1\end{aligned}$$

従って既約！

(2) 先と同様に，指標はこれまでのように

$$(\chi_{W^\perp}, \chi_{W^\perp}) = (\chi_{\mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3})}, \chi_{\mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3})}) - 2(\chi_{\mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3})}, \chi_W) + (\chi_W, \chi_W)$$

と逆算できる．最後のは 1 である．最初のは，行列で表示してあるから（あるいは，共役類を数える例のやり方）計算できて，簡単のため $V := \mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3})$ とおくとき，

$$\begin{aligned}(\chi_V, \chi_V) &= \frac{1}{12}(\chi_V(1)^2 + 3\cdot\chi_V(\sigma)^2 + 4\cdot\chi_V(\tau)\chi_V(\tau^{-1}) + 4\cdot\chi_V(\tau^2)\chi_V(\tau^{-2})) \\ &= \frac{1}{12}(4^2 + 3\cdot 0^2 + 4\cdot 1^2 + 4\cdot 1^2) \ = 2\end{aligned}$$

と分かる．従って，

$$(\chi_{W^\perp}, \chi_{W^\perp}) = 3 - 2(\chi_{\mathsf{Ind}'^{A_4}_{A_3}(1_{A_3})}, \chi_W)$$

だから，とりうる値を考えれば，$1, -1, -3$ なのでこれは 1 しかなく，既約.

4　リー群とリー代数

群 $GL_n(\mathbb{C})$ や $\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})$ も重要な群であるが，位数はもちろん無限である．従って，今までの結果はつかえない．実はこれらの群は，単に群の構造を持つだけでなく，位相を入れることができ，さらに積や逆元をとる操作がこの位相に関して連続になる．この様な位相付き群はリー群と呼ばれ，とても良いクラスをなしている．

リー群には付随してリー代数というベクトル空間を考えることができる．さらにこのリー代数を調べることによりもとのリー群の様子が良く分ることが知られている．ここではその一端を紹介する．モデルは $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\times$ と $\log : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ の関係.

4.1　線型リー群

一般のリー群の定義はやめて，ここでは $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ の部分群に限って考える．まず，ベクトル空間としての同一視 $\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ を考えて，行列空間に位相を入れる．例えば行列の列 $\{A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{ij}\}_k$ が収束することと各 i, j に対して，数列 $\{a_{ij}^{(k)}\}_k$ が収束することは同値である．

すぐ分かることは，行列の積をとる写像および行列式をとる写像

$$\mathsf{det} : \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}; \quad (a_{ij})_{ij} \longmapsto \sum_{\sigma \in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

は（有限和と積なので）連続であることに注意する．明示的には $\lim_k \mathsf{det}(A^{(k)}) = \mathsf{det}(\lim_k A^{(k)})$ とか．よって $\mathsf{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \setminus \mathsf{det}^{-1}(\{0\})$ は開集合である．また，逆行列は $1/\mathsf{det}(A)$ を余因子行列（行列式たちで記述される）にかけただけなので，逆行列をとる操作も連続写像である．

定義 4.1.

$\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ の閉な部分群を**線型リー群**という．

例えば $\mathsf{SL}_n(\mathbb{C}), \mathsf{O}_n(\mathbb{C}), \mathsf{SO}_n(\mathbb{C})$ など．ユークリッド空間 $\mathbb{C}^{n^2}$ のノルムで

$$A = (a_{ij})_{ij} \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}), \qquad ||A|| := \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$$

を入れたとき，不等式 $||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$ や $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$ はすぐ分かる．また級数 $\sum_k A^{(k)}$ が絶対収束する（i.e., $\sum_k ||A^{(k)}|| < \infty$）なら $\sum_k A^{(k)}$ は収束することも言える．

補題 4.2.

$\exp : \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}); A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$ は収束し，連続.

Proof. 収束することは, 先の不等式から容易に従う．連続であることは, 不等式 $|| \exp(A) - \exp(B)|| \leqslant e^{\max\{||A||,||B||\}} \cdot ||A - B||$ から従う（これ自体は，各項に注目して帰納法など．[井ノ口] 参照）．実際，任意の $A^{(k)} \to A$ に対して，$|| \exp(A^{(k)}) - \exp(A)|| \to 0$ を言えばよい．

各 k に対して $M_k := \max\{||A^{(k)}||, ||A||\}$ とおくと，$||\exp(A^{(k)}) - \exp(A)|| \leqslant e^{M_k} \cdot ||A^{(k)} - A||$. 仮定より

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall k > N,\ ||A^{(k)} - A|| < \varepsilon$$

である．三角不等式から $||A^{(k)}|| - ||A|| \leqslant ||A^{(k)} - A|| < \varepsilon$ と変形できる．いま $\varepsilon = 1$ とでもすると $||A^{(k)}|| < 1 + ||A||$ なので，$M_k = \max\{||A^{(k)}||, ||A||\} < 1 + ||A||$ が従う．よって十分大きい k に対して，

$$e^{M_k}||A^{(k)} - A|| < e^{1+||A||} \cdot ||A^{(k)} - A||$$

となる．よって O.K. □

補題 4.3.

任意の n 次正方行列 X に対して，

(1) $\exp(E_n) = E_n$
(2) ${}^t\exp(X) = \exp({}^tX)$
(3) $XY = YX \Longrightarrow \exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$
(4) $\exp(X) \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ であって $\exp(X)^{-1} = \exp(-X)$
(5) 任意の正則行列 P に対して $P^{-1}\exp(X)P = \exp(P^{-1}XP)$
(6) $\mathsf{det}(\exp(X)) = e^{\mathsf{tr}(X)}$
(7) $\frac{d}{dt}\exp(tX) = X\exp(tX) = \exp(tX)X$

Proof. ほぼ絶対収束性から，項別に操作（微分など）してかまわないので自明.

