対称群の既約表現と表現環について

S19M075 中村 大祐

1 対称群の既約表現の構成

任意の集合 X, Y について，X から Y への全単射全体の集合を $\mathsf{Bij}(X, Y)$ とかくこととする．さらに任意の自然数 n について，$[n] := \{1, \ldots, n\}$ とおき，対称群 $\mathfrak{S}_n$ は $\mathsf{Bij}([n], [n])$ として実現する．cycle などの性質は既知のものとして扱い $\mathfrak{S}_n$ の演算は適宜省略することとする．ただし cycle を表記するときは ( ) のかわりに $[\![\ ]\!]$ を使うこととする．例えば 1 と 2 を入れ替える cycle は $[\![1\ \ 2]\!]$ とかく．以降，2 以上の自然数 n をひとつとり固定して議論する．

1.1 $\mathfrak{S}_n$ の共役類と partition との間の一対一対応

基礎体が代数的閉体であるとき，既約表現の種類の数と共役類たちの個数は等しいのであった ([1, §5.4])．実は対称群の共役類は，数の分割のような簡単なものと一対一に対応する．このことを述べるために次のような言葉づかいを用意する．

定義 1.1

$\ell \in \mathbb{N}, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ に対して，

$$\lambda が\ n\ の\ \textbf{partition}\ である :\Leftrightarrow (\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_\ell\ \ \&\ \ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n).$$

また n の *partition* 全体の集合を $\mathscr{P}_n$ と書くことにする．

定義 1.2

$r \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathfrak{S}_n, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathscr{P}_n$ に対して，
λがσの *cycle type* である
$:\Leftrightarrow \quad \exists \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\ell$: *disjoint cycles*$(\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_\ell\ \ \&\ \ (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) = (|\sigma_1|, |\sigma_2|, \ldots, |\sigma_\ell|))$.

ここで $|\sigma|$ という記号は $\mathfrak{S}_n$ の演算についての σ の order を表している． σ が cycle のときのその order は σ を cycle で表示したときに現れる自然数の個数と一致にすることにも注意すべし．

命題 1.3

$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \exists! \lambda \in \mathscr{P}_n(\lambda$ は σ の *cycle type*$)$.

Proof: 任意の置換が disjoint cycles の合成で書けることは線形代数で既にやっている．この disjoint cycles の長さを降順に並べれればそれは partition になるので存在性はよい．次に $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ と $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ が σ の cycle type であったとすると σ は長さが $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ であるような disjoint cycles と，長さが $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ であるような disjoint cycles でかけていることになる．置換が 2 通りの disjoint cycles でかけているときそれらは単なる写像の合成の並び変えとなっていることも線形代数で既にやっているので，それらの長さである $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ と $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ も単なる並び変えとなっていることがわかる．ここで $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ と $(\mu_1, \ldots, \mu_k)$ は partition であり降順という条件が課されているのでこれらは一致する． ∎

命題 1.3 により $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して一意的に定まる cycle type を $\mathrm{cyc}(\sigma)$ と表すことにする．

補題 1.4

$g \in \mathfrak{S}_n$ と cycle $[\![s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_\ell]\!] \in \mathfrak{S}_n$ について，$g[\![s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_\ell]\!]g^{-1} = [\![g(s_1) \ g(s_2) \ \cdots \ g(s_\ell)]\!]$.

Proof: $g[\![s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_\ell]\!] = [\![g(s_1) \ g(s_2) \ \cdots \ g(s_\ell)]\!]g$ を示せばよい．

任意に $x \in [n]$ をとる．$x \notin \{s_1 \ \cdots \ s_\ell\}$ のときは，$g \in \mathfrak{S}_n$ より，$g(x) \notin \{g(s_1) \ \cdots \ g(s_\ell)\}$ であるので

$$[\![g(s_1) \ \ldots \ g(s_\ell)]\!]g(x) = g(x) = g[\![s_1 \ \ldots \ s_\ell]\!](x).$$

$x \in \{s_1 \ \cdots \ s_{\ell-1}\}$ のときは，ある $i \in [\ell-1]$ により $x = s_i$ とかけ，

$$g[\![s_1 \ \cdots \ s_\ell]\!](x) = g(s_{i+1}) = [\![g(s_1) \ \cdots \ g(s_\ell)]\!]g(x).$$

$x = s_\ell$ のときは，

$$g[\![s_1 \ \cdots \ s_\ell]\!](x) = g(s_1) = [\![g(s_1) \ \cdots \ g(s_\ell)]\!]g(x).$$

■

定理 1.5

$\mathfrak{S}_n/\underset{conj}{\sim} \to \mathscr{P}_n; \overline{\sigma} \mapsto \mathrm{cyc}(\sigma)$ は全単射．特に単射性より $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n(\sigma \underset{conj}{\sim} \sigma^{-1})$.

Proof: well-defined と単射は $\forall \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n(\sigma \underset{\mathrm{conj}}{\sim} \tau \Leftrightarrow \mathrm{cyc}(\sigma) = \mathrm{cyc}(\tau))$ を示せばよい．

任意に $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ をとる．すると，ある disjoint cycles $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\ell$ が存在して，$\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_\ell \,\&\, \mathrm{cyc}(\sigma) = (|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_\ell|) \overset{(\text{補題 } 1.4)}{=} (|g\sigma_1 g^{-1}|, \ldots, |g\sigma_\ell g^{-1}|)$ を満たす．

($\Rightarrow$) $\sigma \underset{\mathrm{conj}}{\sim} \tau$ と仮定すると，ある $g \in \mathfrak{S}_n$ が存在して，$\tau = g\sigma g^{-1} = (g\sigma_1 g^{-1}) \cdots (g\sigma_\ell g^{-1})$．よって先のことより $\mathrm{cyc}(\sigma)$ は τ の cycle type でもあるので cycle type の一意性より $\mathrm{cyc}(\sigma) = \mathrm{cyc}(\tau)$.

($\Leftarrow$) $\mathrm{cyc}(\sigma) = \mathrm{cyc}(\tau)$ と仮定すると，ある disjoint cycles $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\ell$ が存在して，$\tau = \tau_1 \cdots \tau_\ell \,\&\, (|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_\ell|) = (|\tau_1|, \ldots, |\tau_\ell|)$ を満たす．disjoyint cycles を各 $i \in [\ell]$ について，$\sigma_i = [\![{}^i s_1 \ {}^i s_2 \ \cdots \ {}^i s_{|\sigma_i|}]\!], \tau_i = [\![{}^i t_1 \ {}^i t_2 \ \cdots \ {}^i t_{|\sigma_i|}]\!]$ と表示することとする．ここで

$$g := \begin{pmatrix} {}^1 s_1 & {}^1 s_2 & \cdots & {}^1 s_{|\sigma_1|} & {}^2 s_1 & {}^2 s_2 & \cdots & {}^2 s_{|\sigma_2|} & \ldots & {}^\ell s_1 & {}^\ell s_2 & \cdots & {}^\ell s_{|\sigma_\ell|} \\ {}^1 t_1 & {}^1 t_2 & \cdots & {}^1 t_{|\sigma_1|} & {}^2 t_1 & {}^2 t_2 & \cdots & {}^2 t_{|\sigma_2|} & \ldots & {}^\ell t_1 & {}^\ell t_2 & \cdots & {}^\ell t_{|\sigma_\ell|} \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} g\sigma g^{-1} &= (g\sigma_1 g^{-1}) \cdots (g\sigma_\ell g^{-1}) \\ &= g[\![{}^1 s_1 \ {}^1 s_2 \ \cdots \ {}^1 s_{|\sigma_1|}]\!]g^{-1} \cdots g[\![{}^\ell s_1 \ {}^\ell s_2 \ \cdots \ {}^\ell s_{|\sigma_\ell|}]\!]g^{-1} \\ &= [\![g({}^1 s_1) \ g({}^1 s_2) \ \cdots \ g({}^1 s_{|\sigma_1|})]\!] \cdots [\![g({}^\ell s_1) \ g({}^\ell s_2) \ \cdots \ g({}^\ell s_{|\sigma_\ell|})]\!] \qquad (\because \text{補題 } 1.4) \\ &= [\![{}^1 t_1 \ {}^1 t_2 \ \cdots \ {}^1 t_{|\sigma_1|}]\!] \cdots [\![{}^\ell t_1 \ {}^\ell t_2 \ \cdots \ {}^\ell t_{|\sigma_\ell|}]\!] \\ &= \tau_1 \cdots \tau_\ell = \tau. \end{aligned}$$

従って $\sigma \underset{\mathrm{conj}}{\sim} \tau$.

