QR コードの数学

S16M006 伊藤 佑馬

近年では日常的に QR コードが見られ便利なものである．QR コードの白黒のパターンは情報そのものだけではなく，汚れても正確な情報が読み取れる様にエラー訂正機能も含まれている．本稿ではこれを実現するための “符号化” を [2] に従い説明し，さらに [1] を参考にして QR コードを描く手順を説明する．

1 符号化

エラー訂正機能とは，情報を送信する際に追加情報を一緒に送ることで，受信者が間違った情報を受信した場合でも，正しく元の情報を得られることが可能となる仕組みのことである．具体例として $0, 1$ からなる二つの情報 $(a, b) \in \mathbb{F}_2^2 = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ を送信する場合を考え，追加の情報として和を付け加えた $(a, b, a+b) \in \mathbb{F}_2^3$ という情報を送ったとする．例えば最初の情報が欠損して $(*, 0, 1)$ というデータを受信した場合，$* + 0 = 1$ つまり $* = 1$ と逆算（復元）が可能である．以下で QR コードで使用されるエラー訂正の仕組みを説明する．

1.1 RS（Reed Solomon）符号

以下で素数 p と 自然数 m をとり固定し，簡単のため $q := p^m, n := q-1$ とおく．位数 p の体 $\mathbb{F}_p$ の拡大体として q 元体 $\mathbb{F}_q$ をとる [3]．$\mathbb{F}_q$-係数の多項式環 $\mathbb{F}_q[X]$ の剰余環 $\mathbb{F}_q[X]_n := \mathbb{F}_q[X]/(X^n - 1)$ はもちろん $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間であり $\gamma : \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{F}_q[X]_n;\ (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \mapsto a_0 + a_1\overline{X} + \cdots + a_{n-1}\overline{X}^{n-1}$ は $\mathbb{F}_q$-線型同型となる．ここで自然な射影 $\mathbb{F}_q[X] \to \mathbb{F}_q[X]_n$ による $f(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ の像を $f(\overline{X})$ と書いた．

以下で $X^n - 1$ を割る $g(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ を取り固定し $k := n - \deg(g)$ とおく．すると $g(\overline{X})$ の生成する $\mathbb{F}_q[X]_n$ のイデアル $g(\overline{X})\mathbb{F}[X]_n$ は，$\{\overline{X}, \overline{X}g(\overline{X}), \overline{X}^2 g(\overline{X}), \cdots, \overline{X}^{k-1} g(\overline{X})\}$ を基底とする $\mathbb{F}_q$ 上の k 次元ベクトル空間となるので「$g(X)$ を掛ける」という写像で $\mathbb{F}_q[X]_k \to g(\overline{X})\mathbb{F}_q[X]_n$ なる $\mathbb{F}_q$-線型同型を得る．

そこで $n \times k$ 行列 $G := \left(\gamma^{-1}(g(\overline{X})), \gamma^{-1}(\overline{X}g(\overline{X})), \ldots, \gamma^{-1}(\overline{X}^{k-1} g(\overline{X}))\right)$ を考えると，$\mathrm{rank}(G) = k$ となる（フルランク）．よってベクトル表示 $G : \mathbb{F}_q^k \to \mathbb{F}_q^n;\ \boldsymbol{D} \mapsto \boldsymbol{D}G$ の像はいわゆる “(n, k)-巡回符号” であり，特に **RS 符号**とよばれる．多項式では $\mathbb{F}_q[X] \to \mathbb{F}_q[X]; d(X) \mapsto d_{送信}(X) := d(X)\, g(X)$ で与えられる．

1.2 PGZ（Peterson-Gorenstein-Zierler）復号・エラー訂正

エラー訂正を実現する為には §1.1 の $g(X)$ に条件を付けなければならない（**生成多項式**という）．$\mathbb{F}_q$ の原始元 α をとり固定する [3]．つまり $\mathbb{F}_q = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$．以降，次を仮定する．

条件 1.1. 奇数 $2 \leqq d \leqq n$ をとり固定する（**設計距離**）．$0 \leqq \forall i \leqq d-2$ に対して，$g(\alpha^i) = 0$ を満たす．

受信データが $d_{受信}(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ のとき $e(X) := d_{受信}(X) - d_{送信}(X)$ をその**エラー多項式**という．条件 1.1 より，各 $0 \leqq i \leqq d-2$ に対して $d_{受信}(\alpha^i) = e(\alpha^i)$ が成立する．以下で $t = (d-1)/2$ とおく．

目標 1.2. $1 \leqq \ell \leqq t$ を用いて，$e(X) = e_{k_1}X^{k_1} + e_{k_2}X^{k_2} + \cdots + e_{k_\ell}X^{k_\ell} \in \mathbb{F}_q[X]$ と非ゼロ係数で書けたとする．次を決定する事を目標とする：(A) エラー数 ℓ; (B) エラー位置 $k_1, \ldots, k_\ell$; (C) エラー量 $e_{k_1}, \ldots, e_{k_\ell}$.

