三山崩しの必勝法とニム和

S14M067 西森 大記

一般にプレイヤーが二人のゲームにおいて，後攻の打った手に応じて常に先攻がうまい手を打ち続ければ勝てるとき**先手必勝**といい，逆に先攻がどんな手を打っても常に後攻がうまい手を打ち続ければ勝てるとき**後手必勝**という．三山崩しのあらゆる盤面は先手必勝，後手必勝のどちらか判別することができることが知られている．本論文ではその判別方法を数学的に考察する．

1 三山崩しとは？

有限個の石 (0 でもよい) がある三つの山から，二人のプレイヤーが交互に石を取り合うゲームを**三山崩し**という．プレイヤーは同時に二つ以上の山から石を取ることはできず，一つの山からなら何個でも取っても良いものとして，先に全ての山の石の個数を 0 にしたプレイヤーの勝ちとする．三つの山に石がそれぞれ $\ell, m, n \in \mathbb{N}_0$ 個あるとき (ℓ, m, n) と表す $(\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$．すると盤面全体の集合は $\mathbb{N}_0^3 = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ で与えられ，最終盤面は $(0, 0, 0)$ で与えられる．

例 1.1. 山が一つのときと二つのときは，簡単に先手必勝か後手必勝かを判別できる．
(I) 山が一つのときは $(\ell, 0, 0)$ の盤面をしている．このとき明らかに先手必勝である．
(II) 山が二つのときは $(\ell, m, 0)$ の盤面をしている．このとき ℓ, m の状態により次のような場合分けをする．
(II-a) $m < \ell$ のとき，先攻が第一の山から $\ell - m$ 個取って $(m, m, 0)$ の盤面を作れる．すると後攻は適当な $m' < m$ で $(m', m, 0)$ か $(m, m', 0)$ の盤面しか作れないので，先程と同じく先攻が二つの山の個数を同じ盤面を作れる．これを繰り返すと先攻が最終盤面を作れるので，先手必勝．$\ell < m$ のときも同様である．
(II-b) $m = \ell$ のとき，(II-a) のときの考察から後手必勝と分かる．

三山崩しにおける先手 · 後手必勝であるという状況を数学的に形式化しよう．そのためにプレイヤーが各山から石を $x (\in \mathbb{N})$ 個取るという行為を，次の $\mathbb{N}_0^3$ から $\mathbb{Z}^3$ への写像たち $f_x^1,\ f_x^2,\ f_x^3$ で表すことにする．

$$f_x^1(a, b, c) := (a - x, b, c), \quad f_x^2(a, b, c) := (a, b - x, c), \quad f_x^3(a, b, c) := (a, b, c - x).$$

便宜的に全体を $\mathcal{M} := \{f_x^i : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{Z}^3 \mid x \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, 3\}$ とおく．

定義 1.2. $(0, 0, 0)$ を含む $W \subset \mathbb{N}_0^3$ が**後手必勝形**であるとは，$\forall g \in \mathbb{N}_0^3$ に対して次が成立するときをいう．
(W1) $g \in W \implies \forall f \in \mathcal{M},\ [f(g) \in \mathbb{N}_0^3 \Rightarrow f(g) \notin W]$.
(W2) $g \notin W \implies \exists f \in \mathcal{M}$ s.t. $[f(g) \in \mathbb{N}_0^3$ かつ $f(g) \in W]$.
(W3) $g \in W \implies \forall \sigma \in S_3,\ \sigma \cdot g \in W$ (ここで S_3 は三次対称群で $\sigma \cdot g$ は σ による g の成分の入れ替え).

[注意] (W2) の対偶は (W1) の逆に他ならない．(W3) は初めの石の並びによらないことを意味している．

考察 1.3. 後手必勝形 W の存在がいえたとし，盤面が $g \in W$ であるとする．すると先攻は (W1) より $f(g) \notin W$ となる盤面 $f(g)$ しか作れない．次に後攻が (W2) より $\exists f'\ s.t.\ f'(f(g)) \in W$ となる盤面 $f'(f(g))$ を作れる．すると先攻は (W1) より $f''(f'(f(g))) \notin W$ となる盤面 $f''(f'(f(g)))$ しか作れない．これを繰り返すと後攻が最終盤面の $(0, 0, 0) \in W$ にたどり着く．したがって $g \in W$ なら後手必勝であると分かり，言葉遣いに整合性がある．そこで本稿では，三山崩しで後手必勝形が存在することを示す．