次に全射を示す．任意に $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathscr{P}_n$ をとる．各 $i \in [\ell]$ について，

$$\sigma_i := [\![(1 + (\sum_{k=1}^{i-1})\lambda_k) \ (2 + (\sum_{k=1}^{i-1})\lambda_k) \ \cdots \ (\lambda_i + (\sum_{k=1}^{i-1})\lambda_k)]\!]$$

とおくとこれらは disjoint cycles になる．さらに $(|\sigma_1|, \ldots, |\sigma_\ell|) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ でもあるので，$(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$ は $\sigma_1 \cdots \sigma_\ell$ の cycle type であるから，$\mathrm{cyc}(\sigma_1 \cdots \sigma_\ell) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell)$. ■

1.2 tableaux の定義とその性質

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathscr{P}_n$ について，

$$\mathrm{Pos}_\lambda := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in [\ell] \,\&\, j \in [\lambda_i]\}, \quad \mathrm{Tab}_\lambda := \mathsf{Bij}(\mathrm{Pos}_\lambda, [n])$$

とおく．$\mathcal{T}_n := \bigcup_{\mu \in \mathscr{P}_n} \mathrm{Tab}_\mu$ の元のことを **tableaux** と呼ぶ．実はこの tableaux から $\mathfrak{S}_n$ の既約表現がつくれる．以下ではそれを示すために必要な定義や性質を述べる．$\mathbb{N}^2$ から第一成分を取り出す射影を π_1，第二成分を取り出す射影を π_2 と表すこととする．$\mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda$ について，

$$\mathsf{hor}_\mathtt{T} := \pi_1 \circ \mathtt{T}^{-1}, \quad \mathsf{ver}_\mathtt{T} := \pi_2 \circ \mathtt{T}^{-1}$$
$$\mathscr{H}_\mathtt{T} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathsf{hor}_\mathtt{T} \circ \sigma = \mathsf{hor}_\mathtt{T}\}, \quad \mathscr{V}_\mathtt{T} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \mathsf{ver}_\mathtt{T} \circ \sigma = \mathsf{ver}_\mathtt{T}\}$$

とおく．これら $\mathscr{H}_\mathtt{T}, \mathscr{V}_\mathtt{T}$ は $\mathfrak{S}_n$ の部分群となることがすぐに確かめられる．$\sigma \in \mathfrak{S}$ について，$\sigma\mathtt{T} := \sigma \circ \mathtt{T}$ とおく．すると全単射の合成が全単射であることより $\sigma\mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda$ となる．

命題 1.6

$\mathtt{T} \in \mathcal{T}_n$ について，以下の 3 つが成立する．

(i) $\mathscr{H}_\mathtt{T} \cap \mathscr{V}_\mathtt{T} = \{\mathrm{id}\}$.

(ii) $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ について，$\mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}} = \sigma\mathscr{V}_\mathtt{T}\sigma^{-1}$．特に，$\sigma \in \mathscr{V}_\mathtt{T}$ のときは，$\mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}} = \mathscr{V}_\mathtt{T}$.

(iii) $\mathscr{H}_\mathtt{T} \times \mathscr{V}_\mathtt{T} \to \mathscr{H}_\mathtt{T}\mathscr{V}_\mathtt{T}\,;\,(h,v) \mapsto hv$ は全単射．特に $\forall (h,v) \in \mathscr{H}_\mathtt{T} \times \mathscr{V}_\mathtt{T}(hv = \mathrm{id} \Leftrightarrow (h = \mathrm{id} \,\&\, v = \mathrm{id}))$.

Proof: (i) 任意に $\sigma \in \mathscr{H}_\mathtt{T} \cap \mathscr{V}_\mathtt{T}$ をとる．任意の $x \in [n]$ について，

$$\mathtt{T}^{-1} \circ \sigma(x) = (\mathsf{hor}_\mathtt{T} \circ \sigma(x), \mathsf{ver}_\mathtt{T} \circ \sigma(y)) = (\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x)) = \mathtt{T}^{-1}(x).$$

よって，$\mathtt{T}^{-1} \circ \sigma = \mathtt{T}^{-1}$ なので $\sigma = \mathrm{id}$.

(ii) ($\supset$) 任意に $\sigma v \sigma^{-1} \in \sigma\mathscr{V}_\mathtt{T}\sigma^{-1}$ をとる．

$$\mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}} \circ (\sigma v \sigma^{-1}) = \pi_2 \circ (\sigma\mathtt{T})^{-1} \circ (\sigma v \sigma^{-1}) = \pi_2 \circ \mathtt{T}^{-1} \circ (v\sigma^{-1}) = \mathsf{ver}_\mathtt{T} \circ v \circ \sigma^{-1} \overset{(v \in \mathscr{V}_\mathtt{T})}{=} \mathsf{ver}_\mathtt{T} \circ \sigma^{-1} = \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}}.$$

よって $\sigma v \sigma^{-1} \in \mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}}$.

($\subset$) 任意に $v \in \mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}}$ をとる．$v = \sigma(\sigma^{-1}v\sigma)\sigma^{-1}$ であり，

$$\mathsf{ver}_\mathtt{T} \circ (\sigma^{-1}v\sigma) = \pi_2 \circ \mathtt{T}^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ v \circ \sigma = \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}} \circ v \circ \sigma \overset{(v \in \mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}})}{=} \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}} \circ \sigma = \mathsf{ver}_\mathtt{T}$$

より $\sigma^{-1}v\sigma \in \mathscr{V}_\mathtt{T}$ なので $v \in \sigma\mathscr{V}_\mathtt{T}\sigma^{-1}$.

(iii) 全射は自明．任意に $(h,v),(h',v') \in \mathscr{H}_T\mathscr{V}_T$ をとり $hv = h'v'$ と仮定．すると，$vv'^{-1} = h^{-1}h'$ なので，$vv'^{-1}, h^{-1}h' \in \mathscr{H}_\mathtt{T} \cap \mathscr{V}_\mathtt{T} \overset{\text{(i)}}{=} \mathrm{id}$．よって，$vv'^{-1}, h^{-1}h' = \mathrm{id}$ だから $v = v'$ & $h = h'$．よって単射も成立． ■

補題 1.7

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, i \in [\ell]$ について，$\lambda_i = \#\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$.