各 $0 \leqq i \leqq d-2\ (= 2t-1)$ に対して $S_i := d_{受信}(\alpha^i)$ とおく．これは**シンドローム**とよばれている．各 $1 \leqq x \leqq t$ に対し $M_x := (S_{i+j-2})_{1 \leqq i, j \leqq x}$ とおく．これは**シンドローム行列**とよばれている．

定理 1.3. $\ell = \max\{x \in \mathbb{N} \mid x \leqq t, \det(M_x) \neq 0\}$. 特に M_ℓ は正則.

Proof. 簡単のため，$\ell+1 \leqq x \leqq t$ に対して $k_x := 0, e_{k_x} := 0$ とする．いま $\ell \leqq x$ に対して，$A_x := ((\alpha^{i-1})^{k_j})_{1 \leqq i,j \leqq x}$ かつ $B_x := (\delta_{ij} e_{k_i} \alpha^{k_j})_{1 \leqq i,j \leqq x}$ とおくと，積 $A_x \cdot B_x \cdot {}^t A_x$ の (i,j)-成分は計算により $e_{k_1}(\alpha^{i+j-1})^{k_1} + \cdots + e_{k_\ell}(\alpha^{i+j-1})^{k_\ell} = e(\alpha^{i+j-1})$ となる．さらにこれは，条件 1.1 より $d_{受信}(\alpha^{i+j-1})$ と一致する．従って $A_x \cdot B_x \cdot {}^t A_x = M_x$ が成り立ち，$\det(A_x)^2 \det(B_x) = \det(M_x)$ が成立する．ここで A_x はファンデルモンド型なので $\det(A_x) = \prod_{1 \leqq i < j \leqq x} (\alpha^{k_j} - \alpha^{k_i})$ となり，B_x は対角行列なので $\det(B_x) = e_{k_1}\alpha^{k_1} \cdots e_{k_x}\alpha^{k_x}$ である．いま α は原始元であるので $\det(M_x) \neq 0 \Leftrightarrow x \leqq \ell$ を得る． □

さて $\sigma(X) := (1-\alpha^{k_1}X)(1-\alpha^{k_2}X)\cdots(1-\alpha^{k_\ell}X) \in \mathbb{F}_q[X]$ とおくと，α は原始元なので $1 \leqq i \leqq n-1$ に対し $\sigma(\alpha^{-i}) = 0 \Longleftrightarrow i \in \{k_1, k_2, \ldots, k_\ell\}$ となる．よってこれでエラー位置がわかる．

定理 1.4. 係数を具体的に $\sigma(X) = 1 + \sigma_1 X + \sigma_2 X^2 + \cdots + \sigma_\ell X^\ell \in \mathbb{F}_q[X]$ と書くとき，${}^t(\sigma_\ell, \sigma_{\ell-1}, \ldots, \sigma_1) = -M_\ell^{-1} \cdot {}^t(S_\ell, S_{\ell+1}, \ldots, S_{2\ell-1})$.

Proof. 各 i に対して $0 = \sigma(\alpha^{-k_i}) = 1 + \sum_{r=1}^{\ell} \sigma_r \alpha^{-rk_i}$ であるが，両辺に $e_{k_i}\alpha^{k_i(\ell-1+j)}$ 掛けて $i=1$ から ℓ まで足すと $0 = \sum_{i=1}^{\ell} e_{k_i}\alpha^{k_i(\ell-1+j)} + \sum_{i=1}^{\ell}\sum_{r=1}^{\ell} \sigma_r e_{k_i} \alpha^{k_i(\ell-1+j-r)}$ となる．これをシンドロームで書き直すと，$0 = S_{\ell-1+i} + \sum_{r=1}^{\ell} \sigma_r S_{\ell-1+j-r}$ となる．これを σ_r の添え字に注意して，行列で書き換えると，$-{}^t(S_\ell, \ldots, S_{2\ell-1}) = M_\ell \cdot {}^t(\sigma_\ell, \ldots, r_1)$ となる．従って両辺左から M_ℓ^{-1} を掛ければよい． □

定理 1.5. ${}^t(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_\ell}) = A_\ell^{-1} \cdot {}^t(S_0, S_1, \ldots, S_{\ell-1})$. ここで A_ℓ は定理 1.3 の証明中の記号を用いた.

