同値関係と数の構成について

S17M047 下山 晴生

本稿ではこれまで扱ってきた “種々の数” を集合論（写像，直積集合，同値関係）に立脚し再構成する．

1　整数 $\mathbb{Z}$ の構成

自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上の演算（和・積）及び全順序 $\leq$ は既知とする．例えば「$\mathbb{N}$ 内で $a + x = b + x$ が成立すれば，両辺で共通する x を “消去” して $a = b$ が得られる」こと等は自由に用いる．直積集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元 (m, n) と (x, y) に対して，$(m, n) \sim_{\mathbb{Z}} (x, y) :\Leftrightarrow m + y = n + x$ in $\mathbb{N}$ という関係を考える．

補題 1.1. この $\sim_{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係である．

Proof. [反射律] と [対称律] は明らかである．[推移律] 任意の $(m, n) \sim_{\mathbb{Z}} (x, y)$ と $(x, y) \sim_{\mathbb{Z}} (a, b)$ に対して，$(m + b) + (x + y) = (m + y) + (x + b) = (n + x) + (x + b) = (n + x) + (y + a) = (n + a) + (x + y)$ が定義から成立する．両辺から $x + y$ を “消去” して $m + b = n + a$ を得る．よって $(m, n) \sim_{\mathbb{Z}} (a, b)$ が成立する．　□

この同値関係による商集合を $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim_{\mathbb{Z}}$ と書き，元を**整数**という．この集合上に，二項演算 $+_{\mathbb{Z}}$ 及び $\times_{\mathbb{Z}}$，ゼロ元 $0_{\mathbb{Z}}$，単位元 $1_{\mathbb{Z}}$，順序 $\leq_{\mathbb{Z}}$ をそれぞれ次の様に定義する．

$$[(m, n)] +_{\mathbb{Z}} [(x, y)] := [(m + x, n + y)], \quad [(m, n)] \times_{\mathbb{Z}} [(x, y)] := [(mx + ny, my + nx)],$$

$$0_{\mathbb{Z}} := [(0, 0)],\ 1_{\mathbb{Z}} := [(1, 0)], \quad [(m, n)] \leq_{\mathbb{Z}} [(x, y)] :\Leftrightarrow m + y \leq n + x.$$

補題 1.2. これらの二項関係 $+_{\mathbb{Z}}, \times_{\mathbb{Z}}, \leq_{\mathbb{Z}}$ は well-defined である．

Proof. $+_{\mathbb{Z}}, \leq_{\mathbb{Z}}$ は比較的容易に示せる．[$\times_{\mathbb{Z}}$ について] 任意の $(m, n) \sim_{\mathbb{Z}} (m', n')$ と $(x, y) \sim_{\mathbb{Z}} (x', y')$ に対して，等号 $(m + n')(x + x') + (m + m')(x + y') + (n + m')(x' + y) = (n + m')(x + x') + (m + m')(y + x') + (m + n')(x + y')$ が $\mathbb{N}$ 内で成立する．これを整理し，$(mx + ny) + (m'y' + n'x') = (m'x' + n'y') + (my + nx)$ を得る．即ち，$(mx + ny, my + nx) \sim_{\mathbb{Z}} (m'x' + n'y', m'y' + n'x')$ である．　□

補題 1.3. 集合 $\mathbb{Z}$ は和 $+_{\mathbb{Z}}$ と積 $\times_{\mathbb{Z}}$ によって可換環をなす．さらに整域になる．

Proof. 演算の定義から $\mathbb{Z}$ が可換環をなすことは比較的容易に従う．例えば $[(m, n)]$ のマイナス元は $-[(m, n)] = [(n, m)]$ である．次に整域性をいう．もし $[(m, n)] \times_{\mathbb{Z}} [(x, y)] = 0_{\mathbb{Z}}$ であったとすると，$mx + ny = my + nx$ が成立する．$[(m, n)] \neq 0_{\mathbb{Z}}$，つまり $m \neq n$ の場合，$n \leq m$ 若しくは $m \leq n$ が成立している．前者の場合，$\exists k \in \mathbb{N}, m = n + k$ と表せるので，$nx + kx + ny = ny + ky + nx$ を得る．両辺で共通する項を “消去” して $kx = ky$ が成立する．いま $[(m, n)] \neq 0_{\mathbb{Z}}$ だから $k \neq 0$ である．よって $\mathbb{N}$ の性質より $x = y$ を得るので，$[(x, y)] = 0_{\mathbb{Z}}$ である．後者の場合も同様である．　□