Proof: 次の対応の全単射性を示せばよい．

$$\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\}) \to [\lambda_i]; x \mapsto \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x)$$

well-defined は任意の $x \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$ について，$\mathsf{hor}_\mathtt{T}, \mathsf{ver}_\mathtt{T}$ の定義より $(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x)) \in \mathrm{Pos}_\lambda$ なので $\mathsf{ver}_\mathtt{T}(x) \in [\lambda_{\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x)}] = [\lambda_i]$ であることより従う．単射は任意の $x, y \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$ について, $\mathsf{ver}_\mathtt{T}(x) = \mathsf{ver}_\mathtt{T}(y) \Leftrightarrow (i, \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x)) = (i, \mathsf{ver}_\mathtt{T}(y)) \Leftrightarrow (\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x)) = (\mathsf{hor}_\mathtt{T}(y), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(y)) \Leftrightarrow \mathtt{T}^{-1}(x) = \mathtt{T}^{-1}(y) \Leftrightarrow x = y$ であることより従う．全射は任意の $j \in [\lambda_i]$ について，$j = \mathsf{ver}_\mathtt{T}(\mathtt{T}(i,j))$ で $\mathtt{T}(i,j) \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$ であることより従う． ■

補題 1.8

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, \mathtt{U} \in \mathrm{Tab}_\mu, r \in [\ell] \cap [k]$ に対し，以下は同値である．

(i) $\exists h \in \mathscr{H}_\mathtt{T}, \forall i \in [r](\lambda_i = \mu_i \,\&\, \forall j \in [\lambda_i](\mathtt{T}(i,j) = h\mathtt{U}(i,j)))$

(ii) $\forall i \in [r](\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\}) = \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\}))$.

Proof: (i) $\Rightarrow$ (ii): 任意に $i \in [r]$ をとる．まず $\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\}) \supset \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$ である．実際，任意に $x \in \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$ をとると，仮定より $\mathtt{T}(i, \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x)) = h\mathtt{U}(i, \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x))$ なので両辺に $\mathsf{hor}_\mathtt{T}$ を施すと $i = \mathsf{hor}_\mathtt{T} \circ h(\mathtt{U}(\mathsf{hor}_\mathtt{U}(x), \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x))) = \mathsf{hor}_\mathtt{T} \circ h(x) = \mathsf{hor}_\mathtt{T}(x)$．よって $x \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$．さらに仮定より $\lambda_i = \mu_i$ なので補題 1.7 より，$\#\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\}) = \#\mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$．よって先のことと合わせて $\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\}) = \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$．

(i) $\Leftarrow$ (ii): まず仮定と補題 1.7 より $\forall i \in [r](\lambda_i = \mu_i)$．任意に $p \in \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$ をとると $\exists i \in [r](\mathsf{hor}_\mathtt{U}(p) = i)$ であるから $\mathsf{ver}_\mathtt{U}(p) \leqslant \mu_{\mathsf{hor}_\mathtt{U}(p)} = \mu_i = \lambda_i = \lambda_{\mathsf{hor}_\mathtt{U}(p)}$．従って $\mathtt{U}^{-1}(p) = (\mathsf{hor}_\mathtt{U}(p), \mathsf{ver}_\mathtt{U}(p)) \in \mathrm{Pos}_\lambda$．よって $\forall p \in \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})(\mathtt{U}^{-1}(p) \in \mathrm{Pos}_\lambda)$ であるので，次の $h\colon [n] \to [n]$ は well-defined.

$$h(p) := \begin{cases} \mathtt{T} \circ \mathtt{U}^{-1}(p) & \text{if } p \in \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\}), \\ p & \text{otherwise.} \end{cases}$$

以下で全射を示す．任意に $q \in [n]$ をとると，$q \notin \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$ のときは $q = h(q)$ であるのでよい．$q \in \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$ のときは，仮定より $q \in \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})$ なので，well-defined を示したときと同様にやれば $\mathtt{T}^{-1}(q) \in \mathrm{Pos}_\mu$ となるので $p := \mathtt{U} \circ \mathtt{T}^{-1}(q)$ が考えられる．$\mathsf{hor}_\mathtt{U}(p) = \pi_1 \circ \mathtt{U}^{-1}(p) = \mathsf{hor}_\mathtt{T}(q)$ なので，$p \in \bigcup_{i=1}^r \mathsf{hor}_\mathtt{U}^{-1}(\{i\})$ であるので $h(p) = \mathtt{T} \circ \mathtt{U}^{-1}(\mathtt{U} \circ \mathtt{T}^{-1}(q)) = q$．さらに h の始域と終域の元の個数が同じであることから単射も従う．最後に h の定義より $\mathsf{hor}_\mathtt{T} \circ h = \mathsf{hor}_\mathtt{T}$ であることもすぐにわかるので $h \in \mathscr{H}_\mathtt{T}$．任意の $i \in [r], j \in [\lambda_i]$ について，h の定義より $h\mathtt{U}(i,j) = \mathtt{T}(i,j)$. ■

以下の命題 1.9 は $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を構成する上で最も本質的であり，tableaux から構成される表現の既約性や parition の異なる tabluaux から得られる既約表現は同型でないことなどを示すのに使われる．

命題 1.9

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, \mathtt{U} \in \mathrm{Tab}_\mu, r \in [\ell] \cap [k]$ について，

$$\forall i \in [r](\lambda_i = \mu_i \,\&\, \forall x, y \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})(x \neq y \Rightarrow \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x) = \mathsf{ver}_\mathtt{U}(y)))$$
$$\Rightarrow \exists h \in \mathscr{H}_\mathtt{T}, \exists v \in \mathscr{V}_\mathtt{U}, \forall i \in [r], \forall j \in [\lambda_i](\mathtt{T}(i,j) = hv\mathtt{U}(i,j)).$$

Proof: $\forall i \in [r](\lambda_i = \mu_i \;\&\; \forall x, y \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})(x \neq y \Rightarrow \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x) = \mathsf{ver}_\mathtt{U}(y)))$ と仮定．すると

$$(\star) \qquad \forall i \in [r], \forall x, y \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\})(x \neq y \Rightarrow \mathsf{ver}_\mathtt{U}^{-1}(\{\mathsf{ver}_\mathtt{U}(x)\}) \cap \mathsf{ver}_\mathtt{U}^{-1}(\{\mathsf{ver}_\mathtt{U}(y)\}) = \varnothing)$$

を満たす．$\forall s \in \mathbb{N}(s \leqslant r \Rightarrow \exists h \in \mathscr{H}_\mathtt{T}, \exists v \in \mathscr{V}_\mathtt{U}, \forall i \in [s], \forall j \in [\lambda_i](\mathtt{T}(i,j) = hv\mathtt{U}(i,j)))$ を s に関する帰納法で示す．

まず $s = 1$ のときの成立を示す．$\forall x \in [n]((1, \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x)) \in \mathrm{Pos}_\mu)$ であることが $\mathsf{hor}_\mathtt{U}, \mathsf{ver}_\mathtt{U}, \mathscr{P}_n$ の定義よりいえるので

$$v := \prod_{x \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\})} [\![x \;\; \mathtt{U}(1, \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x))]\!]$$