2　後手必勝形とニム和 $\oplus$

以下で，ひとまず後手必勝形 W が存在すると仮定して様々な性質を調べていく．

命題 2.1. $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$(\ell, m, n) \in W$ をみたす $\ell \in \mathbb{N}_0$ が唯一つ存在する．

Proof. [唯一性] $\ell' < \ell$ に対して (ℓ, m, n), $(\ell', m, n) \in W$ と仮定すると，(W1) より $(\ell, m, n) = f^1_{\ell-\ell'}(\ell', m, n) \notin W$ となるので矛盾．[存在性] $k = m + n$ に関する帰納法によって示す．$k = 0$ のとき $\ell = 0$ とすれば $(0, 0, 0) \in W$ より成立．k まで成立すると仮定すると，帰納法の仮定と先に示した唯一性より

$$(*) \qquad (\ell_1, m-1, n),\ (\ell_2, m-2, n),\ \ldots\ ,\ (\ell_m, 0, n),\ (\ell_{m+1}, m, n-1),\ \ldots\ ,\ (\ell_{m+n}, m, 0)\ \in W$$

をみたすような $\ell_1, \ldots, \ell_{m+n} \in \mathbb{N}_0$ が存在する．ここで $\ell := \min\{a \in \mathbb{N}_0 \mid 1 \le \forall i \le m + n,\ a \ne \ell_i\}$ とおいたとき $g := (\ell, m, n) \in W$ であることを以下で示す．$\forall f \in \mathcal{M}$ に対して $f(g) \in \mathbb{N}_0^3$ と仮定する．(I) $f = f^2_x$ または $f = f^3_x$ のとき ℓ の取り方から $\forall i,\ \ell \ne \ell_i$ なので ℓ_i の唯一性より $f(g) \notin W$ と分かる．(II) $f = f^1_x$ のとき ℓ の取り方から $\exists i$ *s.t.* $\ell - x = \ell_i$ である．すると $f(g) = (\ell_i, m, n)$ となる．いま ℓ_i の取り方から $\exists f' \in M$ *s.t.* $f'(f(g)) \in W$ なので (W1) の対偶より $f(g) \notin W$ である．以上 (I), (II) より $f(g) \notin W$ と分かった．すると (W2) の対偶より $g \in W$ である． □

命題 2.1 により唯一つに定まる ℓ を $m \oplus n$ と書き，m と n の**ニム和**という．以下でその性質をみていく．

補題 2.2. $\forall \ell, m, n \in \mathbb{N}_0$ について．(1) $(\ell, m, n) \in W$ ならば $n = \ell \oplus m$ かつ $m = \ell \oplus n$．(2) [可換性] $m \oplus n = n \oplus m$．(3) [ゼロ元] $m \oplus 0 = 0 \oplus m = m$．(4) [逆元] $m \oplus m = 0$．

Proof. (1) (W3) より $(m, \ell, n) = (12) \cdot (\ell, m, n) \in W$ なので $n = l \oplus m$ となる．また (n, l, m) のときも同様．(2) (W3) と唯一性より従う．(3) 山が二つの例より $(m, m, 0) \in W$．(4) これは (1) と (3) より従う． □

定理 2.3. [結合律] $\forall \ell, m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$\ell \oplus (m \oplus n) = (\ell \oplus m) \oplus n$．特に $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ は可換群をなす．

Proof. $p = \ell \oplus (m \oplus n)$ と書き $S_p := p + \ell + m + n$ をその高さという．主張をこの高さに関する帰納法で示す．$S_p = 0$ のとき $p = \ell = m = n = 0$ より自明．さて，背理法により主張が成立しないと仮定して，そのうちで高さ S_p が最小のものをとり $p = \ell \oplus (m \oplus n) \ne q = (\ell \oplus m) \oplus n$ と表示する．以下で $p < q$ と仮定しても一般性は失われない．いま，おき方から $(q, \ell \oplus m, n) \in W$ なので (W1) より $\forall x \in \mathbb{N},\ f^1_x(q, \ell \oplus m, n) \notin W$ となる．したがって $(p, \ell \oplus m, n) = f^1_{q-p}(q, \ell \oplus m, n) \notin W$ である．すると (W2) より $\exists f \in \mathcal{M}$ *s.t.* $f(p, \ell \oplus m, n) \in W$ となっている．上のことから (I) $f = f^3_x$ もしくは (II) $f = f^2_x$ の可能性がある．