Proof. 各 $0 \leqq i \leqq \ell-1$ に対し, 条件 1.1 より $S_i = d_{受信}(\alpha^i) = e(\alpha^i) = e_{k_1}(\alpha^i)^{k_1} + e_{k_2}(\alpha^i)^{k_2} + \cdots + e_{k_\ell}(\alpha^i)^{k_\ell}$ と書ける．これを並べると，${}^t(S_0, S_1, \ldots, S_{\ell-1}) = A_\ell \cdot {}^t(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_\ell})$ となる． □

1.3 エラー訂正の例

例として $p=2, m=3$ のときを考える $(q=8, n=7)$．このとき $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2(\alpha)$ の関係式は $\alpha^3+\alpha+1=0$ で与えられる．条件 1.1 を満たす生成多項式として $d=5$ として $g(X) = (X-1)(X-\alpha)(X-\alpha^2)(X-\alpha^3)$ $= \alpha^6 + \alpha^5 X + \alpha^5 X^2 + \alpha^2 X^3 + X^4$ をとると，$k = 7-4 = 3$ となる．このときベクトル表示では $G: \mathbb{F}_8^3 \to \mathbb{F}_8^7$ となっている．例えば 0,1 からなるデータとして，$\boldsymbol{D} = [110101011]$ が与えられたとする．この $\boldsymbol{D}$ を 3 ビットずつに分けて，$\boldsymbol{D} = ([110],[101],[011])$ と考え，$[110] = 1\alpha^2 + 1\alpha + 0\alpha^0 = \alpha^4$ などと同一視 [3] すれば，$\boldsymbol{D} = (\alpha^4, \alpha^6, \alpha^3)$ という $\mathbb{F}_8^3$ の元を得る．これを多項式で表示すると，$d(X) = \alpha^4 + \alpha^6 X + \alpha^3 X^2$ となる．従って送信データは $d_{送信}(X) = d(X)g(X) = \alpha^3 + \alpha^3 X + \alpha^4 X^2 + X^3 + \alpha^4 X^4 + \alpha X^5 + \alpha^3 X^6$ となる．

さて，受信者が下記の様な2 箇所誤ったデータを受信したとする．

$$d_{受信}(X) = \alpha^3 + \underset{\sim}{\alpha X} + \alpha^4 X^2 + \underset{\sim}{\alpha^3 X^3} + \alpha^4 X^4 + \alpha X^5 + \alpha^3 X^6.$$

このときシンドロームは $(S_0, S_1, S_2, S_3) = (\alpha^3, \alpha^2, \alpha^6, 0)$ と計算できる．(A) 計算により $\det(M_1) = \alpha^3 \neq 0$ かつ $\det(M_2) = \alpha \neq 0$ となるので，定理 1.3 よりエラー数 $\ell = 2$ とわかった．(B) 計算により $M_2^{-1}\binom{S_2}{S_3} = \binom{\alpha^4}{1}$ であるから，定理 1.4 からエラー位置多項式は $\sigma(X) = 1 + X + \alpha^4 X^2$ となる．すると，$0 \leqq i \leqq 6$ で $\sigma(\alpha^{-i}) = 0$ が成り立つ i は計算により $1, 3$ とわかるので，$d_{受信}(X)$ の X, X^3 の係数にエラーがある．(C) 計算により $A_2^{-1}\binom{S_0}{S_1} = \binom{1}{\alpha}$ となるので, 定理 1.5 よりエラーの量がわかった．以上のことより $e(X) = X + \alpha X^3$ と求まり，$d_{受信}(X) + e(X)$ は確かに $d_{送信}(X)$ と一致する．この様にエラー訂正をすることができる．