補題 1.4. $\forall M, X \in \mathbb{Z}$ に対して次が成立する．(1) $M \leq_{\mathbb{Z}} X \Leftrightarrow 0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} X - M$, (2) $0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} A$ かつ $A \neq 0_{\mathbb{Z}}$ ならば $[0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} M \Leftrightarrow 0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} M \times_{\mathbb{Z}} A]$, (3) $0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} A$ かつ $A \neq 0_{\mathbb{Z}}$ ならば $[M \leq_{\mathbb{Z}} X \Leftrightarrow M \times_{\mathbb{Z}} A \leq_{\mathbb{Z}} X \times_{\mathbb{Z}} A]$.

Proof. (1) は順序の定義から明らかである．(2) 代表元で $M = [(m, n)], A = [(a, b)]$ と表示するとき，仮定より，ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し $a = b + k$ と表せる．($\Rightarrow$) 仮定から $n \leq m$ がいえるので，$mb + na = mb + nb + nk \leq mb + nb + mk$ が得られる．不等式左辺は $m(b + k) + nb = ma + nb$ となるので，$0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} M \times_{\mathbb{Z}} A$ が成

立する．($\Leftarrow$) 仮定より $mb+na \leq ma+nb$ がいえるので，$mb+nb+nk \leq mb+mk+nb$ が得られる．両辺で共通する項を “消去” して，$nk \leq mk$ となる．いま仮定より $A \neq 0_{\mathbb{Z}}$ だから $k \neq 0$ である．よって $\mathbb{N}$ の性質より $n \leq m$ が成立する．(3)($\Rightarrow$) (1) より，$0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} X-M$ を得る．$0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} A$ なので (2) より，$0_{\mathbb{Z}} \leq_{\mathbb{Z}} (X-M) \times_{\mathbb{Z}} A$ がわかる．$\mathbb{Z}$ の分配律より $(X-M)\times_{\mathbb{Z}} A = X \times_{\mathbb{Z}} A - M \times_{\mathbb{Z}} A$ が成り立つので，(1) より $M \times_{\mathbb{Z}} A \leq_{\mathbb{Z}} X \times_{\mathbb{Z}} A$ が成立する．($\Leftarrow$) 先の議論の逆を辿ればよい． □

自然な写像 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}; m \mapsto [(m,0)]$ は二項演算と順序を保つ単射である事がすぐにわかる．つまり $\forall m,x\in\mathbb{N}$ に対して，$f(m+x)=f(m)+_{\mathbb{Z}}(x)$, $f(mx)=f(m)\times_{\mathbb{Z}} f(x)$, $m\leq x \Leftrightarrow f(m)\leq_{\mathbb{Z}} f(x)$ が成立する．この単射による同一視のもと，以降 $m,n\in\mathbb{N}$ に対して，$+_{\mathbb{Z}},\times_{\mathbb{Z}},0_{\mathbb{Z}},1_{\mathbb{Z}},\leq_{\mathbb{Z}}$ の添字 $\mathbb{Z}$ は省略する．

2 有理数 $\mathbb{Q}$ の構成

以下で $\mathbb{Z}^+ := \{N\in\mathbb{Z} \mid 0\leq N$ かつ $N\neq 0\}$ とおく．直積集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$ の元 (M,N) と (X,Y) に対して，$(M,N)\sim_{\mathbb{Q}}(X,Y) :\Leftrightarrow MY=NX$ in $\mathbb{Z}$ という関係を考える．

補題 2.1. この $\sim_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$ 上の同値関係である．