が考えられる．自明に $\forall x \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\})(\{x, \mathtt{U}(1, \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x))\} \subset \mathsf{ver}_\mathtt{U}^{-1}(\{\mathsf{ver}_\mathtt{U}(x)\}))$ であるので $(\star)$ より v は disjoint cycles の積となっている．ここで $v \in \mathscr{V}_\mathtt{U}$ であることが v の定義よりすぐに確かめられる．ところで $\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\}) = \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{1\})$ である．実際任意の $x \in \mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\})$ について，$\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(x) = \mathsf{hor}_\mathtt{U}(v^{-1}(x)) = \mathsf{hor}_\mathtt{U}(v(x)) \overset{(v \text{ の def})}{=} \mathsf{hor}_\mathtt{U}(\mathtt{U}(1, \mathsf{ver}_\mathtt{U}(x)) = 1$．ここで 2 番目の式変形は v が disjoint cycles の積だから $v = v^{-1}$ であることより．よって $\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\}) \subset \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{1\})$．さらに仮定より $\lambda_1 = \mu_1$ なので補題 1.7 より $\#\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\}) = \#\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{1\})$ であるから $\mathsf{hor}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\}) = \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{1\})$．従って補題 1.8 の ((i) $\Leftarrow$ (ii)) より $s = 1$ のときの主張の成立が示せた．

s までの主張の成立を仮定する．$s+1 \leqslant r$ と仮定．まず帰納法の仮定より $\exists h' \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}, \exists v' \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}}, \forall i \in [s], \forall j \in [\lambda_i](\mathtt{T}(i,j) = h'v'\mathtt{U}(i,j)))$．ここで $\forall x \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{s+1\})((s+1, \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x)) \in \mathrm{Pos}_\mu)$ が成立する．それを以下で示す．任意に $x \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{s+1\})$ をとる．$\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x) \leqslant s$ と仮定すると $x \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$ となるので帰納法の仮定と補題 1.8 の ((i) $\Rightarrow$ (ii)) より $x \in \bigcup_{i=1}^{s} \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\})$ であるから $\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) \leqslant s$ である．これは x の取り方に矛盾するので背理法により $\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x) > s$ なので $\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x) \geqslant s+1$．よって partition の定義より $\mu_{\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x)} \leqslant \mu_{s+1}$．さらに $\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}, \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}$ の定義より $(\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x), \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x)) \in \mathrm{Pos}_\mu$ であるから $\mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x) \leqslant \mu_{\mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x)}$．よって $\mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x) \leqslant \mu_{s+1}$ だから $(s+1, \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x)) \in \mathrm{Pos}_\mu$．

従って

$$w := \prod_{x \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(\{s+1\})} [\![x \;\; v'\mathtt{U}(s+1, \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x))]\!]$$

$$v := w \circ v'$$

が考えられる．任意の $p \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{s+1\})$ について $\{x, v'\mathtt{U}(s+1, \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x))\} \subset \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}^{-1}(\{\mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x)\}) \overset{(v' \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}})}{=} \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}^{-1}(\{\mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(x)\})$ であることと ($\star$) より w は disjoint cycles の積になっている．ここで $w \in \mathscr{V}_{v'\mathtt{U}} \overset{(\text{命題 } 1.6(\mathrm{ii}))}{=} \mathscr{V}_{\mathtt{U}}$ であることがすぐに確かめられる．よって $v = w \circ v' \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}}$ である．さらに $\forall i \in [s+1](\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\}))$ である．以下でそれを示す．任意に $i \in [s+1]$ をとる．

任意に $x \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}))$ をとる．$i \leqslant s$ のとき，

$$\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(x) = \pi_1 \circ \mathtt{U}^{-1} \circ v'^{-1} \circ w^{-1}(x) = \pi_1 \circ \mathtt{U}^{-1} \circ v'^{-1} \circ w(x) \overset{(w \text{ の def})}{=} \pi_1 \circ \mathtt{U}^{-1} \circ v'^{-1}(x) = \mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}(x) = i.$$

2 番目の式変形は w が disjoint cycles の積であること，最後の変形は $i \in [s]$ であることと補題 1.8の ((i) $\Rightarrow$ (ii)) より $\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \mathsf{hor}_{v'\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$ であることを使っている．$i = s+1$ のとき，

$$\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(x) = \pi_1 \circ \mathtt{U}^{-1} \circ v'^{-1} \circ w(x)) \overset{(w \text{ の def})}{=} \pi_1 \circ \mathtt{U}^{-1} \circ v'^{-1}(v'\mathtt{U}(s+1, \mathsf{ver}_{v'\mathtt{U}}(x))) = s+1 = i.$$

従って $\mathsf{hor}_{T}^{-1}(\{i\}) \subset \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$ である．仮定より $\lambda_i = \mu_i$ なので補題 1.7 より $\#\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \#\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$ であるから $\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$.

従って $\forall i \in [s+1](\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\}))$ であることが示せたので，補題 1.8 の ((i) $\Leftarrow$ (ii)) より $\exists h \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}, \forall i \in [s+1], \forall j \in [\lambda_i](\mathtt{T}(i,j) = hv\mathtt{U}(i,j))$. ■

系 1.10

$\lambda \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T}, \mathtt{U} \in \mathrm{Tab}_\lambda$ について，

$$\forall x, y \in [n]((x \neq y \;\&\; \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) = \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y)) \Rightarrow \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(x) \neq \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(y)) \\ \Rightarrow \exists h \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}} \exists v \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}}(\mathtt{T} = hv\mathtt{U}).$$

Proof: 命題 1.9 より従う． ■

系 1.11

$\sigma \in \mathfrak{S}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_n$ について，

$$\forall x, y \in [n]((x \neq y \;\&\; \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) = \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y)) \Rightarrow \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}}(x) \neq \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}}(y)) \quad \Rightarrow \quad \sigma \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}\mathscr{V}_{\mathtt{T}}.$$

Proof: 任意に $\sigma \in \mathfrak{S}_n, \mathtt{T} \in \mathcal{T}_n$ をとりこれらが $\forall x, y \in [n]((x \neq y \;\&\; \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) = \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y)) \Rightarrow \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}}(x) \neq \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{T}}(y))$ を満たすとする．すると $\mathtt{T}$ と $\sigma\mathtt{T}$ は系 1.10 の仮定を満たすので $\exists h \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}, \exists v' \in \mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}}(\mathtt{T} = hv'(\sigma\mathtt{T}))$．$\mathcal{T}_n$ の定義より $\mathtt{T}$ は全単射なので，$\mathrm{id} = hv'\sigma$．ここで命題 1.6(ii) より $v' \in \sigma\mathscr{V}_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}$ なので，$v := \sigma^{-1}v'\sigma$ と置けば $v \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}$ で $\mathrm{id} = h(\sigma v\sigma^{-1})\sigma$．よって $h^{-1}v^{-1} = \sigma$．従って $\sigma \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}\mathscr{V}_{\mathtt{T}}$. ■

系 1.12

$\mathtt{T},\mathtt{U}\in\mathcal{T}_n,\sigma\in\mathfrak{S}_n$ について，

$$\exists x,y\in[n](x\neq y\ \&\ \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x)=\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y)\ \&\ \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{U}}(x)=\mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{U}}(y))$$
$$\Rightarrow\exists\gamma\in\mathfrak{S}_n(\gamma\colon cycle\,\&\,\gamma\in\mathscr{H}_T\,\&\,\sigma^{-1}\gamma\sigma\in\mathscr{V}_{\mathtt{U}}).$$

Proof: $\gamma:=[\![x\ \ y]\!]\in\mathfrak{S}_n$ とおけば γ: cycle $\&\,\gamma\in\mathscr{H}_{\mathtt{T}}\,\&\,\gamma\in\mathscr{V}_{\sigma\mathtt{U}}$ となることはよい．$\gamma\in\mathscr{V}_{\sigma\mathtt{U}}$ と命題 1.6(ii) より $\gamma\in\sigma\mathscr{V}_{\mathtt{U}}\sigma^{-1}$．よって $\sigma^{-1}\gamma\sigma\in\mathscr{V}_{\mathtt{U}}$. ■