2　QR を作ってみる

以下では 4 文字の「感謝感激」という QR コードを作る流れを説明する．用いる符号化は $p=2, m=8, d=13$ の場合の RS 符号である $(q=256, n=255, t=6)$．生成多項式は，$g(X)=\prod_{i=0}^{d-1}(X-\alpha^i)$ と定まっている．このとき $k=255-13=242$ であるから，ベクトル表示では $G:\mathbb{F}_q^{242}\to\mathbb{F}_q^{255}$ である．しかし生成多項式の次数は 13 なので明らかにこれは無駄である．そこでこの (n,k)-巡回符号から “余分な 229 個分を短縮” し，$(n-229, k-229)=(26,13)$-巡回符号 $\tilde{G}:\mathbb{F}_q^{13}\to\mathbb{F}_q^{26}$ を以下で考える（実際には行列 G の行と列を 1 から 229 まで削除したものを考える）．従って，インプットされるデータは 8 ビット 13 バイトの必要がある．

2.1　漢字をコード化する

始めに，「感謝感激」をコード化し，8 ビット 13 バイトにした $\boldsymbol{D}=(D_1,D_2,\ldots,D_{13})\in\mathbb{F}_q^{13}$ を求める．コード化の手順は以下の様になる：(I) 漢字のシフト JIS コードを調べ 16 進数で表示する．(II) それが $[8140]_{16}\sim[9\mathrm{FFC}]_{16}$ にある場合 $[8140]_{16}$ を引き，$[\mathrm{E040}]_{16}\sim[\mathrm{EBBF}]_{16}$ にある場合 $[\mathrm{C140}]_{16}$ を引く．この計算結果を $[\mathrm{xyzw}]_{16}$ と表示する．(III) 次に $([\mathrm{C0}]_{16}\times[\mathrm{xy}]_{16})+[\mathrm{zw}]_{16}$ を計算する．(IV) この結果を 13 ビット 2 進数文字列に変換する．(V) これらをつなげた列の最初に，漢字モード [1000] と 4 文字の文字数指示子 [00000100] を付ける．また，列の最終端には終端パターン [0000] と埋め草ビット [0000] を付け，さらに埋め草コード [11101100] と [00010001] を交互に最後に付けて，全体の列が 8 ビット 13 バイトになる様にする．

実際に「感」の場合 (I) のシフト JIS コードは 16 進数で $[8\mathrm{AB4}]_{16}$ で与えられる．(II) と (III) を計算すると，$[0734]_{16}$ となり，(IV) は [0011100110100] となる．そして「謝」「激」も同様に 2 進数に直すと，それぞれ (IV) は [0101001010011],[0100010000011] となる．よって，(V) を行うと以下の様なデータを得る．

$$\underbrace{[1000][0000}_{=D_1}\underbrace{0100][0011}_{=D_2}\underbrace{10011010}_{=D_3}\underbrace{0][0101001}_{=D_4}\underbrace{010011][00}_{=D_5}\underbrace{11100110}_{=D_6}\underbrace{100][01000}_{=D_7}$$

$$\underbrace{10000011]}_{=D_8}\underbrace{[0000][0000]}_{=D_9}\underbrace{[11101100}_{=D_{10}}\underbrace{00010][001}_{=D_{11}}\underbrace{11101100}_{=D_{12}}\underbrace{00][010001]}_{=D_{13}}$$

これを $\mathbb{F}_q^{13}$ の元で表せば $\boldsymbol{D}=(D_1,\ldots,D_{13})=(\alpha^7,\alpha^{98},\alpha^{146},\alpha^{147},\alpha^{16},\alpha^{160},\alpha^{103},\alpha^{247},0,\alpha^{122},\alpha^{100},\alpha^{122},\alpha^{100})$ となる．

2.2　RS 符号化する

符号化するためには積 $\boldsymbol{D}\tilde{G}$ を計算すればよいが，複雑なため $\tilde{G}$ を行基本変形（情報は損失されない）し，$\hat{G}=(I_{13}\mid P)$ の形にする（ここで I_{13} は 13 次の単位行列）．ここで P は次の様になった．