Proof. [反射律] と [対称律] は明らかである．[推移律] 任意の $(M,N)\sim_{\mathbb{Q}}(X,Y)$ と $(X,Y)\sim_{\mathbb{Q}}(A,B)$ を取り固定する．まず $MY=NX$ の両辺に B を掛けると $MYB=NXB$ を得る．この右辺で $XB=YA$ を用いれば $MYB=NYA$ が成立する．いま $Y\in\mathbb{Z}^+$ であるから，補題 1.3 より $MB=NA$ を得る． □

この同値関係による商集合を $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+)/\sim_{\mathbb{Q}}$ と書き，その元を**有理数**という．この集合上に，二項演算 $+_{\mathbb{Q}}$ 及び $\times_{\mathbb{Q}}$，ゼロ元 $0_{\mathbb{Q}}$，単位元 $1_{\mathbb{Q}}$，順序 $\leq_{\mathbb{Q}}$ をそれぞれ次の様に定義する．

$$[(M,N)]+_{\mathbb{Q}}[(X,Y)] := [(MY+NX,NY)],\quad [(M,N)]\times_{\mathbb{Q}}[(X,Y)] := [(MX,NY)],$$
$$0_{\mathbb{Q}} := [(0,1)],\ 1_{\mathbb{Q}} := [(1,1)],\ [(M,N)]\leq_{\mathbb{Q}}[(X,Y)] :\Leftrightarrow MY\leq NX.$$

補題 2.2. これらの二項関係 $+_{\mathbb{Q}},\times_{\mathbb{Q}},\leq_{\mathbb{Q}}$ は well-defined である．

Proof. $+_{\mathbb{Q}},\times_{\mathbb{Q}}$ は比較的容易に示せる．[$\leq_{\mathbb{Q}}$ について] 任意の $(M,N)\sim_{\mathbb{Q}}(M',N')$ と $(X,Y)\sim_{\mathbb{Q}}(X',Y')$ に対して，$MN'=NM'$ かつ $XY'=YX'$ が成立している．いま $MY\leq NX$ と仮定すると，両辺に $N'\in\mathbb{Z}^+$ を掛けることで $MN'Y\leq NN'X$ を得る（補題 1.4(3)）．これにより $NM'Y\leq NN'X$ が成立する．ここで $N\in\mathbb{Z}^+$ なので補題 1.4(3) より，$M'Y\leq N'X$ がわかる．この両辺に Y' を掛けて $M'YY'\leq N'XY'$ を得る（補題 1.4(3)）．これにより $MYY'\leq N'YX'$ が成立する．いま $Y\in\mathbb{Z}^+$ なので，補題 1.4(3) より $M'Y'\leq N'X'$ が成立する． □

上記演算により $\mathbb{Q}$ は体をなすことが容易に示される．例えば $0_{\mathbb{Q}}\neq[(M,N)]\in\mathbb{Q}$ に対して，その逆元は $[(N,M)]$ で与えられる．自然な写像 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}; M\mapsto[(M,1)]$ は順序を保つ単射な環準同型である．この同一視のもと，以降 $(M,N)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^+$ に対して，$\frac{M}{N} := [(M,N)]$ と書き，$+_{\mathbb{Q}},\times_{\mathbb{Q}},0_{\mathbb{Q}},1_{\mathbb{Q}},\leq_{\mathbb{Q}}$ の添字 $\mathbb{Q}$ は省略する．補題 1.4 から次がすぐわかる．

補題 2.3. $\forall M,X\in\mathbb{Z},\forall N\in\mathbb{Z}^+$ に対して，$M\leq X \Leftrightarrow \frac{M}{N}\leq\frac{X}{N}$ が成立する．

各 $q\in\mathbb{Q}$ に対して $|q| := q(0\leq q$ のとき$)$, $-q(q\leq 0$ のとき$)$ をその**絶対値**という．

補題 2.4 (三角不等式)**.** $\forall p,q\in\mathbb{Q}$ に対して，$(1)|p+q|\leq|p|+|q|$ かつ $(2)\ |p|-|q|\leq|p-q|$ が成立する．

