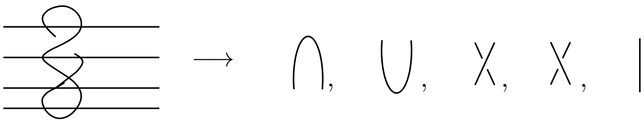
組みひも群とヤン・バクスター方程式

S15M007 井伊 隼平

1　分配関数とヤン・バクスター方程式

1.1　分配関数

どんなリンクに対しても交差を固定し適当に横に切れば，次のように基本的な 5 つのパーツに分類される．



カウフマンのブラケット多項式をより細かく，これらのパーツから再構成していこう．上の基本的な 5 つのパーツそれぞれの辺の端点に正負の符号 $a, b, \cdots \in \{+,-\}$ を割り当て（ステートという），それに $\mathbb{C}[A, A^{-1}]$ の元 $\langle\quad\rangle'$ を上手に対応させることを考える．

$$\underset{a\ b}{\cap} \longrightarrow \langle \underset{a\ b}{\cap} \rangle', \qquad \overset{a\ b}{\cup} \longrightarrow \langle \overset{a\ b}{\cup} \rangle', \qquad \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \longrightarrow \langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \rangle', \qquad \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \longrightarrow \langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \rangle', \qquad \overset{a}{\underset{b}{|}} \longrightarrow \langle \overset{a}{\underset{b}{|}} \rangle'.$$

ここで，$\langle \overset{a}{\underset{b}{|}} \rangle' = \delta_{a,b}$ (クロネッカーのデルタ) とし，$\langle \underset{a\ b}{\cap} \rangle' = \langle \overset{a\ b}{\cup} \rangle'$ とする．これから構成するものがカウフマンのブラケット多項式の性質を満たすことを要求すると，各 $a, b, c, d \in \{+,-\}$ に対して

$$\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \rangle' \ = \ A\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{)(}} \rangle' + A^{-1}\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cup}{\cap}}} \rangle', \qquad \langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \rangle' \ = \ A^{-1}\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{)(}} \rangle' + A\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cup}{\cap}}} \rangle'$$

とするのは自然である．ただし $\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{)(}} \rangle' = \langle \overset{a}{\underset{c}{|}} \rangle' \langle \overset{b}{\underset{d}{|}} \rangle'$ かつ $\langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cup}{\cap}}} \rangle' = \langle \overset{a\ b}{\cup} \rangle' \langle \underset{c\ d}{\cap} \rangle'$ と計算する．さて本稿で扱う分配関数を以下のように定義をする．

> **定義**
>
> リンク L に対して (1) L を基本的な 5 つのパーツに切り，各辺の端点に正負の符号 $\{+,-\}$ をふる．ただし，切られた端点同士は同じ符号とする．(2) 各パーツに対し $\langle\quad\rangle'$ をとり，それらの積をとる．(3) すべてのパターンの符号で (2) を計算し，総和をとる．このようにしてできた $\mathbb{C}[A, A^{-1}]$ の元を L の**分配関数**といい，$\langle L \rangle_B$ と表記することにする．

例えば $L = 8$ の場合その分配関数は，以下のように 16 個の和となる．

$$\langle 8 \rangle_B = \sum_{a,b,c,d} \langle \underset{a\ b}{\cap} \rangle' \langle \overset{a\ b}{\underset{c\ d}{\times}} \rangle' \langle \overset{c\ d}{\cup} \rangle' = \langle \underset{+\,+}{\cap} \rangle' \langle \overset{+\ +}{\underset{+\ +}{\times}} \rangle' \langle \overset{+\ +}{\cup} \rangle' + \langle \underset{+\,+}{\cap} \rangle' \langle \overset{+\ +}{\underset{+\ -}{\times}} \rangle' \langle \overset{+\ -}{\cup} \rangle' + \cdots + \langle \underset{-\,-}{\cap} \rangle' \langle \overset{-\ -}{\underset{-\ -}{\times}} \rangle' \langle \overset{-\ -}{\cup} \rangle'.$$

カウフマンのブラケット多項式では，自明な結び目 $L = \bigcirc$ の値は $d = -A^2 - A^{-2}$ であった．分配関数も同様の値をとることを課すと $\langle \bigcirc \rangle_B = \sum_{a,b} \langle \underset{a\ b}{\cap} \rangle' \langle \overset{a\ b}{\cup} \rangle' = d$ を満たさなくてはならない．さらに各 $a, b \in \{+,-\}$ に対して，$\overset{a}{\underset{b}{\wr}} = \overset{a}{\underset{b}{|}}$ となるべきなので，$\langle \underset{b\ +}{\cap} \rangle' \langle \overset{+\ a}{\cup} \rangle' + \langle \underset{b\ -}{\cap} \rangle' \langle \overset{-\ a}{\cup} \rangle' = \langle \overset{a}{\underset{b}{|}} \rangle'$ を要請する．これらの仮定は

$$\langle \underset{+\,+}{\cap} \rangle' = 0 = \langle \underset{-\,-}{\cap} \rangle', \qquad \langle \underset{+\,-}{\cap} \rangle' = iA, \qquad \langle \underset{-\,+}{\cap} \rangle' = -iA^{-1} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