(1) 自明.
(2) 自明（しいて言うなら転置写像が連続なので lim の中に入るから）.
(3) このとき二項定理が使えるので，よい（絶対収束なので，項の順序が変えられることも）.
(4) X と $-X$ は可換なので，さきのことよりよい.
(5) 一般に $(P^{-1}XP)^k = P^{-1}X^kP$ に注意すればよい（詳しくは，積 $P^{-1}(-)P$ が連続なので）.
(6) 先のことと，三角化でも考えればよい.
(7) 項別微分できるのでよい.

□

4.2 リー代数

まずは一般論から.

定義 4.4.

一般にベクトル空間 $\mathfrak{g}$ は，双線型な写像 $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が存在し，次をみたすとき**リー代数**と呼ば

れる．

(1) $[X,Y] = -[Y,X]$ anti-symmetric
(2) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$ Jacobi identity

また，部分空間で [,] で閉じているものは**部分リー代数**と呼ばれる．

例 4.5.

以下はリー代数の例．

(1) 任意のベクトル空間 V に対して，$\mathsf{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は $[f,g] := f \circ g - g \circ f$ でリー代数．リー代数を強調するときは $\mathfrak{gl}(V)$ とかく．
(2) 特に $\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ もリー代数．リー代数を強調するときに $\mathfrak{gl}_n$ とかく．
(3) $\mathfrak{sl}_n := \{X \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \mathsf{tr}(X) = 0\}$ は $\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ の部分リー代数．
(4) $\mathfrak{so}_n := \{X \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid X = -{}^tX\}$ も $\mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ の部分リー代数．

すぐ分かるように，リー群は行列の行列式や積を用いて，定義されていたので難しかった．しかし，上記リー代数たちはどちらかというと "線型" で扱いやすい．例えば，$\mathfrak{sl}_n$ の次元は n^2-1 とか．

群のときのように，リー代数にも表現の概念がある：

定義 4.6.

(1) リー代数たち $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ に対して，線型写像 $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ が**リー代数準同型**であるとは，$\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$ をみたすときをいう．
(2) ベクトル空間 V がリー代数 $\mathfrak{g}$ の**表現**であるとは，リー代数準同型 $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ が存在するときをいう．

例 4.7.

リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して，$\mathsf{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}); X \mapsto (Y \mapsto [X,Y])$ によって，$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}$-表現．これを**随伴表現 (adjoint representation)** という（Jacobi identity が本質的）．

単純なクラスのリー代数は既に分類されている（$A, B, C, D, \ldots$ 型）．そしてそれらのリー代数自信や，その表現は well^N-studied（$N \gg 1$）．例えば，"単純" リー代数の $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現圏は半単純（完全可約）と知っていたり．

さて我々の場合に戻る．

定義 4.8.

線型リー群 $G \leqslant \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して，

$$\mathsf{Lie}(G) \ := \ \{X \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \in G\}$$

を G **のリー代数**という．

一般線型群 $G = \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ 自身の場合は，

$$\mathsf{Lie}(\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})) = \{X \in \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tX) \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})\} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

となるので，確かにリー代数である．一般にもこれは正しく；

事実 4.9.

$\mathsf{Lie}(G)$ はブラケット $[X,Y] := XY - YX$ でリー代数をなす．

Scketch of the Proof. まず $0 < t \ll 1$ に対して，次が成立することを認める．詳しくは [小林・大島, § 5.3] や [井ノ口] などを参照（log とか使う）：

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) = \exp(t(X+Y) + O(t^2))$$

すると任意の $0 < t$ を固定したときに，$t/n \ll 1$ となるような，十分大きな n をとれば，

$$\begin{aligned}
&G \ni \exp(\tfrac{t}{n}X) \cdot \exp(\tfrac{t}{n}Y) = \exp(\tfrac{t}{n}(X+Y) + O(t^2/n^2)),\\
&G \ni \big(\exp(\tfrac{t}{n}X) \cdot \exp(\tfrac{t}{n}Y)\big)^n = \exp(t(X+Y) + O(t^2/n)) \qquad (\because n \text{ 乗した})\\
&G \ni \lim_{n\to\infty} \big(\exp(\tfrac{t}{n}X) \cdot \exp(\tfrac{t}{n}Y)\big)^n = \exp(t(X+Y)) \qquad (\because\ G \text{ は閉})
\end{aligned}$$

よって $X + Y \in \mathsf{Lie}(G)$ と分かる．スカラーもよいので $\mathsf{Lie}(G)$ はベクトル空間.

同様に $0 < t \ll 1$ に対して，

$$\exp(tX) \cdot \exp(tY) \cdot \exp(-tX) \cdot \exp(-tY) = \exp(t^2[X,Y] + O(t^3))$$

を認めれば，任意の $0 < t$ に対して，$t/n \ll 1$ となるような，十分大きな n をとれば，

$$G \ni \exp(\tfrac{t}{n}X) \cdot \exp(\tfrac{t}{n}Y) \cdot \exp(-\tfrac{t}{n}X) \cdot \exp(-\tfrac{t}{n}Y) = \exp(\frac{t^2}{n^2}[X,Y] + O(t^3/n^3))$$

で，両辺 n^2 乗して，$\lim_n$ とれば $[X,Y] \in \mathsf{Lie}(G)$ とわかる． □

補題 4.10.

具体的なリー代数の形は以下：

(1) $\mathsf{Lie}(\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$
(2) $\mathsf{Lie}(\mathsf{O}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$
(3) $\mathsf{Lie}(\mathsf{SO}_n(\mathbb{C})) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$

Proof. (1) 定義と性質から，

$$X \in \mathsf{Lie}(\mathsf{SL}_n(\mathbb{C})) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \mathsf{det}(\exp(tX)) = 1 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ t \cdot \mathsf{tr}(X) = 0$$

となるので O.K.