Proof. (1) まず p, q が同時に正・負のときは定義より明らか．次に $q \leq 0 \leq p$ のときを考える．(i) $0 \leq p+q$ のとき $|p+q| = p+q \leq p-q = |p|+|q|$ なのでよい．(ii) $p+q \leq 0$ のとき $|p+q| = -p-q \leq p-q = |p|+|q|$ なのでよい．最後に $p \leq 0 \leq q$ のときも同様にして主張が確かめられる．この結果より (2) は容易に従う． □

簡単の為，$p, q \in \mathbb{Q}$ に対して $p < q :\Leftrightarrow p \leq q$ かつ $p \neq q$ と定義し，$\mathbb{Q}^+ := \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q\}$ と書く．

補題 2.5. (1) $\forall q, p \in \mathbb{Q}$ に対して $[q < p \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}, q < r < p]$ が成立する．(2) $\forall q \in \mathbb{Q}$ に対して $[\forall p \in \mathbb{Q}^+, q < p \Rightarrow q \leq 0]$ が成立する．(3) $\forall q \in \mathbb{Q}$ に対して $[\forall p \in \mathbb{Q}^+, |q| < p \Rightarrow q = 0]$ が成立する．

Proof. (1) 仮定から $2q = q+q < q+p$ が成り立つので，補題 2.3 より $q = \frac{2q}{2} < \frac{q+p}{2}$ を得る．また仮定から $q+p < p+p = 2p$ が成り立つから同様にして $\frac{q+p}{2} < \frac{2p}{2} = p$ を得る．よって $r := \frac{q+p}{2}$ とおけば主張が成立する．(2) 背理法で $0 < q$ と仮定すると，(1) から $\exists r \in \mathbb{Q}$ s.t. $0 < r < q$ となる．すると $r \in \mathbb{Q}^+$ となるが，これは前提に矛盾する．(3) まず $q \leq |q|$ と (2) から $q \leq |q| \leq 0$ が成立している．一方で $-q \leq |q|$ と (2) から $-q \leq |q| \leq 0$ であるから，$0 \leq q$ となる．従って $q = 0$ を強いる． □

3 実数 $\mathbb{R}$ の構成

写像 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を**有理数列**という．このとき各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_n := a(n)$ と書き，写像 a を $(a_n)_n$ と表すことにする．また $q \in \mathbb{Q}$ に対して，$(q)_n$ を $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}; n \mapsto q$ という "恒等的に同じ値を取る数列" とする．

定義 3.1. 有理数列 $(a_n)_n$ が **Cauchy** であるとは $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists k \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}\ [m, n > k \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon]$ が成立するときをいう．その全体の集合を $\mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ と書く．

命題 3.2. 任意の $(a_n)_n \in \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ は $\mathbb{Q}$ の中で有界である．つまり $\exists q \in \mathbb{Q}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < q$ が成立する．

Proof. 定義から $\exists k \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}\ [m > k \Rightarrow |a_m - a_{k+1}| < 1]$ が成立しているので, 補題 2.4(2) より $m > k$ に対して，$|a_m| - |a_{k+1}| \leq |a_m - a_{k+1}| < 1$ を得る．そこで主張の q として $\max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_k|, |a_{k+1}|+1\}$ をとればよい．ここで $\mathbb{Q}$ の順序は全順序なので最大値が存在することに注意する． □

さて $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ に対して，二項関係 $(a_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (b_n)_n$ を $\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists k \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}\ [m, n > k \Rightarrow |a_m - b_n| < \epsilon]$ と定義する．

補題 3.3. この $\sim_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ 上の同値関係である．

Proof. [反射律] $\mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ の定義より明らか．[対称律] 絶対値の定義より明らか．[推移律] $(a_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (b_n)_n$ かつ $(b_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (c_n)_n$ とする．$\forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+$ をとり固定する．定義より, $\exists k, k' \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}\ [m, n > k \Rightarrow |a_m - b_n| < \frac{\epsilon}{3}]$ かつ $[m, n > k' \Rightarrow |b_m - c_n| < \frac{\epsilon}{3}]$ であり，$(b_n)_n \in \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ より，$\exists k'' \in \mathbb{N}\ [m, n > k'' \Rightarrow |b_m - b_n| < \frac{\epsilon}{3}]$ である．よって $m, n > \max\{k, k', k''\}$ のとき補題 2.4 より，$|a_m - c_n| = |a_m - b_n + b_m - c_n + b_m - b_n| \leq |a_m - b_n| + |b_m - c_n| + |b_n - b_m| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ と評価できる．従って $(a_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (c_n)_n$ が示された． □