1.3 K-代数と群環

体 K と群 G を固定する．G を K-basis とするような K 上のベクトル空間 $KG:=\bigoplus_{g\in G}Kg$ に

$$(\sum_{g\in G}r_g g)\cdot(\sum_{h\in G}s_h h)=\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}r_g s_h(gh)$$

と積構造を入れるとこれは環になる．この KG のことを**群環**という．実は群の表現を考えることは群環上の加群を考えることと同じ（正確には群の表現圏と群環上の加群圏は圏同型）で，環上の加群の一般論を群の表現論に使うことができる．さらに群環は **K-代数**と呼ばれる構造も備えておりその一般論を用いることもできる．以下では $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を構成するために必要な代数と加群の一般論をみていく．環といったらそれは単位的なもののことを指すこととする．環 R，左 R-加群 M,N について，M から N への R-加群準同型全体の集合を $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ とかき，特に $\mathrm{Hom}_R(M,M)$ を $\mathrm{End}_R(M)$ とかくこととする．

定義 1.13

体 K について, A が K-代数 :⇔ A が K-ベクトル空間かつ環で $\forall r\in K,\forall x,y\in A(r(xy)=(rx)y=x(ry))$.

定義 1.14

環 R，左 R-加群 M について，

- M が単純 :⇔ $(M\neq\{0\}\ \&\ \forall N\colon M$ の R-部分加群 $(N=\{0\}$ or $N=M))$.
- M が半単純 :⇔ $\forall N\colon M$ の R-部分加群 $,\exists N'\colon M$ の R-部分加群 $(M=N\oplus N')$.

群環上の加群が単純 (resp. 半単純) であるということは群の表現が既約 (resp. 完全可約) であるということに対応している．よって Maschke's theorem により K の標数が有限群 G の位数を割り切らないならば任意の KG 上の加群は半単純である．実は環 R について，$\{0\}\neq M$ が半単純 R-加群 $\Leftrightarrow\exists I\neq\varnothing,\exists(M_i)_{i\in I}\colon M$ の単純 R-部分加群たち $(M=\bigoplus_{i\in I}M_i)$ ということが Zorn's lemma を用いることにより示せる．ここでは証明は与えず事実として扱うこととする．

補題 1.15 (*Schur's lemma* の逆)

K-代数 A，零でない半単純 A-加群 V に対し，K-ベクトル空間として $\mathrm{End}_A(V)\cong K$ ならば V は単純 A-加群.

Proof: $\{0\}\neq V$ の半単純性より，$\exists I\neq\varnothing,\exists(V_i)_{i\in I}\colon V$ の単純 A-部分加群たち $(V=\bigoplus_{i\in I}V_i)$．ここで任意の $j\in I$ について，$\bigoplus_{i\in I}V_i$ から V_j への標準射影を π_j で表すこととする．$(V_i)_{i\in I}$ は単純加群たちでありそれぞれは零ベクトル空間でないことから $\mathrm{End}_A(V)\supset\{\pi_i\mid i\in I\}$ は K 上一次独立である．ここで $\mathrm{End}_A(V)$ と K とが K-線形同型

であることから $\mathrm{End}_A(V)$ は K 上 1 次元なので，その一次独立な部分集合である $\{P_i \mid i \in I\}$ の元の個数は 1 以下である．$I \neq \varnothing$ であったので，I の元の個数は 1 となるから $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ より V は単純である． ■

補題 1.16

K-代数 A，A の左イデアル I に対し，$\varepsilon \in A$ が冪等元ならば K-ベクトル空間として $\mathrm{Hom}_A(A\varepsilon, I) \cong \varepsilon I$.

Proof: $\mathrm{Hom}_A(A\varepsilon, I)$ から I への対応は $f \mapsto \varepsilon f(\varepsilon)$，逆向きの対応は $(x \mapsto xy) \leftarrow y$ で与えればよい．これらは K-線形写像になっており，ε の冪等性より合成すると id になる． ■

1.4 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 $L_{\mathtt{T}}$ の構成

この節では tableaux から $\mathfrak{S}_n$ の既約表現を得ることを目標とする．以降，標数が $n!$ を割り切らない体 K をとり固定して議論する．この節でのみ $\mathtt{T} \in \mathcal{T}_n$ も固定する．K の零元は 0_K，単位元は 1_K と表すこととする．

以下では $\mathtt{T} \in \mathcal{T}_n$ をとり固定し，$K\mathfrak{S}_n$ の元たち

$$h_{\mathtt{T}} := \sum_{\sigma \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}} \sigma, \quad v_{\mathtt{T}} := \sum_{\sigma \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma, \quad \varepsilon_{\mathtt{T}} := h_{\mathtt{T}} v_{\mathtt{T}}$$

を考える．また ${}^{\mathscr{H}_{\mathtt{T}}}K\mathfrak{S}_n{}^{\mathscr{V}_{\mathtt{T}}} := \{x \in K\mathfrak{S}_n \mid \forall h \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}(hx = x) \,\&\, \forall v \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}(\mathrm{sgn}(v)xv = x)\}$ と定義する．

命題 1.17

以下の 4 つが成立する．

(i) $\forall \sigma \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}(\sigma h_{\mathtt{T}} = h_{\mathtt{T}} = h_{\mathtt{T}}\sigma)$.

(ii) $\forall \sigma \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}(\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma) v_{\mathtt{T}} = v_{\mathtt{T}} = \mathrm{sgn}(\sigma) v_{\mathtt{T}}\sigma)$.

(iii) $\varepsilon_{\mathtt{T}} \in {}^{\mathscr{H}_{\mathtt{T}}}K\mathfrak{S}_n{}^{\mathscr{V}_{\mathtt{T}}}$.

(iv) $\varepsilon_{\mathtt{T}} \neq 0$.

Proof: (i), (ii) は定義より．(iii) は (i), (ii) より．(iv) は命題 1.6(iii) より，$\varepsilon_{\mathtt{T}}$ の id の係数は $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$ であることから従う． ■

命題 1.18

${}^{\mathscr{H}_{\mathtt{T}}}K\mathfrak{S}_n{}^{\mathscr{V}_{\mathtt{T}}} = K\varepsilon_{\mathtt{T}}$.

Proof: ($\supset$) 命題 1.17(iii) より自明に従う．($\subset$) 任意に $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma \sigma \in {}^{\mathscr{H}_{\mathtt{T}}}K\mathfrak{S}_n{}^{\mathscr{V}_{\mathtt{T}}}$ をとる．$\mathfrak{S}_n$ が $K\mathfrak{S}_n$ の K-basis であることより (1) $\forall h \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}(a_{h\sigma} = a_\sigma)$; (2) $\forall v \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}(\mathrm{sgn}(v) a_{\sigma v} = a_\sigma)$ がすぐに確かめられる．これらのことから $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n(\sigma \notin \mathscr{H}_{\mathtt{T}}\mathscr{V}_{\mathtt{T}} \Rightarrow a_\sigma = 0_K)$ が従う．実際，任意に $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ をとり $\sigma \notin \mathscr{H}_{\mathtt{T}}\mathscr{V}_{\mathtt{T}}$ と仮定すると，系 1.11 の対偶より，ある $x, y \in [n]$ が存在して補題 1.12 の仮定を満たす．よって，補題 1.12 よりある cycle $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ が存在して，$\gamma \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}} \,\&\, \sigma^{-1}\gamma\sigma \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}$ を満たすので

$$a_\sigma \overset{(2)}{=} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\gamma\sigma) a_{\sigma(\sigma^{-1}\gamma\sigma)} = -a_{\gamma\sigma} \overset{(1)}{=} -a_\sigma.$$