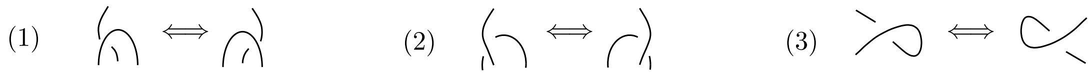
と定めることによって，共に満たされることが確かめられる．以降この値を用いることにする．

すると計算によって $R^{ab}_{cd} := \langle {}^{a}_{c}\!\times\!{}^{b}_{d} \rangle'$ の値は，具体的に以下のように求まる．

$$R := \begin{pmatrix} R^{++}_{++} & R^{+-}_{++} & R^{-+}_{++} & R^{--}_{++} \\ R^{++}_{+-} & R^{+-}_{+-} & R^{-+}_{+-} & R^{--}_{+-} \\ R^{++}_{-+} & R^{+-}_{-+} & R^{-+}_{-+} & R^{--}_{-+} \\ R^{++}_{--} & R^{+-}_{--} & R^{-+}_{--} & R^{--}_{--} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} & A-A^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

1.2　カウフマンのブラケット多項式と分配関数

分配関数は交差を固定したリンクを横に切ることによって計算されるのであった．一方で，カウフマンのブラケット多項式は $R_{I\!I}$ および $R_{I\!I\!I}$ の動きを許し，さらにリンクの交差を固定せずに計算される．したがって，分配関数がカウフマンのブラケット多項式と一致することをみる為に，$R_{I\!I}$ および $R_{I\!I\!I}$ の移動で不変であることを確認することはもちろんだが，まず次の変形（[1, p.89] 参照）で不変であることを確かめる．



命題 1

分配関数 $\langle\quad\rangle_B$ は上記 (1), (2), (3) の移動で不変である．

[証明] まずは (1) について．定義から任意の $a, b, c, d \in \{+, -\}$ に対し，各ステートでは

$$\langle {}^{a}_{b}\,\cap_{c\,d} \rangle' = \sum_e \langle {}^{a}_{b}\!\times\!{}^{e}_{c} \rangle' \langle \cap_{e\,d} \rangle', \qquad \langle \overset{a}{\cap}_{b\,c\,d} \rangle' = \sum_e \langle \cap_{b\,e} \rangle' \langle {}^{e}_{c}\!\times\!{}^{a}_{d} \rangle'$$

とかけるので，これらが一致することを確かめればよい．ほとんどは 0 として一致するので，それ以外で考えれば十分である．例えば $a = b = c = -, d = +$ のとき左側は以下のように計算できる．

$$\langle {}^{a}_{b}\,\cap_{c\,d} \rangle' = R^{-+}_{--}\langle \cap_{++} \rangle' + R^{--}_{--}\langle \cap_{-+} \rangle' = 0 + A(-iA^{-1}) = -i.$$

一方で右側も同じ値 $-i$ と計算でき一致する．他も同様である．次に (2) についても $\langle \overset{a}{\cap}_{b\,c\,d} \rangle' = \langle \overset{a}{\cap}_{b\,c\,d} \rangle'$ が同様にして確認できる．最後に (3) について計算すると，

$$\langle {}^{a}_{b}\!\times\!\circ \rangle' = \sum_{c,d,e} \langle \cap_{c\,d} \rangle' \langle {}^{a}_{b}\!\times\!{}^{c}_{e} \rangle' \langle \cup^{e\,d} \rangle', \qquad \langle \circ\!\times\!{}^{a}_{b} \rangle' = \sum_{c,d,e} \langle \cap_{c\,d} \rangle' \langle {}^{d}_{e}\!\times\!{}^{a}_{b} \rangle' \langle \cup^{c\,e} \rangle'$$

これも同様に非ゼロの箇所を考えればよい．例えば $a = b = +$ のとき左側は $-A^3$ となり，右側は

$$\langle \circ\!\times\!{}^{a}_{b} \rangle' = R^{++}_{++}(\langle \cap_{-+} \rangle')^2 + R^{-+}_{-+}(\langle \cap_{+-} \rangle')^2 = A(-iA^{-1})^2 + (A - A^{-3})(iA)^2 = -A^3$$