(I) のとき $(p, \ell \oplus m, n - x) = f(p, l \oplus m, n) \in W$．つまり $n - x = p \oplus (\ell \oplus m)$．一方で $(p, \ell, m \oplus n) \in W$ なので $m \oplus n = p \oplus \ell$．補題 2.2 (1) より $n = (p \oplus \ell) \oplus m$ なので合わせると $p \oplus (\ell \oplus m) = n - x < n = (p \oplus \ell) \oplus m$ となり主張は不成立．このとき，高さは $S_{n-x} < S_n$ なので最小性に反する．

(II) のとき $(p, (\ell \oplus m) - x, n) = f(p, \ell \oplus m, n) \in W$．簡単のため $m' := (\ell \oplus m) - x$ とおく．$m' = n \oplus p$ に注意する．他方で $(\ell, m, \ell \oplus m) \in W$ だから，(W1) より $\forall y \in \mathbb{N},\ f^3_y(\ell, m, \ell \oplus m) \notin W$ である．特に $(\ell, m, m') = f^3_x(\ell, m, \ell \oplus m) \notin W$．すると (W2) から $\exists f' \in \mathcal{M}$ *s.t.* $f'(\ell, m, m') \in W$．このとき，また上記のことから (II-a) $f' = f^1_z$ もしくは (II-b) $f' = f^2_z$ の可能性がある．(II-a) のとき $(\ell - z, m, m') = f'(\ell, m, m') \in W$ だから $\ell - z = m \oplus m' = m \oplus (n \oplus p)$ となっているが，一方で $(p, \ell, m \oplus n) \in W$ より $\ell = (m \oplus n) \oplus p$ となり主張は不成立．このとき，高さは $S_{\ell-z} < S_\ell$. なので最小性に反する．(II-b) のとき

$(\ell, m-z, m') = f'(\ell, m, m') \in W$ だから $m - z = \ell \oplus m' = \ell \oplus (n \oplus p) = \ell \oplus (p \oplus n)$．一方で，前と同様にして $m \oplus n = \ell \oplus p$ だから $m = (\ell \oplus p) \oplus n$ となり，主張は不成立．このとき，高さ $S_{m-z} < S_m$．なので最小性に反する．以上 (I), (II) より主張は従う． □

3 ニム和 $\oplus$ とディジット和 $+_2$

ニム和 $\oplus$ は抽象的に定義されていて計算が簡単ではない. ここでは計算しやすい形に翻訳していく.

補題 3.1. $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$|m-n| \le m \oplus n \le m+n$.

Proof. まず $m \oplus n \le m+n$ を示す．$(*)$ の様に ℓ_i たちを取れば $m \oplus n = \min\{a \in \mathbb{N}_0 \mid \forall i,\ a \ne \ell_i\}$ となる．意味を考えると，この値が最大になるのは $\{\ell_1, \dots, \ell_{m+n}\} = \{0, 1, \dots, m+n-1\}$ のとき．このとき $m+n$ になる．よって $m \oplus n \le m+n$ となる．次に $|m-n| \le m \oplus n$ を示す．$\ell := m \oplus n$ とおくとき補題 2.2(1) と今のことから $n = \ell \oplus m \le \ell + m$ である．よって $n - m \le \ell$ となる．同様にして $m - n \le \ell$ である． □

補題 3.2. $\forall n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$n \oplus 1 = n + (-1)^n$.

Proof. まず n が偶数の場合を帰納法で示す．$n = 0$ は自明．n までで成立していると仮定する．補題 3.1 より $n-1 \le n \oplus 1 \le n+1$ となっているので $n \oplus 1 = n-1, n, n+1$ のいずれかになる．もし $n \oplus 1 = n-1$ なら帰納法の仮定より $n \oplus 1 = n-1 = (n-2)+1$ となっているので，これの両辺に 1 をニム和すると $n = n-2$ となり矛盾．次に $n \oplus 1 = n$ なら両辺に n をニム和すると $1 = 0$ となり矛盾．したがって $n \oplus 1 = n+1$ となり主張が従う．最後に n が奇数のとき $n-1$ は偶数なので $(n-1) \oplus 1 = (n-1) + (-1)^{n-1} = n - 1 + 1 = n$ が成り立つ．これの両辺に 1 をニム和すれば主張が従う． □

補題 3.3. $\forall s \in \mathbb{N}_0$ に対して次が成立する．$(1)_s$ $F_s := \{0, 1, \dots, 2^s - 1\}$ は $(\mathbb{N}_0, \oplus)$ の部分群．$(2)_s$ $m \in \mathbb{N}_0$ に対して $m < 2^s \Longrightarrow 2^s \oplus m = 2^s + m$.