この同値関係による商集合を $\mathbb{R} := \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}} / \sim_{\mathbb{R}}$ と書き，その元を**実数**という．この集合上に，二項演算 $+_{\mathbb{R}}$ 及び $\times_{\mathbb{R}}$，ゼロ元 $0_{\mathbb{R}}$，単位元 $1_{\mathbb{R}}$，順序 $\leq_{\mathbb{R}}$ をそれぞれ次の様に定義する．

$$[(a_n)_n] +_{\mathbb{R}} [(b_n)_n] := [(a_n + b_n)_n], \quad [(a_n)_n] \times_{\mathbb{R}} [(b_n)_n] := [(a_n b_n)_n], \quad 0_{\mathbb{R}} := (0)_n,\ 1_{\mathbb{R}} := (1)_n,$$

$$[(a_n)_n] \leq_{\mathbb{R}} [(b_n)_n] :\Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{Q}^+, \exists k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\ [n > k \Rightarrow a_n - b_n \leq \epsilon].$$

補題 3.4. これらの二項関係 $+_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}}$ は well-defined である．

Proof. 以下で $(a_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (a'_n)_n$ と $(b_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (b'_n)_n$ と仮定し，$\forall\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ をとり固定する．[$+_{\mathbb{R}}$ について] $\mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ の定義より，$\exists k, k' \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}\,[m, n > k \Rightarrow |a_m - a'_n| < \frac{\epsilon}{2}]$ かつ $[m, n > k' \Rightarrow |b_m - b'_n| < \frac{\epsilon}{2}]$ が成立する．$m, n > \max\{k, k'\}$ とすると $|(a_m+b_m)-(a'_n+b'_n)| = |(a_m-a'_n)+(b_m-b'_n)| \leq |a_m-a'_n|+|b_m-b'_n| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$．よって $(a_n+b_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (a'_n+b'_n)_n$．[$\times_{\mathbb{R}}$ について] $(b_n)_n, (a'_n)_n \in \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ であるから，命題 3.2 より，$q, q' \in \mathbb{Q}^+$ が存在し，$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して $|b_n| < q$ と $|a'_n| < q'$ が成立する．また $\mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ の定義より，$\exists k, k' \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}\,[m, n > k \Rightarrow |a_m - a'_n| < \frac{\epsilon}{2q}]$ かつ $[m, n > k' \Rightarrow |b_m - b'_n| < \frac{\epsilon}{2q'}]$ が成立する．よって $m, n > \max\{k, k'\}$ とすると $|a_m b_m - a'_n b'_n| = |(a_m - a'_n)b_m + a'_n(b_m - b'_n)| \leq |a_m - a'_n||b_m| + |a'_n||b_m - b'_n| < \frac{\epsilon}{2q}q + q'\frac{\epsilon}{2q'} = \epsilon$．よって $(a_n b_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (a'_n b'_n)_n$．[$\leq_{\mathbb{R}}$ について] $\mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ の定義より，$\exists k, k' \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N}\,[m, n > k \Rightarrow |a_n - a'_m| < \frac{\epsilon}{3}]$ かつ $[m, n > k' \Rightarrow |b_n - b'_m| < \frac{\epsilon}{3}]$ が成立する．ここで $\exists k'' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\,[n > k'' \Rightarrow a_n - b_n < \frac{\epsilon}{3}]$ と仮定すると，$m, n > \max\{k, k', k''\}$ のとき，$a'_m - b'_m = (a'_m - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - b'_m) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$． □