$$P=\begin{pmatrix}
\alpha^{243} & \alpha^{221} & \alpha^{99} & \alpha^{43} & \alpha^{144} & \alpha^{39} & \alpha^{114} & \alpha^{250} & \alpha^{228} & \alpha^{247} & \alpha^{243} & \alpha & \alpha^{164} \\
\alpha^{86} & \alpha^{217} & \alpha^{34} & \alpha^{26} & \alpha^{193} & \alpha^{82} & \alpha^{92} & \alpha^{71} & \alpha^{67} & \alpha^{88} & \alpha^{75} & \alpha^{185} & \alpha^{37} \\
\alpha^{214} & \alpha^{180} & \alpha^{150} & \alpha^{81} & \alpha^{41} & \alpha^{251} & 1 & \alpha^{169} & \alpha^{8} & \alpha^{47} & \alpha^{36} & \alpha^{137} & \alpha^{86} \\
\alpha^{8} & \alpha^{142} & \alpha^{202} & \alpha^{31} & \alpha^{158} & \alpha^{188} & \alpha^{3} & \alpha^{166} & \alpha^{195} & \alpha^{77} & \alpha^{84} & \alpha^{187} & \alpha^{127} \\
\alpha^{49} & \alpha^{251} & \alpha^{224} & \alpha^{143} & \alpha^{195} & \alpha^{137} & 1 & \alpha^{229} & \alpha^{252} & \alpha^{69} & \alpha^{174} & \alpha^{40} & \alpha^{237} \\
\alpha^{159} & \alpha^{87} & \alpha^{128} & \alpha^{215} & \alpha^{102} & \alpha^{197} & \alpha^{254} & \alpha^{21} & \alpha^{110} & \alpha^{176} & \alpha^{216} & \alpha^{180} & \alpha^{140} \\
\alpha^{62} & \alpha^{77} & \alpha^{99} & \alpha^{254} & \alpha^{54} & \alpha^{239} & \alpha^{194} & \alpha^{155} & \alpha^{37} & \alpha^{169} & \alpha^{203} & \alpha^{102} & \alpha^{160} \\
\alpha^{82} & \alpha^{9} & \alpha^{118} & \alpha^{254} & \alpha^{122} & \alpha^{220} & \alpha^{10} & \alpha^{124} & \alpha^{200} & \alpha^{125} & \alpha^{225} & \alpha^{118} & \alpha^{111} \\
\alpha^{33} & \alpha^{83} & \alpha^{104} & \alpha^{72} & \alpha^{176} & \alpha^{87} & \alpha^{45} & \alpha^{249} & \alpha^{223} & \alpha^{87} & \alpha^{235} & \alpha^{194} & \alpha^{181} \\
\alpha^{103} & \alpha^{168} & \alpha^{57} & \alpha^{192} & \alpha^{128} & \alpha^{20} & \alpha^{46} & \alpha^{163} & \alpha^{227} & \alpha^{244} & \alpha^{76} & \alpha^{83} & \alpha^{136} \\
\alpha^{58} & \alpha^{29} & \alpha^{188} & \alpha^{191} & \alpha^{39} & \alpha^{18} & \alpha^{25} & \alpha^{210} & \alpha^{187} & \alpha^{39} & \alpha^{24} & \alpha^{225} & \alpha^{71} \\
\alpha^{248} & \alpha^{178} & \alpha^{243} & \alpha^{6} & \alpha^{232} & \alpha^{123} & \alpha^{217} & \alpha^{128} & \alpha^{173} & \alpha^{193} & \alpha^{13} & \alpha^{112} & \alpha^{152} \\
\alpha^{74} & \alpha^{152} & \alpha^{176} & \alpha^{100} & \alpha^{86} & \alpha^{100} & \alpha^{106} & \alpha^{104} & \alpha^{130} & \alpha^{218} & \alpha^{206} & \alpha^{140} & \alpha^{78}
\end{pmatrix}.$$

この $\hat{G}$ を用いて $\boldsymbol{D}$ を符号化すると，$\boldsymbol{D}\hat{G}=(\boldsymbol{D}\mid\boldsymbol{D}P)=:(\boldsymbol{D}\mid E_1,E_2,\cdots,E_{13})$ となる．計算により $(E_1,\ldots,E_{13})=(\alpha^{121},\alpha^{179},\alpha^{179},\alpha^{192},\alpha^{202},\alpha^{239},\alpha^{186},\alpha^{107},\alpha^{245},\alpha^{120},\alpha^{43},\alpha^{103},\alpha^{44})$ となった．これで 8 ビット 26 バイトのデータ $(D_1,\ldots,D_{13},E_1,\ldots,E_{13})\in\mathbb{F}_q^{26}$ を得た．

仕上げとして，QR コードにするときに白・黒が固まらない様に “マスク処理” を施すことが決っている．今回はマスクパターン参照子 011 である次の $\mathbb{F}_q^{26}$ の元を用いる．

$$(\alpha^{66},\alpha^{99},\alpha^{28},\alpha^{153},\alpha^{152},\alpha^{225},\alpha^{99},\alpha^{28},\alpha^{66},\alpha^{225},\alpha^{153},\alpha^{152},\alpha^{28},\alpha^{66},\alpha^{99},\alpha^{100},\alpha^{99},\alpha^{152},\alpha^{101},\alpha^{152},\alpha^{225},\alpha^{153},\alpha^{28},\alpha^{225},\alpha^{153},\alpha^{152}).$$