Proof. (I) まず $(1)_s$ を仮定して $(2)_s$ を m に関する帰納法で示す．$m = 0$ は自明．m までで成立していると仮定すると $m < 2^s$ と補題 3.1 より $2^s - m \le 2^s \oplus m \le 2^s + m$ が成り立つ．もし $0 \le \exists k \le m-1$ *s.t.* $2^s \oplus m = 2^s + k$ なら，帰納法の仮定より $2^s + k = 2^s \oplus k$ となり $2^s \oplus m = 2^s \oplus k$．つまり $m = k$ となるので矛盾．次にもし $1 \le \exists k \le m$ *s.t.* $2^s \oplus m = 2^s - k$ なら $2^s \oplus m = 2^s - k \in F_s$ だから $m \in F_s$ に注意すると，$(1)_s$ より $2^s = (2^s \oplus m) \oplus m \in F_s$ となり矛盾．したがって $2^s \oplus m = 2^s + m$ と分かった.

(II) 次に「$(1)_s$かつ $(2)_s \Rightarrow (1)_{s+1}$」を s に関する帰納法で示す．$s = 0$ のとき $F_1 = \{0, 1\}$ が $\oplus$ で群になることは自明．s までで成立していると仮定して $\forall x, y \in F_{s+1}$ に対して $x \oplus y \in F_{s+1}$ を示す．まず $x, y \in F_s$ の場合は $(1)_s$ より $x \oplus y \in F_s \subset F_{s+1}$ となり成立．次に $x \in F_s$ かつ $y \in F_{s+1} \backslash F_s$ のとき $0 \le \exists k \le 2^s - 1$ *s.t.* $y = 2^s + k$ と書ける．すると $(2)_s$ より $x \oplus y = x \oplus (2^s \oplus k) = 2^s \oplus (x \oplus k)$．いま $(1)_s$ より $x + k \in F_s$ だから $x \oplus y \in F_{s+1}$．最後に $x, y \in F_{s+1} \backslash F_s$ のとき $0 \le k,\ \ell \le 2^s - 1$ *s.t.* $x = 2^s + k,\ y = 2^s + \ell$ の形．すると $(2)_s$ より $x \oplus y = (2^s \oplus k) \oplus (2^s \oplus \ell) = k \oplus \ell$ で，また $(1)_s$ より $x \oplus y \in F_s \subset F_{s+1}$．よって F_{s+1} は群をなす．以上 (I), (II) より主張が従う． □

命題 3.4. $\forall s, t \in \mathbb{N}_0$ に対して，$s \ne t$ のとき $2^s + 2^t = 2^s \oplus 2^t$.

Proof. このとき $2^s < 2^t$ か $2^s < 2^t$ のどちらか．どちらの場合も補題 3.3 $(2)_s$ より $2^s + 2^t = 2^s \oplus 2^t$． □

一般に $m \in \mathbb{N}_0$ に対して，その**二進展開**を $m = \sum_{s \geq 0} \varepsilon_s(m) 2^s$ と書くことにする．ここで，$\varepsilon_s(m) \in \{0, 1\}$ である．各 $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}$ に対して，**ディジット和**を $\varepsilon +_2 \varepsilon' := 0$ (if $\varepsilon = \varepsilon'$), 1 (if $\varepsilon \neq \varepsilon'$) と定義する (つまり繰り上がり無しの和)．このとき次が成立する．

定理 3.5. $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ に対して，$m \oplus n = \sum_{s \geq 0} (\varepsilon_s(m) +_2 \varepsilon_s(n)) 2^s$.