よって $2a_\sigma = 0_K$ であるが，設定より K の標数は 2 を割り切らないので $a_\sigma = 0_K$．従って，

$$\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} a_\sigma \sigma &= \sum_{hv\in\mathscr{H}_\mathrm{T}\mathscr{V}_\mathrm{T}} a_{hv}hv \\
&= \sum_{hv\in\mathscr{H}_\mathrm{T}\mathscr{V}_\mathrm{T}} a_v hv \qquad (\because (1)) \\
&= \sum_{hv\in\mathscr{H}_\mathrm{T}\mathscr{V}_\mathrm{T}} \mathrm{sgn}(v)(\mathrm{sgn}(v)a_{\mathrm{id}v})hv \\
&= a_{\mathrm{id}} \sum_{hv\in\mathscr{H}_\mathrm{T}\mathscr{V}_\mathrm{T}} \mathrm{sgn}(v)hv \qquad (\because (2)) \\
&= a_{\mathrm{id}} \sum_{(h,v)\in\mathscr{H}_\mathrm{T}\times\mathscr{V}_\mathrm{T}} \mathrm{sgn}(v)hv \qquad (\because \text{命題 } 1.6\text{(iii)}) \\
&= a_{\mathrm{id}}\varepsilon_\mathrm{T}.
\end{aligned}$$

■

以下のように，$K\mathfrak{S}_n$ の部分表現を ε_T で生成される単項左イデアルで定義する．

$$L_\mathrm{T} := (K\mathfrak{S}_n)\varepsilon_\mathrm{T}.$$

命題 1.19

以下が成立する．

(i) $\dim(L_\mathrm{T})1_K \neq 0_K$.

(ii) $r_\mathrm{T} := n!1_K(\dim(L_\mathrm{T})1_K)^{-1}$ とおくと $e_\mathrm{T} := r_\mathrm{T}^{-1}\varepsilon_\mathrm{T}$ は非自明な冪等元.

Proof: まず $\varepsilon_\mathrm{T}^2 \in {}^{\mathscr{H}_\mathrm{T}}K\mathfrak{S}_n{}^{\mathscr{V}_\mathrm{T}}$ であることがすぐわかるので，命題 1.18 より $\varepsilon_\mathrm{T}^2 \in K\varepsilon_\mathrm{T}$ であるから $\exists r \in K(\varepsilon_\mathrm{T}^2 = r\varepsilon_\mathrm{T})$. ここで $f\colon K\mathfrak{S}_n \to K\mathfrak{S}_n; \sigma \mapsto \sigma\varepsilon_\mathrm{T}$ とおくとこれは K-線形写像である．L_T は $K\mathfrak{S}_n$ の K-部分空間なので $\exists W\colon K\mathfrak{S}_n$ の K-部分空間 $(K\mathfrak{S}_n = L_\mathrm{T} \oplus W)$．さらに $\mathrm{Im} f \subset L_\mathrm{T}, f|_{L_\mathrm{T}} = r\,\mathrm{id}_{L_\mathrm{T}}$ であるので線形代数の一般論により f の表現行列は $\left(\begin{array}{c|c} rE_{\dim(L_\mathrm{T})} & * \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{array}\right)$ となる．よって $\mathrm{tr}(f) = \dim(L_\mathrm{T})r$.

一方で定義通りに $\mathrm{tr}(f)$ を計算してみる．$K\mathfrak{S}_n$ の K-basis $(\sigma)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ の dual basis を $(\sigma^*)_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$ と表すこととする．

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma^*(f(\sigma)) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sigma^*(\sigma\varepsilon_\mathrm{T}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \sum_{(h,v)\in\mathscr{H}_\mathrm{T}\times\mathscr{V}_\mathrm{T}} \mathrm{sgn}(v)\sigma^*(\sigma hv) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} 1_K = n!1_K.$$

ここで最後の変形は $\sigma^*(\sigma hv) \neq 0 \Leftrightarrow hv = \mathrm{id} \overset{(\text{命題 } 1.6\text{(iii)})}{\Leftrightarrow} (h = \mathrm{id}\ \&\ v = \mathrm{id})$ であることを使っている．従って $\mathrm{tr}(f) = n!1_K$.

よって，これまでの 2 通りの $\mathrm{tr}(f)$ の計算により $(\dim(L_\mathrm{T})1_K)r = n!1_K$ が得られる．ここで K の標数が $n!$ を割り切らないことにより，$n!1_K$ は 0_K でないので $\dim(L_\mathrm{T})1_K$ と $r = r_T$ は共に 0_K でない．$e_\mathrm{T} = r_\mathrm{T}^{-1}\varepsilon_\mathrm{T}$ が冪等元であることは $\varepsilon_\mathrm{T}^2 = r\varepsilon_\mathrm{T}$ からすぐに従う． ■

明らかに $L_\mathrm{T} = (K\mathfrak{S}_n)e_\mathrm{T}$ であることに注意する．

定理 1.20

L_T は既約.

Proof: Maschke's theorem より L_T は半単純 $K\mathfrak{S}_n$-加群なので補題 1.15 より K-ベクトル空間として $\mathrm{End}_{K\mathfrak{S}_n}(L_\mathrm{T}) \cong K$ であることをいえば十分である．$L_\mathrm{T} = (K\mathfrak{S}_n)e_\mathrm{T}$ は自明に $K\mathfrak{S}_n$ の左イデアルであり命題 1.19 より e_T は冪等元なので，補題 1.16 より K-ベクトル空間として $\mathrm{End}_{K\mathfrak{S}_n}(L_\mathrm{T}) \cong e_\mathrm{T}(K\mathfrak{S}_n)e_\mathrm{T}$．ここで e_T の定義

と命題 1.18 より $e_{\mathtt{T}}(K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{T}} \subset K\varepsilon_{\mathtt{T}}$ である．さらに $K\varepsilon_{\mathtt{T}} = Ke_{\mathtt{T}} \overset{(\text{命題 }1.19)}{=} e_{\mathtt{T}}Ke_{\mathtt{T}} \subset e_{\mathtt{T}}(K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{T}}$ でもあるので，$e_{\mathtt{T}}(K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{T}} = K\varepsilon_{\mathtt{T}} \overset{(\text{命題 }1.17(\text{iv}))}{\cong} K$．よって $\mathrm{End}_{K\mathfrak{S}_n}(L_{\mathtt{T}}) \cong K$ である． ■

1.5 partition と $\mathfrak{S}_n$ の既約表現との間の自然な一対一対応

前の節では一つの tableaux から一つの既約表現が得られるということをみた．この節ではこの構成法で $\mathfrak{S}_n$ の既約表現が尽くされるということを確かめる．

そのために $\mathscr{P}_n$ に辞書式順序を入れ，その大小を利用することで partition が異なる tableaux から構成される既約表現は同型でないことの証明を目論む．まずは以下のように定める．

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k) \in \mathscr{P}_n$ について，

$$\lambda \leqslant \mu :\Leftrightarrow ((\lambda = \mu) \text{ or } (\lambda \neq \mu \,\&\, \lambda_m < \mu_m)).$$