これと $\boldsymbol{D}\hat{G} = (D_1,\ldots,D_{13},E_1,\ldots,E_{13})$ の和を計算した $(\bar{D}_1,\ldots,\bar{D}_{13},\bar{E}_1,\ldots,\bar{E}_{13})$ が QR コードに描くデータになる．具体的に書き下すと次の様な 8 ビット 26 バイトのデータになる．

$$\bar{D}_1{=}11100001,\bar{D}_2{=}11000101,\bar{D}_3{=}10000010,\bar{D}_4{=}10111011,\bar{D}_5{=}00000101,\bar{D}_6{=}11000010,\bar{D}_7{=}00001110,\bar{D}_8{=}10011011,\bar{D}_9{=}01100001,$$

$$\bar{D}_{10}{=}11001000,\bar{D}_{11}{=}100000011,\bar{D}_{12}{=}10100101,\bar{D}_{13}{=}00001001,\bar{E}_1{=}00010111,\bar{E}_2{=}11001101,\bar{E}_3{=}01011010,\bar{E}_4{=}10000010,$$

$$\bar{E}_5{=}00111001,\bar{E}_6{=}00110100,\bar{E}_7{=}00100111,\bar{E}_8{=}01001100,\bar{E}_9{=}01111010,\bar{E}_{10}{=}00100011,\bar{E}_{11}{=}01010011,\bar{E}_{12}{=}00011010,\bar{E}_{13}{=}10100111$$

2.3 QR **コードを描く**

情報の大きさによって QR コードには様々な種類がある．今回の「感謝感激」では 21×21 マスを使用する．まず，図 1 の様に右上・左上・左下に四角形を描く．これは上下左右の向きがわかるための “位置情報” である．また，それ以外にもマスクパターン参照の情報を描くことが決まっている．今回はマスクパターン参照 011 を使用しているため，位置情報の四角形と合わせて図 1 の様になる．

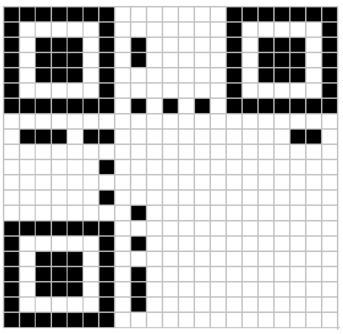


図 1

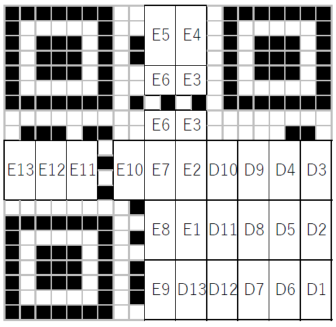
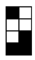


図 2

いまから塗り方を説明していく．例えば §2.2 で求めた $\bar{D}_1$ は図 2 の右下の D1 の箇所に対応しており，その塗り方は $\bar{D}_1 = 11100001$ の各桁を右から順に下図 (U) のひらがな順に対応させる．そして，桁の数字が 1 の場合のみ黒として塗る．これを実行すれば，D1 の箇所は  となる．同様に $\bar{D}_1,\bar{D}_2,\bar{D}_3,\bar{D}_7,\bar{D}_8,\bar{D}_9,\bar{D}_{13},\bar{E}_1,\bar{E}_2,\bar{E}_3,\bar{E}_4,\bar{E}_{10},\bar{E}_{12}$ も図 2 の対応する箇所に (U) の順で塗っていく．それ以外の箇所は (L) のひらがなの順番で塗っていく．

(U)

あ	い
う	え
お	か
き	く

(L)

き	く
お	か
う	え
あ	い

(ただし E_3, E_6 は中央が飛んでいることに注意．)

これらを実行すれば，右図の様になり「感謝感激」の QR コードが完成した．

参考文献

[1] 池田 和興 (著),『例題が語る符号理論』，共立出版，2007 年
[2] 坂庭 好一，渋谷 智治 (共著),『代数系と符号理論入門』，コロナ社，2010 年
[3] 前原 愛 (著),『有限体の存在と性質』，岡山理科大学理学部応用数学科 2020 年度卒業研究要旨集