(2) ($\subset$) 任意の $X \in \mathsf{Lie}(\mathsf{O}_n(\mathbb{C}))$ に対して，定義から $\forall s \in \mathbb{R}, \exp(sX) \cdot \exp(s\,{}^tX) = E_n$ だった．両辺を微分して $s = 0$ とすると（事実で用いた評価を用いることで，積の微分も O.K.），

$$X + {}^tX = (X\exp(sX)) \cdot \exp(s\,{}^tX) + \exp(sX) \cdot ({}^tX\exp(s\,{}^tX))|_{s=0} = O$$

から O.K. ($\supset$) このとき，可換性から

$$\forall s \in \mathbb{R}, \exp(sX) \cdot \exp(s\,{}^tX) = \exp(sX) \cdot \exp(-sX) = \exp(sX - sX) = E_n.$$

(3) 直に計算してもよいし，線型リー群たち G, H に対して，$G \cap H$ も線型リー群で $\mathsf{Lie}(G \cap H) = \mathsf{Lie}(G) \cap \mathsf{Lie}(H)$ に注意すればよい．

□

以上から，よく知ってるのになってることが分かった．

例 4.11.

実になるが $G = \mathsf{SO}_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ の場合，ちゃんと接ベクトル空間になっていることを見てみよう．

まず，次の群準同型に着目：

$$\varphi : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathsf{GL}_n(\mathbb{R}); \quad a + b\sqrt{-1} \longmapsto aE_2 + bJ, \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

これの制限で空間が実現できて，

$$\varphi : \mathbb{S}^1 := \{a + b\sqrt{-1} \mid a^2 + b^2 = 1\} \xrightarrow{\cong} \mathsf{SO}_2(\mathbb{R})$$

さて，円周群 $\mathbb{S}^1$ の単位元 $1 + 0\sqrt{-1}$ での接平面（接線）は $\ell := \{1 + b\sqrt{-1} \mid b \in \mathbb{R}\}$ である．よって接ベクトル空間は，これを原点に移動すればよいので $\ell_0 := \ell - 1 = \{b\sqrt{-1} \mid b \in \mathbb{R}\}$ これで，先ほどの同型で移る先を計算すると，

$$\varphi(\ell_0) = \{bJ \mid b \in \mathbb{R}\} = \mathfrak{so}_2$$

となり確かに！

4.3 リー群の表現からリー代数の表現へ

次の事実を援用する．証明は [小林・大島, 定理 5.49] など参照．

事実 4.12.

線型リー群たち G, H について，リー群の準同型（連続群準同型）$f : G \to H$ が与えられたとき，リー代数（接ベクトル空間）上に

$$\forall X \in \mathsf{Lie}(G), \quad f(\exp(X)) = \exp(df(X))$$

をみたすリー代数準同型 $df : \mathsf{Lie}(G) \to \mathsf{Lie}(H)$ が誘導される．

Sketch of proof. 存在は難しいのでパス．リー代数の準同型であることは，前の事実で使った評価で

$$\begin{aligned}
f(\exp(t^2[X,Y])) &= f\big(\lim_{n\to\infty} \big(\exp(\tfrac{t}{n}X)\cdot\exp(\tfrac{t}{n}Y)\cdot\exp(-\tfrac{t}{n}X)\cdot\exp(-\tfrac{t}{n}Y)\big)^{n^2}\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} f\big(\big(\exp(\tfrac{t}{n}X)\cdot\exp(\tfrac{t}{n}Y)\cdot\exp(-\tfrac{t}{n}X)\cdot\exp(-\tfrac{t}{n}Y)\big)^{n^2}\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \big(\exp(\tfrac{t}{n}df(X))\cdot\exp(\tfrac{t}{n}df(Y))\cdot\exp(-\tfrac{t}{n}df(X))\cdot\exp(-\tfrac{t}{n}df(Y))\big)^{n^2} \\
&= \exp(t^2[df(X), df(Y)])
\end{aligned}$$

を得る．他方で，定めかたから $f(\exp(t^2[X,Y])) = \exp(t^2 df([X,Y]))$ だったので，$0 < t \ll 1$ で log とれば，$df([X,Y]) = [df(X), df(Y)]$ 一致する． □

系 4.13.

線型リー群 G とその n 次元 "連続" 表現 $\rho : G \to \mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$ に対して，**微分表現** $d\rho : \mathsf{Lie}(G) \to \mathsf{Mat}_n(\mathbb{C})$ が誘導される．

従って，G の "良いクラス" の表現は，well-studied なリー代数 $\mathsf{Lie}(G)$ の表現を調べれば（次元とか）よい，と分かった．

例 4.14.

線型ではないが，ひとつ例を．線型リー群 G の随伴作用

$$\mathsf{AD} : G \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{grp}}(G); \quad g \longmapsto (x \mapsto gxg^{-1})$$

があった．各 $g \in G$ を固定するごとに，群同型 $\mathsf{AD}_g : G \xrightarrow{\cong} G$ が考えられる．よって，これの微分を考えれば

$$d(\mathsf{AD}_g) : \mathsf{Lie}(G) \xrightarrow{\cong} \mathsf{Lie}(G) \qquad \text{satis.} \quad \mathsf{AD}_g(\exp(X)) = \exp(d(\mathsf{AD}_g)(X))$$

を誘導する．条件は $\mathsf{AD}_g(\exp(X)) = g\exp(X)g^{-1} = \exp(gXg^{-1})$ なので，パラメータ $0 < t \ll 1$ を用意して考えたら，$d(\mathsf{AD}_g)(X) = gXg^{-1}$ と分かる．

とにかくこれから

$$\mathsf{Ad} : G \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathsf{Lie}(G)); \quad g \longmapsto d(\mathsf{AD}_g)$$

をえた．これを微分すれば

$$d(\mathsf{Ad}) : \mathsf{Lie}(G) \longrightarrow \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(\mathsf{Lie}(G)) \qquad \text{satis.} \quad \mathsf{Ad}(\exp(X)) = \exp(d(\mathsf{Ad})(X))$$

をえる．パラメータ $0 < t \ll 1$ を用意する．元 $Y \in \mathsf{Lie}(G)$ に apply すれば，条件の左辺は

$$\big(\mathsf{Ad}(\exp(tX))\big)(Y) = d(\mathsf{AD}_{\exp(tX)})(Y) = \exp(tX)Y\exp(-tX)$$

従って，

$$\begin{aligned}\exp(tX)Y\exp(-tX) &= \big(\exp(d(\mathsf{Ad})(X))\big)(Y) \\ &= (\mathsf{id} + td(\mathsf{Ad})(X) + \tfrac{t^2}{2}\big(d(\mathsf{Ad})(X)\big)^2 + \cdots)(Y)\end{aligned}$$

を得る．両辺の t に関する微分をとって，$t = 0$ とすれば，

$$XY - YX = \big(d(\mathsf{Ad})(X)\big)(Y)$$

となる．従って，$d(\mathsf{Ad}) = \mathsf{ad}$ と分かった．

尻切れトンボ...