となるので一致している．他の場合も同様にチェックできる．//

命題 2

分配関数 $\langle\quad\rangle_B$ は $R_{I\!I}$ で不変である．

[証明] 命題 1 の証明のように各ステートで非ゼロの箇所をチェックすれば十分である．定義から

$$\langle {}^{a\,b}_{c\,d} \rangle' = \sum_{e,f} \langle {}^{a}_{e}\!\times\!{}^{b}_{f} \rangle' \langle {}^{e}_{c}\!\times\!{}^{f}_{d} \rangle', \qquad \langle {}^{ab}_{cd} \rangle' = \delta_{a,c}\,\delta_{b,d}, \qquad \langle {}^{a\,b}_{c\,d} \rangle' = \sum_{e,f} \langle {}^{a}_{e}\!\times\!{}^{b}_{f} \rangle' \langle {}^{e}_{c}\!\times\!{}^{f}_{d} \rangle'$$

である．例えば $a = c = +, b = d = -$ の場合を考えれば，中央の値ははもちろん 1 であり，左側（右側）で値が残っている和の取り方は $e = -, f = +$ のときで，この場合 $A^{-1}A = 1$ となるので一致する．他も同様にして一致することがわかる．//

また R_I の移動に関しては次のように計算できる．

$$\langle \underset{+\,-}{} \rangle' = -iA^{-2} = -A^{-3}\langle \underset{+-}{\cap} \rangle', \quad \langle \underset{-\,+}{} \rangle' = -iA^{-4} = -A^{-3}\langle \underset{+-}{\cap} \rangle', \quad \langle \underset{+\,+}{} \rangle' = \langle \underset{-\,-}{} \rangle' = 0.$$

まとめると $\langle \underset{a\ \ b}{} \rangle' = -A^{-3}\langle \underset{a\ b}{\cap} \rangle'$．交差の上下が逆のときも同様にして，$\langle \underset{a\ b}{} \rangle' = -A^{3}\langle \underset{a\ b}{\cap} \rangle'$ とわかる．
従って，カウフマンのブラケット多項式と同様に $-A^{\pm 3}$ 倍ずれていることが確認できる．

1.3 ヤン・バクスター方程式

命題 3

分配関数 $\langle\quad\rangle_B$ は $R_{I\!I\!I}$ で不変である．

[証明] これまでと同じく各ステートごとで見ていく．記号の定義から，$\langle \overset{abc}{\underset{def}{}} \rangle' = \sum_{p,q,r} \langle \overset{a\ b}{\underset{p\ q}{\times}} \rangle' \langle \overset{q\ c}{\underset{r\ f}{\times}} \rangle' \langle \overset{p\ r}{\underset{d\ e}{\times}} \rangle' = \sum_{p,q,r} R^{ab}_{pq} R^{qc}_{rf} R^{pr}_{de}$ となる．これは $a=b=c=d=e=f=+$ のとき A^3 となる．一方で，$\langle \overset{abc}{\underset{def}{}} \rangle' = \sum_{s,t,u} R^{bc}_{su} R^{as}_{dt} R^{tu}_{ef}$ もこのとき A^3 となることが確認できる．他の場合も含め，合計 14 通りの計算をすることにより，全てのパターンで一致することが示される．//

これまでのことから，分配関数 $\langle\quad\rangle_B$ はカウフマンのブラケット多項式と一致していることが分かった．また，分配関数が $R_{I\!I\!I}$ で不変であることをまとめると，以下の関係式が得られる．

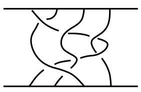
$$\forall a,b,c,d,e,f \in \{+,-\}, \qquad \sum_{p,q,r} R^{ab}_{pq} R^{qc}_{rf} R^{pr}_{de} \;=\; \sum_{s,t,u} R^{bc}_{su} R^{as}_{dt} R^{tu}_{ef}.$$

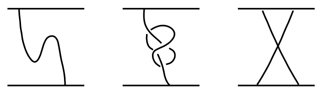
この関係式を**ヤン・バクスター方程式**という．

2 組みひも群の行列表現

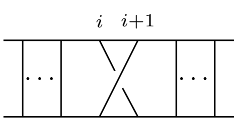
2.1 組みひも群

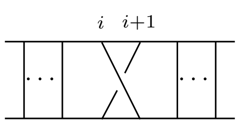
自然数 n に対して，上下にそれぞれ n 個の点をとり，それらを n 本のひもでつなげたものを n **組みひも**という．ただし，ひもの交差の上下は区別でき，ひもは常に下向きに垂れているものとする．