定理 3.5. 上記演算により $\mathbb{R}$ は体をなす．

Proof. 可換環をなすことは明らか．任意の $0_{\mathbb{R}} \neq [(a_n)_n] \in \mathbb{R}$ が逆元を持つことを示す．$(a_n)_n \in \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ より，(A) $\exists\epsilon \in \mathbb{Q}^+$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ $[n > k$ かつ $|a_n| \geq \epsilon]$ が成り立つ．他方で $(a_n)_n \in \mathbb{Q}_C^{\mathbb{N}}$ より，この ϵ に対して (B) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$ $[m, n > k_0 \Rightarrow a_m - \frac{\epsilon}{2} < a_n < a_m + \frac{\epsilon}{2}]$ が成り立つ．すると (A) で $k = k_0$ のときを考えると，$\exists n_0 > k_0$ [(i) $a_{n_0} \leq -\epsilon$ または (ii) $\epsilon \leq a_{n_0}$] をとることが出来る．いま $n_0 > k_0$ なので (B) より，$\forall n > k_0$，$a_n < a_{n_0} + \frac{\epsilon}{2}$ が成立する．このことから (i) $a_{n_0} \leq -\epsilon$ のとき $a_n < a_{n_0} + \frac{\epsilon}{2} \leq -\epsilon + \frac{\epsilon}{2} = -\frac{\epsilon}{2} < 0$ となり，(ii) $\epsilon \leq a_{n_0}$ のとき $a_n > a_{n_0} - \frac{\epsilon}{2} \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} > 0$ となる．よっていずれの場合も $\forall n > k_0, a_n \neq 0$ とわかる．ここで b_n を $n \leq k_0$ のとき 1 とし，$n > k_0$ のとき $\frac{1}{a_n}$ と定める．すると $n > k_0$ ならば $|a_n b_n - 1| = 0 < \epsilon$ より，$(a_n b_n)_n \sim_{\mathbb{R}} (1)_n$ が成立する． □

定理 3.6. 自然な写像 $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}; q \mapsto [(q)_n]$ は順序を保存する単射な環準同型である．

Proof. まず $[(q)_n] = [(p)_n]$ とすると，$\forall\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ に対して，$|q - p| < \epsilon$ となる．すると補題 2.5(3) より $q - p = 0$ となり単射性が示せた．環準同型であることは定義より明らか．最後に順序を保つことを示す．まず $q \leq p$ と仮定すると，任意の $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ に対して $q - p \leq 0 < \epsilon$ が成り立つので $[(q)_n] \leq_{\mathbb{R}} [(p)_n]$ が成り立つ．逆に $[(q)_n] \leq_{\mathbb{R}} [(p)_n]$ と仮定すると，任意の $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$ に対して $q - p \leq \epsilon$ が成り立つ．よって補題 2.5(2) より，$q - p \leq 0$ が成立し $q \leq p$ を得る． □

実はこの $\mathbb{R}$ の順序 $\leq_{\mathbb{R}}$ は全順序であることがわかるので [1, 命題 3.2.6]，体 $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \times_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}})$ は順序体となる．命題 3.2 から「$\forall\alpha \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, \alpha <_{\mathbb{R}} n$（**アルキメデスの原理**）」が容易に従う．実は「$\mathbb{R}$ の任意の Cauchy 列は "収束列" である（**完備性**）」が成り立つことが知られている [1, 定理 3.2.7] ので，特に「$\mathbb{R}$ の任意の空でない上に有界な集合は "上限" を持つ（**連続性公理**）」も成り立つ [2, 第 1 章 §3 注意 4]．事実として，このような性質を持つような順序体は，体の同型を除いて一意的に存在する [1, 定理 3.1.8] ことから，これまで当たり前のように扱ってきた "実数" を，本稿では集合論の立場から具体的に構成したことになる．

参考文献

[1] 齋藤 正彦（著），『数学の基礎 集合・数・位相』，東京大学出版会，2002 年

[2] 杉浦 光夫（著），『解析入門 I』，東京大学出版会，1980 年

[3] 坪井 明人，塩谷 真弘，佐垣 大輔（共著），『集合入門』，牧野書店，2019 年