5 追加

5.1 群環の中心

ここでは [Serre] に沿ってもう少し有限群 G の群環 $\mathbb{C}G$ についてみていく．以下で，既約分解を $\mathcal{L}(G) = \bigoplus_{i=1}^r L_i^{\oplus n_i}$ with $\rho_{L_i} : G \to \mathsf{GL}(L_i)$ と表示しておく（今後は断りなしに自由に $\rho_{L_i} : \mathbb{C}G \to \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(L_i)$ ともみる）．このとき $n_i = \mathsf{dim}(L_i)$ かつ $r = \mathsf{dim}\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} =$（$G$ の共役類の数）$=$（G の既約表現の同型類の個数）かつ $\mathsf{Irr}(G) = \{[L_i]\}_{i=1}^r$ であった．また $\#G = \sum_{i=1}^r n_i^2$ だったことも思い出しておく．

マシュケの定理より $\mathbb{C}G$ は "半単純環" になるのであった．半単純環はウェダーバーン (Wedderburn) の定理により「有限個の適当な斜体とそれ上の全行列環の直積に同型になる」のであった（今の場合は基礎体が $\mathbb{C}$ なので斜体の部分は $\mathbb{C}$ でよい）．具体的には以下のようにこの同型が実現できる：

補題 5.1.
線型写像 $f : \mathbb{C}G \to \prod_{i=1}^r \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(L_i);\ g \mapsto \bigoplus_{i=1}^r \rho_{L_i}(g)$ は代数としての同型を与える．特に代数として $\mathbb{C}G \cong \prod_{i=1}^r \mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ である．

Proof. 左右の次元が等しいことはよいので，全射もしくは単射をいえばよい．単射であることをいう．まず $\mathsf{Ker}(f)$ の元は，その定義から各 L_i 上でゼロとして作用している（特に既約分解を考えれば任意の有限次元表現の上でもゼロとして作用している）ことに注意する．すると $\mathcal{L}(G)$ 上でもゼロとして作用しているが，左正則表現の定義からこれは $\mathsf{Ker}(f) = 0$ を強いる． □

このことから，中心に関しては

$$Z(\mathbb{C}G) \cong \prod_{i=1}^r Z(\mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})) \cong \mathbb{C}^r$$

とわかる．具体的には，共役類分解を；

$$G = \bigsqcup_{i=1}^r c_i^G, \qquad c_i^G = \{g c_i g^{-1} \mid g \in G\}$$

と表示しておけば，次のようにかける：

補題 5.2.
各 $i = 1, \ldots, r$ に対して $z_i := \sum_{x \in c_i^G} x\ (\in \mathbb{C}G)$ とおくとき，$Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C} z_i$.

Proof. まず $z_i \in Z(\mathbb{C}G)$ であることはすぐ分かる．つぎに同値類分解から $z_1, \ldots, z_r$ が線型独立なことはよいので，あとは次元を見ればよい． □

類関数による実現もできる：

補題 5.3.

代数として $\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} \cong Z(\mathbb{C}G)$ である．同型射は $\varphi \mapsto \sum_{g\in G}\varphi(g)g$ かつ $(g \mapsto u_g) \leftarrow\!\shortmid \sum_{g\in G} u_g g$.

Proof. 命題 3.16 より $\mathcal{L}(G) \cong \mathbb{C}G$ という代数同型があったことを思い出す．すると，これに誘導されて $Z(\mathcal{L}(G)) \cong Z(\mathbb{C}G)$ を得る．これと注意 3.19 を合わせればよい． $\square$

セクション 5.4 の記号や結果を自由に使う．例えば代数的整数全体の集合 $\mathbb{C}^{整}$ は $\mathbb{C}$ の部分環をなすことを知っているので，群環 $\mathbb{C}^{整}G$ が考えられることに注意する．また $Z(\mathbb{C}G)$ は可換環なので $Z(\mathbb{C}G)^{整}$ が考えられることにも注意する．

命題 5.4.

$Z(\mathbb{C}G) \cap \mathbb{C}^{整}G \subset Z(\mathbb{C}G)^{整}$.

Proof. 任意に $u \in Z(\mathbb{C}G) \cap \mathbb{C}^{整}G$ をとる．補題 5.2 から $u = \sum_{i=1}^{r} u_i z_i$ $(u_i \in \mathbb{C}^{整})$ と書くことができる．いま自然な代数としての包含 $\mathbb{C}^{整} \subset Z(\mathbb{C}G)^{整}$ を考えれば，仮定および系 5.19(2) から，各 i に対して $z_i \in Z(\mathbb{C}G)^{整}$ が示せればよい．

いま有限生成 $\mathbb{Z}$-部分加群 $R := \langle z_1, \ldots, z_r\rangle_{\mathbb{Z}} \subset Z(\mathbb{C}G)$ を考える．各 i, j に対して $z_i z_j \in R$ であるから（共役類分解を思い出す），R は $Z(\mathbb{C}G)$ の部分環をなす．従って，系 5.19(1) から $R^{整} = R$ を得るので，各 i に対して $z_i \in R = R^{整} \subset Z(\mathbb{C}G)^{整}$ と分かった． $\square$