ここで $m := \min\{i \in [\ell] \cap [k] \mid \lambda_i \neq \mu_i\}$ と置いている．この順序により $\mathscr{P}_n$ は全順序集合になる．

補題 1.21

$\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, U \in \mathrm{Tab}_\mu$ について，

$$\lambda > \mu \Rightarrow \exists x, y \in [n](x \neq y \;\&\; \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) = \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y) \;\&\; \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(x) = \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(y)).$$

Proof: $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ と表示．$\lambda > \mu$ と仮定すると $m := \min\{i \in [\ell] \cap [k] \mid \lambda_i \neq \mu_i\}$ がとれる．$\exists x, y \in \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\})(x \neq y \,\&\, \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) = \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y) \,\&\, \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(x) = \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(y))$ を満たすときに主張が成立することはよい．

そうでないときは $\forall i \in [m-1] \forall x, y \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\})(x \neq y \Rightarrow \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(x) \neq \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(y))$ であり，$\lambda > \mu$ より $\forall i \in [m-1](\lambda_i = \mu_i)$ でもあるので命題 1.9 の仮定を満たす．よって $\exists h \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}}, \exists v \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}}, \forall i \in [m-1], \forall j \in [\lambda_i](\mathtt{T}(i,j) = hv\mathtt{U}(i,j))$．よって命題 1.8 の ((i) $\Rightarrow$ (ii)) より $\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$．ここで $X := [n] \backslash \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\})$ 上に $\forall p, q \in X(p \sim q :\Leftrightarrow \mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(p) = \mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(q))$ と関係を入れるとこれは同値関係になる．すると

$$\varphi\colon [\mu_m] \to X/{\sim}; j \mapsto \overline{v\mathtt{U}(m,j)}$$

は全単射である．実際，単射は自明で，全射は以下で示す．任意に $\overline{y} \in X/\sim$ をとる．ここで $\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(y) < m$ と仮定すると $y \in \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$ となるので，$\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\}) = \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}^{-1}(\{i\})$ より $y \in \bigcup_{i=1}^{m-1} \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{i\})$．これは $y \in X$ であることに矛盾．よって背理法により $\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(y) \geqslant m$．従って partition の定義より $\mu_{\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(y)} \leqslant \mu_m$．ところで $\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}, \mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}$ の定義より $(\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(y), \mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(y)) \in \mathrm{Pos}_\mu$ であるから $\mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(y) \leqslant \mu_{\mathsf{hor}_{v\mathtt{U}}(y)}$ なので，先のことより $\mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(y) \leqslant \mu_m$．よって $x := \mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(y) \in [\mu_m]$ である．さらに $\mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(y) = \mathsf{ver}_{v\mathtt{U}}(v\mathtt{U}(m,x))$ であることより，$\overline{y} = \overline{v\mathtt{U}(m,x)} = \varphi(x)$．

従って φ の全単射より $\mu_m = \#(X/\sim)$ である．補題 1.7 から $\lambda_m = \#\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{m\})$ であるので，$\lambda > \mu$ より $\#\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{m\}) > \#(X/\sim)$．よって鳩ノ巣原理より $\mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{m\}) \to X/\sim; p \to \overline{p}$ は単射でない．よって $\exists x, y \in \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}^{-1}(\{m\})(\overline{x} = \overline{y} \,\&\, x \neq y)$．ここで $\overline{x} = \overline{y}$ と $v \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}}$ より $\mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(x) = \mathsf{ver}_{\mathtt{U}}(y)$ であるので主張が成立する． ■

補題 1.22

$\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, \mathtt{U} \in \mathrm{Tab}_\mu$ について，$\lambda > \mu$ ならば $h_{\mathtt{T}}(K\mathfrak{S}_n)v_{\mathtt{U}} = 0$．特に $e_{\mathtt{T}}(K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{U}} = 0$．

Proof: $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n(h_{\mathtt{T}}\sigma v_{\mathtt{U}} = 0)$ を示せば十分である．任意に $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ をとる．まず $\lambda > \mu$ と補題 1.21 より，$\exists x, y \in [n](x \neq y \,;\&\,; \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(x) = \mathsf{hor}_{\mathtt{T}}(y) \,;\&\,; \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{U}}(x) = \mathsf{ver}_{\sigma\mathtt{U}}(y))$ を満たすので，系 1.12 より $\exists \gamma \in \mathfrak{S}_n(\gamma\colon \mathrm{cycle} \,\&\, \gamma \in \mathscr{H}_{\mathtt{T}} \,\&\, \sigma^{-1}\gamma\sigma \in \mathscr{V}_{\mathtt{U}})$．よって

$$h_{\mathtt{T}}\sigma v_{\mathtt{U}} \overset{(\text{命題 }1.17(\text{ii}))}{=} h_{\mathtt{T}}\sigma(\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}\gamma\sigma)(\sigma^{-1}\gamma\sigma)v_{\mathtt{U}}) = -h_T\gamma\sigma v_{\mathtt{U}} \overset{(\text{命題 }1.17(\text{i}))}{=} -h_{\mathtt{T}}\sigma v_{\mathtt{U}}.$$

従って，$2h_{\mathtt{T}}\sigma v_{\mathtt{U}} = 0$ であるので $h_{\mathtt{T}}\sigma v_{\mathtt{U}} = 0$. ■

命題 1.23

$\lambda, \mu \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, \mathtt{U} \in \mathrm{Tab}_\mu$ について，$L_{\mathtt{T}}$ と $L_{\mathtt{U}}$ が $\mathfrak{S}_n$ の表現として同型なら $\lambda = \mu$.

Proof: 対偶を示す．$\lambda \neq \mu$ と仮定すると，$(\mathscr{P}_n, \leqslant)$ が全順序集合であることより $\lambda > \mu$ または $\lambda < \mu$ が成立する．$\lambda > \mu$ のとき補題 1.22 より $0 = e_{\mathtt{T}}(K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{U}} \overset{(\text{補題 } 1.16)}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}((K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{T}}, (K\mathfrak{S}_n)e_{\mathtt{U}}) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(L_{\mathtt{T}}, L_{\mathtt{U}})$．よって $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(L_{\mathtt{T}}, L_{\mathtt{U}}) \cong 0$ であるので $L_{\mathtt{T}}$ と $L_{\mathtt{U}}$ は表現として同型でない．$\lambda < \mu$ の場合も同様. ■

命題 1.24

$\mathtt{T} \in \mathcal{T}_n, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ について，$\mathfrak{S}_n$ の表現として $L_{\mathtt{T}} \cong L_{\sigma\mathtt{T}}$．特に $\lambda \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T}, \mathtt{U} \in \mathrm{Tab}_\lambda$ について，$\mathfrak{S}_n$ の表現として，$L_{\mathtt{T}} \cong L_{\mathtt{U}}$.