4 組みひも


組みひもでない

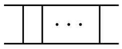
ひもを連続的に動かし，互いに移りあうものは同じ組みひもとして扱う．組みひもの両端を閉じることで（向きつき）リンクが得られる．実はアレクサンダーの定理（[1, p.47] 参照）により，逆もいえることが知られている．そこで以下では，リンクの代わりに組みひもを "代数的" に調べることにしよう．
まず n 組みひもは，次の $2(n-1)$ 個の交差から構成されていることに注意する．

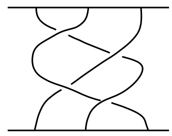
$\sigma_i =$ 

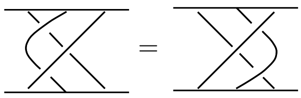
$\sigma_i^{-1} =$ 

$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$

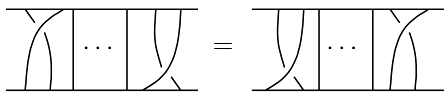
そこで n 組みひもが与えられたとき，それを上からみていき交差の現れる順に $\sigma_i^{\pm}$ たちを「左から積の形で書き並べ表記する」ことにする．

ふたつの n 組みひもに対して，一方の下端を他方の上端につなぐことで，新しい n 組みひもが得られる．すると n 組みひも全体はこの操作を積とし，自明な組みひもを単位元とすることで群をなすことが確認できる．これを B_n とかき n **次組みひも群**と呼ぶ．例えば，組みひも $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ の逆元は $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2)^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ である．組みひもの移動を考察することで，次の関係式を得る．





$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2)$



$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \qquad (|i-j| > 1)$

これを**組みひも関係式**という．実は n 次組みひも群 B_n は σ_i たちで生成され，この関係式で決定されることが知られている．この様にして，組みひもは代数的に研究できることが分かった．

2.2 組みひも群とヤン・バクスター方程式

例えば $n=2$ の場合，2 組みひもはすべて σ_1^m $(m \in \mathbb{Z})$ の形をしてるので，$\mathbb{Z} \to B_2; m \mapsto \sigma_1^m$ は群同型射であることが分かる．従って 2 次組みひも群 B_2 は $\mathbb{Z}$ と同型であり分かりやすい．しかし $n \geq 3$ の場合 B_n の群構造はとても複雑である．そこで群そのものを調べる代わりに，その行列表現を考察することにしよう．

一般に群 G の p 次元**表現**とは，G から p 次正則行列全体 GL_p への群準同型のことであった．すなわち表現を考えるということは，抽象的な群の各元を具体的な行列として表すことによって，G を "外から" 調べるということになる．

さて我々の場合，組みひも群 B_n の表現を与えるということは各 σ_i $(1 \leq i \leq n-1)$ に対して，適当なサイズの行列 X_i であって，組みひも関係式を反映した次の条件を満たすものを対応させるということになる．

$$X_iX_{i+1}X_i \ = \ X_{i+1}X_iX_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2), \qquad X_iX_j \ = \ X_jX_i \quad (|i-j| > 1).$$

ではこの関係式を満たすような行列は，いかにして見つければよいのであろうか．実は「ヤン・バクスター方程式の解」を用いれば，構成できるということが知られている．ここでは簡単のため，この事実を $n=3$ の場合で確かめてみよう．

はじめに組みひも $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ は，最初に左側の交差，次に右側の交差，最後に左側の交差をしたものであることに注意する．そこでひもの交差を全ての符号で並べた 4×4 行列 $R = (R^{ab}_{cd})$ を用いて（§1.1），この流れを表せばよいと気づく．これを実現するために行列の**クロネッカー積**（行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ と行列 B に対し，$A \otimes B := (a_{ij}B)_{ij}$ ）を用いる．2 次単位行列を I_2 とかくとき，次が成立する．

定理 4

対応 $\sigma_1 \mapsto X_1 := R \otimes I_2$, $\sigma_2 \mapsto X_2 := I_2 \otimes R$ は組みひも群 B_3 の表現である．

[証明] 具体的な計算により $X_1X_2X_1 = (R \otimes I_2)(I_2 \otimes R)(R \otimes I_2)$ は，ヤン・バクスター方程式の左辺を（適当な順番で）並べた 8×8 行列 $(\sum_{pqr} R^{ab}_{pq}R^{qc}_{rf}R^{pr}_{de})$ と一致することが確認できる．同様にして $X_2X_1X_2$ は，ヤン・バクスター方程式の右辺を並べた行列と一致することが確認できる．ここで R^{ab}_{cd} がヤン・バクスター方程式の解であることに注意すると，両者は一致し $X_1X_2X_1 = X_2X_1X_2$ が示される．//

参考文献

[1] 河野 俊丈（著），『新版 組みひもの数理』，遊星社，1993 年