5.2 既約表現の次元は群の位数を割る

相変わらず G を有限群として，任意の既約表現 $\rho : G \to \mathsf{GL}(L)$ をとり固定しておく．このとき，G-準同型の定義をよく考えたら ρ は $Z(\mathbb{C}G)$ を factor して

$$\rho : Z(\mathbb{C}G) \longrightarrow \mathsf{End}_G(L) \cong \mathbb{C}$$

となっている（最後の同型は Schur's Lemma)．従って，適当な代数射 $\omega_L : Z(\mathbb{C}G) \to \mathbb{C}$ が存在して

$$\forall u \in Z(\mathbb{C}G),\ \forall x \in L, \quad \rho(u)(x) = \omega_L(u)x$$

とできる．これの明示的な表示を与えるために，定理 2.17 の証明中にでてきたことに似た補題を一つ準備．

補題 5.5.

任意の $\varphi \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ に対して，$\rho^{\varphi} := \sum_{g\in G}\varphi(g)\rho(g) \in \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(L)$ とおくとき，

$$\rho^{\varphi} \;=\; \frac{1}{\mathsf{dim} L}\sum_{g\in G}\varphi(g)\chi_L(g)\cdot \mathsf{id}_L \;=\; \frac{\#G}{\mathsf{dim} L}(\varphi, \overline{\chi_L})\cdot \mathsf{id}_L.$$

Proof. 二つ目の等号はただの内積による書き換えなので，最初のを示せば十分．まず任意の $g \in G$, $x \in L$ に対して，

$$\begin{aligned}
\rho^{\varphi}(g.x) &= \sum_{h \in G} \varphi(h)(hg.x) \\
&= \sum_{h \in G} \varphi(g^{-1}hg)(hg.x) \qquad (\because \varphi \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}) \\
&= \sum_{k \in G} \varphi(k)(gk.x) \qquad (\because k = g^{-1}hg) \\
&= g.\rho^{\varphi}(x)
\end{aligned}$$

が成り立っているので, $\rho^{\varphi} \in \mathsf{End}_G(L)$ とわかる．従って, Schur's Lemma より $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\rho^{\varphi} = \lambda \mathsf{id}_L$ とわかる．これの両辺のトレースをとれば

$$\begin{aligned}
\lambda \mathsf{dim} L &= \mathsf{tr}(\rho^{\varphi}) \\
&= \sum_{j=1}^{\mathsf{dim} L} \langle e_j^*, \rho^{\varphi}(e_j) \rangle \qquad (L = \bigoplus_j \mathbb{C}e_j \text{ と基底をかいた}) \\
&= \sum_j \sum_g \langle e_j^*, \varphi(g) g.e_j \rangle \\
&= \sum_g \varphi(g) \chi_L(g) \qquad (\text{注意 2.12 参照})
\end{aligned}$$

となり主張がいえる． □

補題 5.6.

任意の $u = \sum_{g \in G} u_g g \in Z(\mathbb{C}G)$ に対して，$\omega_L(u) = \dfrac{1}{\mathsf{dim} L} \sum_{g \in G} u_g \chi_L(g)$ が成立.

Proof. 補題 5.3 より $u_{\bullet} \in \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}}$ であることに注意すれば，補題 5.5 から従う． □

定理 5.7.

$\mathsf{dim} L \mid \#G$.

Proof. 指標は代数的整数であった（命題 2.13(2)）ので，$u := \sum_{g \in G} \chi_L(g^{-1}) g$ は $u \in Z(\mathbb{C}G) \cap \mathbb{C}^{\text{整}} G$ である．すると，命題 5.4 から $u \in Z(\mathbb{C}G)^{\text{整}}$ と分かる．いま ω_L は代数射なので，このことから $\omega_L(u) \in \mathbb{C}^{\text{整}}$ を得る．一方で，補題 5.6 と既約指標の直交性（定理 2.17）から

$$\omega_L(u) = \frac{1}{\mathsf{dim} L} \sum_{g \in G} \chi_L(g^{-1}) \chi_L(g) = \frac{\#G}{\mathsf{dim} L} (\chi_L, \chi_L) = \frac{\#G}{\mathsf{dim} L}$$

となっている．従って，$\#G / \mathsf{dim} L \in \mathbb{C}^{\text{整}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ を得る． □

注意 5.8.

例えば [永尾・津島, III, §2 定理 2.4] には他の証明もある．実は $\#G$ よりもっと良い評価もできるが，それは [Serre] をご覧くださいませ．

5.3 中心的直交冪等元分解

相変わらず G を有限群として，$\mathcal{L}(G) = \bigoplus_{i=1}^{r} L_i^{\oplus n_i}$ と既約分解しておく（$n_i = \mathsf{dim} L_i$）．また表現を $\rho_{L_i} : \mathbb{C}G \to \mathsf{End}_{\mathbb{C}}(L_i) \cong \mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ とかき同一視しておく．

群環の中心 $Z(\mathbb{C}G)$ は，補題 5.2 によれば，G の共役類分解を用いて $Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}z_i$ のような記述を与えることができたのであった．しかし，この実現では積 $z_i z_j$ がどのように振舞うかは不明なので使いずらい．他方で，いままでのことから $Z(\mathbb{C}G) \cong \mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}\chi_{L_i}$ となっているのであった（補題 5.3 と補題 2.28）．この目で見たときに，積 $\chi_{L_i} * \chi_{L_j}$ を調べていなかったことを思い出すようにいまさら反省し，先にここで積がキレイな基底を構築しておきそれを $Z(\mathbb{C}G)$ に移植することを考えてみる．

次の主張は [永尾・津島, III, §2 定理 2.2] による．

補題 5.9.