Proof. まず命題 3.4 より $m = \varepsilon_0(m)2^0 \oplus \varepsilon_1(m)2^1 \oplus \varepsilon_2(m)2^2 \oplus \cdots$ と書ける．一方で，補題 2.2 (4) より，各 s に対して $\varepsilon_s(m)2^s \oplus \varepsilon_s(n)2^s = (\varepsilon_s(m) +_2 \varepsilon_s(n))2^s$ であるから $\oplus$ の可換性と結合性より

$$m \oplus n = (\varepsilon_0(m) +_2 \varepsilon_0(n))2^0 \oplus (\varepsilon_1(m) +_2 \varepsilon_1(n))2^1 \oplus (\varepsilon_2(m) +_2 \varepsilon_2(n))2^2 \oplus \cdots .$$

よって，また命題 3.4 を用いることにより主張が従う． □

4 後手必勝形の存在性

いままでは後手必勝形 W の存在性を仮定してニム和を定義し，その性質からニム和が繰り上がり無しのディジット和になることを示してきた．そこで，改めて記号 $m \oplus n$ を定理 3.5 の式をもって再定義し，引き続きニム和と呼ぶ．するとこの $\oplus$ が補題 2.2 と定理 2.3 をみたすことはすぐ分かる．さらに次が成立する．

補題 4.1. $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_0$ に対して，$m_1 \oplus \cdots \oplus m_r \neq 0 \Longrightarrow 1 \leq \exists i \leq r \ s.t.\ m_1 \oplus \cdots \oplus m_r \oplus m_i < m_i$.

Proof. 仮定より $t := \max\{s \mid \varepsilon_s(m_1) +_2 \cdots +_2 \varepsilon_s(m_r) \neq 0$ (つまり $= 1$)$\}$ が存在する．またこのとき $\varepsilon_t(m_i) \neq 0$ (つまり $= 1$) をみたす i がある．すると

$$\begin{aligned} m_1 \oplus \cdots \oplus m_r \oplus m_i &= \sum_{0 \leq s \leq t-1} (\varepsilon_s(m_1) +_2 \cdots +_2 \varepsilon_s(m_r) +_2 \varepsilon_s(m_i))2^s + (1 +_2 1)2^t + \sum_{t+1 \leq s} (0 +_2 \varepsilon_s(m_i))2^s \\ &\leq \sum_{0 \leq s \leq t-1} 2^s + 0 \cdot 2^t + \sum_{s \leq t+1} \varepsilon_s(m_i)2^s. \end{aligned}$$

いま $\sum_{0 \leq s \leq t-1} 2^s = 2^t - 1 < 2^t = \varepsilon_t(m_i)2^t$ だから，主張が従う． □

定理 4.2. $W := \{(\ell, m, n) \in \mathbb{N}_0^3 \mid \ell \oplus m \oplus n = 0\}$ とおくと，W は後手必勝形.

Proof. (W1) $g = (\ell, m, n) \in W$ について，$\forall f \in \mathcal{M}$ で $f(g) \in \mathbb{N}_0^3$ であるものをとる．まず $f = f_x^1$ の形のときは $f(g) = (\ell - x, m, n)$ であるが，$g \in W$ より $m \oplus n = \ell$ に注意すると $(\ell - x) \oplus m \oplus n = (\ell - x) \oplus \ell$．もし $f(g) \in W$ ならば $(\ell - x) \oplus \ell = 0$ だが，両辺に ℓ を $\oplus$ すると，$\ell - x = \ell$ つまり $x = 0$ となり矛盾．したがって $f(g) \notin W$．他の f_x^2，f_x^3 の場合も同様にして $f(g) \notin W$．(W2) $g = (\ell, m, n) \notin W$ に対して $\ell \oplus m \oplus n \neq 0$ なので，補題 4.1 より (I) $\ell \oplus m \oplus n \oplus \ell < \ell$, (II) $\ell \oplus m \oplus n \oplus m < m$, (III) $\ell \oplus m \oplus n \oplus n < n$ のいずれかが起きる．(I) のとき $m \oplus n < \ell$ だから $f = f^1_{\ell - (m \oplus n)}$ とおけば，$f(g) = (m \oplus n, m, n) \in W$ となり，主張が従う．他の場合も (II) なら $f = f^2_{m - (\ell \oplus n)}$，(III) なら $f = f^3_{n - (\ell \oplus m)}$ としたら $f(g) \in W$．(W3) は明らか． □

以上の考察 1.3 と定理 4.2 を合わせることにより，自分が先攻でも後攻でもニム和が 0 でない盤面が回ってきさえすれば，ニム和が 0 になるようにディジット和を計算し，石を取り続ければ勝てると分かった．しかし，ニム和が 0 になるような盤面が回ってきて相手が必勝法を知っていれば，負ける．

参考文献

[1] 一松 信（著)，『石とりゲームの数理』，森北出版株式会社，2003 年