各 $g \in \mathbb{C}G$ に対して, 行列の成分表示を $\rho_{L_i}(g) = (\rho_i(g)_{p,q})_{p,q} \in \mathsf{Mat}_{n_i}(\mathbb{C})$ とかくとき, $\rho_{L_i}(-)_{p,q} \in \mathcal{L}(G)$ が得られる．このときこれらの内積は次で与えられる：

$$(\rho_{L_i}(-)_{p,q},\ \rho_{L_j}(-)_{r,s}) \ = \ \delta_{i,j}\ \delta_{p,s}\ \delta_{q,r}\ \frac{1}{\mathsf{dim} L_i}.$$

Proof. まずは表現と記号の定義から

$$\big(\rho_{L_i}(gh)_{p,q}\big)_{p,q} = \rho_{L_i}(gh) = \rho_{L_i}(g)\rho_{L_i}(h) = \big(\sum_{r=1}^{n_i} \rho_{L_i}(g)_{p,r}\rho_{L_i}(h)_{r,q}\big)_{p,q}$$

が任意の $g, h \in G$ に対して成り立っていることに注意する．

出てくる添え字たちを統制するために，G に適当な順序を入れておき，また集合 $X := \{(i,p,q) \in \mathbb{N}^3 \mid 1 \leqslant i \leqslant r,\ 1 \leqslant p, q \leqslant n_i\}$ に字引式順序を入れておく．このとき次元等式（定理 2.29）から $\#X = \sum_{i=1}^{r} n_i^2 = \#G$ なので,

$$A := \big(\rho_{L_i}(g)_{p,q}\big)_{(i,p,q)\in X, g\in G}, \qquad B := \big(\frac{\mathsf{dim} L_i}{\#G}\rho_{L_i}(g^{-1})_{q,p}\big)_{(i,p,q)\in X, g\in G}$$

はいずれも $\#G$ 次正方行列である．行列の積の計算により

$$
\begin{aligned}
{}^{t}A\ B = \big(&\sum_{(i,p,q)\in X} \rho_{L_i}(g)_{p,q} \frac{\mathsf{dim} L_i}{\#G} \rho_{L_i}(h^{-1})_{q,p}\big)_{g,h\in G} \\
&(\because \text{一般に } {}^{t}(a_{ij})_{ij}(b_{k\ell})_{k\ell} = (a_{ij})_{ji}(b_{k\ell})_{k\ell} = (\sum_{p} a_{pj}b_{p\ell})_{j\ell} \text{ を思い出す})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\sum_i \sum_p \frac{\mathsf{dim} L_i}{\# G} \rho_{L_i}(gh^{-1})_{p,p} \Big)_{g,h\in G} \qquad (\because \text{最初の注意}) \\
&= \Big(\frac{1}{\# G} \sum_i \chi_{L_i}(e) \sum_p \rho_{L_i}(gh^{-1})_{p,p} \Big)_{g,h\in G} \qquad (\because \text{命題 } 2.13(1)) \\
&= \Big(\frac{1}{\# G} \sum_i \chi_{L_i}(e) \chi_{L_i}(gh^{-1}) \Big)_{g,h\in G} \qquad (\because \text{指標の定義}) \\
&= \Big(\frac{1}{\# G} \# C_G(e) \delta_{e^G,(gh^{-1})^G} \Big)_{g,h\in G} \qquad (\because \text{第二直交定理（命題 } 2.29)) \\
&= \big(\delta_{g,h} \big)_{g,h\in G} \qquad (\because \text{意味を考えつつ計算}) \\
&= E_{\# G}
\end{aligned}
$$

とわかる．従って A, B は正則であり，逆からの $B\,{}^t\!A = E_{\# G}$ もみたす．すると

$$
\begin{aligned}
E_{\# G} = B\,{}^t\!A &= \Big(\sum_{g\in G} \frac{\mathsf{dim} L_i}{\# G} \rho_{L_i}(g^{-1})_{q,p} \rho_{L_j}(g)_{r,s} \Big)_{(i,p,q),(j,r,s)\in X} \\
&= \big(\mathsf{dim} L_i (\rho_{L_i}(-)_{q,p} \rho_{L_j}(-)_{r,s}) \big)_{(i,p,q),(j,r,s)\in X}
\end{aligned}
$$

となっているから，添え字が微妙にスイッチしていることに注意すれば主張が従う． □

命題 5.10.

任意の i, j に対して，$\chi_{L_i} * \chi_{L_j} = \delta_{i,j}\,\dfrac{\# G}{\mathsf{dim} L_i}\,\chi_{L_i}$.

Proof. 先程の記号を使いつつ，ガシガシ計算していく：任意の $x \in G$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\# G}(\chi_{L_i} * \chi_{L_j})(x) &= \frac{1}{\# G} \sum_{g\in G} \chi_{L_i}(xg^{-1}) \chi_{L_j}(g) \quad (\because \text{合成積の定義}) \\
&= \frac{1}{\# G} \sum_{g\in G} \sum_{p,q} \rho_{L_i}(xg^{-1})_{p,p} \rho_{L_j}(g)_{q,q} \quad (\because \text{指標の定義}) \\
&= \frac{1}{\# G} \sum_{g\in G} \sum_{p,q,r} \rho_{L_i}(x)_{p,r} (g^{-1})_{r,p} \rho_{L_j}(g)_{q,q} \quad (\because \text{補題 5.9 の注意}) \\
&= \sum_{p,q,r} \rho_{L_i}(x)_{p,r}\ (\rho_{L_i}(-)_{r,p},\ \rho_{L_j}(-)_{q,q}) \quad (\because \text{内積の定義}) \\
&= \sum_{p,q,r} \rho_{L_i}(x)_{p,r}\ \delta_{i,j} \delta_{r,q} \delta_{p,q}\ \frac{1}{\mathsf{dim} L_i} \quad (\because \text{補題 5.9}) \\
&= \sum_{q} \rho_{L_i}(x)_{q,q}\ \delta_{i,j}\ \frac{1}{\mathsf{dim} L_i} \quad (\because \text{計算}) \\
&= \chi_{L_i}(x)\ \delta_{i,j}\ \frac{1}{\mathsf{dim} L_i} \quad (\because \text{指標の定義})
\end{aligned}
$$

となるから OK. □

命題 5.11.

$\sum_{i=1}^{r} \mathsf{dim} L_i \, \chi_{L_i} = \#G \, \delta_e$ in $\mathcal{L}(G)$.

Proof. 単に第二直交定理から，任意の $g \in G$ に対して，

$$\sum_{i=1}^{r} \mathsf{dim} L_i \, \chi_{L_i}(g) = \sum_{i=1}^{r} \chi_{L_i}(e)\chi_{L_i}(g) = \#C_G(e)\delta_{e^G, g^G} = \#G \, \delta_{e,g} = \#G \, \delta_e(g)$$

となるから OK. □

これらの結果から，各 $i = 1, \ldots, r$ に対して，スケール変換して

$$\widetilde{\chi}_{L_i} \; := \; \frac{\mathsf{dim} L_i}{\#G} \, \chi_{L_i}$$

とおくことで次が成り立つことが分かった：

$$\widetilde{\chi}_{L_i} * \widetilde{\chi}_{L_j} = \delta_{i,j} \widetilde{\chi}_{L_i}, \qquad \widetilde{\chi}_{L_1} + \cdots + \widetilde{\chi}_{L_r} = \delta_e.$$

そこで，各 $i = 1, \ldots, r$ に対して，

$$e_i \; := \; \frac{\mathsf{dim} L_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{L_i}(g) g \qquad \in Z(\mathbb{C}G)$$

とおくとき，代数同型 $\mathcal{L}(G)^{\mathrm{cls}} \cong Z(\mathbb{C}G)$ で翻訳すれば，次が成り立つ：

定理 5.12.

$e_1, \ldots, e_r$ は $Z(\mathbb{C}G)$ の基底をなし，さらに単位元の分解を与える直交冪等元である．つまり，$Z(\mathbb{C}G) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}e_i$ かつ $e_i e_j = \delta_{i,j} e_i$ かつ $e_1 + \cdots + e_r = e$ ($e \in G$ は単位元).

従って，環 $\mathbb{C}G$ の単位元の分解を与える中心的直交冪等元が得られたことになる．

ちょっと修正して

$$\widetilde{e_i} \; := \; \frac{\mathsf{dim} L_i^*}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{L_i^*}(g) g \; = \; \frac{\mathsf{dim} L_i}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{L_i}(g^{-1}) g \qquad (\because \text{命題 } 2.13(3))$$

とおく．これは系 2.22 から，既約加群のとり方（ラベル付け）を変えただけなので，相変わらず定理 5.12 の主張をみたしている．セクション 5.2 で考えた代数射 $\omega_{L_i} : Z(\mathbb{C}G) \to \mathbb{C}$ を思い出す．

補題 5.13.

$\{\omega_{L_i}\}_{i=1}^{r}$ は $\{\widetilde{e_i}\}_{i=1}^{r}$ の双対基底である：$\omega_{L_i}(\widetilde{e_j}) = \delta_{i,j}$.

Proof. 第一直交定理と補題 5.6 を用いれば，直接計算により

$$\omega_{L_i}(\widetilde{e_j}) = \frac{\mathsf{dim} L_j}{\mathsf{dim} L_i} \, \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_{L_j}(g^{-1}) \chi_{L_i(g)} = \frac{\mathsf{dim} L_j}{\mathsf{dim} L_i} \, (\chi_{L_i}, \chi_{L_j}) = \delta_{i,j}$$

となるので OK. □

5.4 補遺（必要な環論少し）

ここではセクション 5.2 で必要だったことをまとめる．

定義 5.14.

（可換とは限らない）環 R について．左 R-加群 M が **ネーター加群** :$\Longleftrightarrow$ M は部分加群全体の集合と包含に関して ACC をみたす．つまり，任意の部分加群の列 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset M$ に対して，$\exists k \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqslant k,\ N_n = N_k$. 特に，$R$ 自身を自然に左 R-加群とみたときにネーターになっている場合（この場合はイデアルで），R を**ネーター環**という．

定義から，ネーター加群 M に対して，M の部分加群全体の集合の，任意の部分集合は極大元を持つことに注意する．実際，持たないと仮定すると，ちょっと選択公理さんを拝借すればいつまでも止まらない増大列が構成できるので矛盾．

補題 5.15.

上の設定で，M がネーター $\Longleftrightarrow$ M の任意の部分加群は有限生成.

Proof. ($\Longrightarrow$) 任意に部分加群 N をとり固定する．このとき $\{L \subset N \mid L \text{ は有限生成部分加群 }\}$ は M がネーターなので極大元 N_0 をもつ．もし $N_0 \subsetneq N$ ならば $\exists x \in N \setminus N_0$ がとれるが，$N_0 \subsetneq N_0 + Rx$ となるから極大性に反す．($\Longleftarrow$) 任意に部分加群列 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset M$ をとり固定する．このとき帰納極限 $\lim_k N_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ はすぐ分かるように M の部分加群になるので，仮定からこれは有限生成．そこで $\lim_k N_k = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_R$ と表示しておくと，各 $1 \leqslant i \leqslant n$ に対して $\exists k_i$ s.t. $x_i \in N_{k_i}$ となっている．従って，$\lim_k N_k = N_{\max\{k_i\}}$ となる． □

例えばこのことから PID は必ずネーターになることが分かる（定義からも直接に分かるが）．特に，有理整数環 $\mathbb{Z}$ は PID だったのでネーターが従う．

補題 5.16.

環 R がネーターならば，任意の有限生成 R-加群はネーター.

Proof. 生成元の個数に関する帰納法による．まず 1 元生成 $M := Rx$ の場合．任意の部分加群列 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset M$ をとり固定する．このとき，$f : R \to M;\ r \mapsto rx$ は R-準同型だから $f^{-1}(N_1) \subset f^{-1}(N_2) \subset \cdots \subset R$ という部分加群列（イデアル列）を得る．仮定の R のネーター性からこれはどこかで止まり $\exists k$ s.t. $\forall n \geqslant k,\ f^{-1}(N_k) = f^{-1}(N_n)$ となっている．このとき $N_k = N_n$ である．実際，もし $N_k \subsetneq N_n$ なら，$\exists rx \in N_n \setminus N_k$ $(\subset M)$ がとれるが，$f(r) = rx$ だったので $r \in f^{-1}(N_n) = f^{-1}(N_k)$ となり，これから $rx \in N_k$ を強いるので矛盾.

次に，任意に有限生成 R-加群 M をとり $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_R$ と表示しておく．任意の部分加群列 $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset M$ をとり固定する．まず $M' := Rx_1$ として自然な全射 $f : M \to M/M'$ を考える．先程のことから M' はネーターなので，$N_1 \cap M' \subset N_2 \cap M' \subset \cdots \subset M'$ はいずれ止まる．他方

で，構成より M/M' の生成元の個数が $n-1$ 以下であることから I.H. によりこれはネーターなので，像の列 $f(N_1) \subset f(N_2) \subset \cdots \subset M/M'$ もいずれ止まる．両方の止まる数の最大値を k としておけば，これで $\forall n \geqslant k$ に対して $N_k = N_n$ となる．実際，もし止まっていなければ $\exists y \in N_n \setminus N_k$ をとれば，$f(y) \in f(N_n) = f(N_k)$ だから $\exists z \in N_k$ s.t. $f(y) = f(z)$ となっている．すると $y - z \in \mathsf{Ker}(f) = M'$ なので，$y - z \in N_n \cap M' = N_k \cap M' \subset N_k$ を得る．従って，$y \in z + N_k \subset N_k$ となり矛盾． □

以下では R を可換環とする．元 $x \in R$ に対して，x で生成される R 内の部分環を $\mathbb{Z}[x]$ とかくことにする．

定義 5.17.

元 $x \in R$ が $\mathbb{Z}$ **上で整** $:\Longleftrightarrow$ $\exists a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ s.t. $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$ in R. 簡単のため全体を $R^{\text{整}}$ とかいておく．

いわゆる代数的整数全体の集合は $\mathbb{C}^{\text{整}}$ であり，$\mathbb{C}^{\text{整}} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ であることに注意する．また可換環の拡大 $R \subset S$ に対して，明らかに $R^{\text{整}} \subset S^{\text{整}}$ にも注意する（系 5.19 よりこれは環の拡大になっている）．

命題 5.18.

元 $x \in R$ に対して，以下は同値:

(1) $x \in R^{\text{整}}$.
(2) $\mathbb{Z}[x]$ は有限生成 $\mathbb{Z}$-加群.
(3) $\mathbb{Z}[x] \subset \exists M \subset R$ s.t. M は有限生成 $\mathbb{Z}$-部分加群.

Proof. (1)$\Longrightarrow$(2): 整の定義から $x^n = -a_1 x^{n-1} - \cdots - a_n$ のようなことが成り立つので，このとき $\mathbb{Z}[x] = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^{n-1} \rangle_{\mathbb{Z}}$ となる．(2)$\Longrightarrow$(1): 各自然数 n に対して，$M_n := \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n \rangle_{\mathbb{Z}} \subset R$ という $\mathbb{Z}$-部分加群を考えると，定義から $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset \mathbb{Z}[x] = \lim_n M_n$ となっている．いま仮定から $\mathbb{Z}[x]$ は有限生成なので，$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $M_n = \mathbb{Z}[x]$ となっている．(2)$\Longrightarrow$(3): これは明らか．(3)$\Longrightarrow$(2): $\mathbb{Z}$ はネーターだったので，補題 5.16（と補題 5.15）から，M の部分加群 $\mathbb{Z}[x]$ も有限生成． □

系 5.19.

次が成り立つ：

(1) R が有限生成 $\mathbb{Z}$-加群なら $R^{\text{整}} = R$.
(2) $R^{\text{整}}$ は R の部分環.

Proof. (1) $\mathbb{Z}$ はネーターなので，仮定から R の任意の部分 $\mathbb{Z}$-加群は有限生成だったので，命題 5.18 から従う．(2) 任意に $x, y \in R^{\text{整}}$ をとり固定する．命題 5.18 から R の部分環 $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}[y]$ は有限生成 $\mathbb{Z}$-加群なので，$\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[y]$ もまた有限生成 $\mathbb{Z}$-加群．すると R の積が誘導する $\mathbb{Z}[x, y] := \mathsf{Im}(\mathbb{Z}[x] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[y] \xrightarrow{\text{mult}} R)$ もまた有限生成 $\mathbb{Z}$-加群と分かる（積は “線型” だったことを思い出す）．よっ

て $\mathbb{Z}[x+y], \mathbb{Z}[xy] \subset \mathbb{Z}[x,y]$ を考えれば，また命題 5.18 から $x+y, xy \in R^{整}$. $\square$

参考文献

[井ノ口] 井ノ口 順一, **初めて学ぶリー群 –線型代数から始めよう**, 現代数学社 (2017)

[岩堀] 岩堀 長慶, **岩波講座基礎数学 線型代数 *vi* 対称群と一般線型群の表現論**, 岩波書店 (1978)

[小林・大島] 小林 俊行・大島利雄, **リー群と表現論**, 岩波書店 (2005)

[高瀬] 高瀬 幸一, **群の表現序説**, 岩波書店 (2013)

[平井] 平井 武, **線形代数と群の表現** *I, II*, 朝倉書店 (2001)

[本間] 本間 泰史, **有限群の表現，対称群の表現の基礎**

[永尾・津島] 永尾 汎・津島 行男, **数学選書** *8* **有限群の表現**, 裳華房 (1987)

[Serre] J.-P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups*, GTM 42 (1971)

[Waterhouse] W. C. Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, GTM 66 (1979)