Proof: 定義より

$$v_{\sigma\mathtt{T}} = \sum_{\tau \in \mathscr{V}_{\sigma\mathtt{T}}} \mathrm{sgn}(\tau)\tau \overset{(\text{命題 } 1.6(\mathrm{ii}))}{=} \sum_{\tau \in \sigma\mathscr{V}_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}} \mathrm{sgn}(\tau)\tau = \sum_{\tau \in \mathscr{V}_{\mathtt{T}}} \mathrm{sgn}(\sigma\tau\sigma^{-1})\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma v_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}.$$

同様に $h_{\sigma\mathtt{T}} = \sigma h_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}$ であるので，$\varepsilon_{\sigma\mathtt{T}} = (\sigma h_{\mathtt{T}}\sigma^{-1})(\sigma v_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}) = \sigma\varepsilon_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}$．よって $L_{\sigma\mathtt{T}} = (K\mathfrak{S}_n)\sigma\varepsilon_{\mathtt{T}}\sigma^{-1} = (K\mathfrak{S}_n)\varepsilon_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}$．従って，

$$\varphi \colon L_{\sigma\mathtt{T}} \to L_{\mathtt{T}}; x \to x\sigma$$

は well-defined である．さらに，これは明らかに表現としての準同型であり，定義から $\varphi(\varepsilon_{\mathtt{T}}\sigma^{-1}) = \varepsilon_{\mathtt{T}}$ が従うので，命題 1.17 より φ は零写像でない．よって Schur's lemma より $L_{\mathtt{T}} \cong L_{\sigma\mathtt{T}}$．後半の主張は σ として $\mathtt{T}\mathtt{U}^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ をとればよい. ■

群 G に対し，

$$\mathrm{Irr}_K(G) := \{L \mid L \text{ は群 } G \text{ の } K \text{ 上の既約表現}\}/\cong$$

とおく．ここで $\cong$ は G の表現としての同型である．同値類はバーで表すこととする．$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathscr{P}_n$ について，

$$\mathtt{T}_\lambda \colon \mathrm{Pos}_\lambda \to [n]; (i,j) \mapsto (\sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k) + j$$

とおく．もちろん $\mathtt{T}_\lambda \in \mathrm{Tab}_\lambda$ となっている．

定理 1.25

K が代数閉なら $\mathscr{P}_n \to \mathrm{Irr}_K(\mathfrak{S}_n); \lambda \mapsto \overline{L_{\mathtt{T}_\lambda}}$ は全単射.

Proof: この対応は定理 1.20 より well-defined で，命題 1.23 より単射である．K が代数的閉体であることより $\mathrm{Irr}_K(\mathfrak{S}_n)$ と $\mathfrak{S}_n/\underset{\mathrm{conj}}{\sim}$ との間には全単射が存在する ([1, §5.4])．さらに定理 1.5 より $\mathfrak{S}_n/\underset{\mathrm{conj}}{\sim}$ と $\mathscr{P}_n$ との間には全単射が存在する．よって $\mathrm{Irr}_K(\mathfrak{S}_n)$ と $\mathscr{P}_n$ との間には全単射が存在するので $\mathscr{P}_n$ と $\mathrm{Irr}_K(\mathfrak{S}_n)$ の元の個数は等しい．よって主張の対応の全射性も従う. ■

2　対称群の既約表現の様子と指標

1 節では対称群の既約表現を全て得ることはできたが，それが具体的にはどのような表現であるかや指標が何になるのかということをきちんとは見ていない．本節ではより踏み込んで対称群の既約表現を見ていく．以下では標数が $n!$ を割り切らない代数的閉体 K を固定して議論する．

2.1　$\mathfrak{S}_n$ の named な既約表現たちとその tableaux

いくつかの $\mathfrak{S}_n$ の既約表現たちには名前がついている．この節ではその既約表現，及び対応する tabluaux を見ていく．

定義 2.1

以下は $K\mathfrak{S}_n$-加群である．

(i) K 自身に，$\sigma.r := r$ $(r \in K, \sigma \in \mathfrak{S}_n)$ と作用をいれたもの．これを**自明表現**と呼び K_{triv} とかくこととする．

(ii) K 自身に，$\sigma.r := \mathrm{sgn}(\sigma)r$ $(r \in K, \sigma \in \mathfrak{S}_n)$ と作用をいれたもの．これを**符号表現**と呼び K_{sgn} とかくこととする．

(iii) K^n の部分空間 $\{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0_K\}$ に，$\sigma.(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n, (x_1, \ldots, x_n) \in K^n)$ と作用をいれたもの．これを**標準表現**と呼び Std_n とかくこととする．

(iv) $k \in \mathbb{N}, \mathfrak{S}_n$ の表現 V について，交代テンソル空間 $\bigwedge^k(V)$ に $\sigma.(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) := \sigma.x_1 \wedge \ldots \wedge \sigma.x_k$ と作用をいれたもの．

今更だが parition は重複する成分があるとき指数のように略記することがある．例えば $(5,4,4,3,2,2,2,1)$ は $(5,4^2,3,2^3,1)$ と略記される．

命題 2.2

定理 *1.25* の対応により以下のように *partition* と既約表現とが対応する．

(i) $(n) \leftrightarrow K_{\mathrm{triv}}$

(ii) $(1^n) \leftrightarrow K_{\mathrm{sgn}}$

Proof: (i)，(ii) は同様に示せるので (ii) のみ示す．$\mathtt{T} := \mathtt{T}_{(1^n)}$ とする．定義より $\mathscr{H}_{\mathtt{T}} = \{\mathrm{id}\}, \mathscr{V}_{\mathtt{T}} = \mathfrak{S}_n, h_{\mathtt{T}} = \mathrm{id}, \varepsilon_{\mathtt{T}} = v_{\mathtt{T}}$ であるので命題 1.17(ii) より $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n(\sigma\varepsilon_{\mathtt{T}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\varepsilon_{\mathtt{T}})$．よって $K_{\mathrm{sgn}} \to L_{\mathtt{T}}; r \mapsto r\varepsilon_{\mathtt{T}}$ は表現としての準同型であり，自明に零写像でないので Schur's lemma よりこれは同型．■

また Std_n に対応する partition が $(n-1,1)$ であること，$k \in [n-1]$ について，$\bigwedge^k(\mathrm{Std}_n)$ に対応する partition が $(n-k, 1^k)$ であることも知られている [2, §4.1].

2.2　転置した tableaux から得られる既約表現

一次元表現と既約表現とのテンソル積は既約なのであった [1, §5.4]．対称群には非自明な一次元表現として符号表現が備わっているが，実はそれとのテンソル積により得られる既約表現はどの tableaux に対応するか

まで分かってしまう．以下ではそれを見ていく．

まず $\lambda \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda$ を固定し，

$$ {}^t\mathrm{Pos}_\lambda := \{(j,i) \mid (i,j) \in \mathrm{Pos}_\lambda\}, \quad \mathtt{T}^\star \colon {}^t\mathrm{Pos}_\lambda \to [n]; (j,i) \mapsto \mathtt{T}(i,j) $$

とおく．明らかに $(\mathtt{T}^\star)^\star = \mathtt{T}$ であることに注意．

命題 2.3

$\mu := (\#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{1\}), \#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{2\}), \ldots, \#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{\lambda_1\}))$ とすると以下が成立する．

(i) $\mu \in \mathscr{P}_n$

(ii) ${}^t\mathrm{Pos}_\lambda = \mathrm{Pos}_\mu$

(iii) $\mathtt{T}^\star \in \mathrm{Tab}_\mu$

Proof: (i) まず partition であるための条件の $\sum_{i=1}^{\lambda_1} \mu_i = n$ は，$\bigsqcup_{i=1}^{\lambda_1} \mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{i\}) = [n]$ であることより従う．もう一つの条件の $\mu_1 \geqslant \ldots \geqslant \mu_{\lambda_1}$ は $\forall j, j' \in [\lambda_1](j \leqslant j' \Rightarrow \#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j\}) \geqslant \#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j'\}))$ を示せばよい．

任意に $j, j' \in [\lambda_1]$ をとり，$j \leqslant j'$ と仮定する．ここで

$$ \mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j'\}) \to \mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j\}); x \mapsto \mathtt{T}(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), j) $$

は well-defined で単射である．実際，well-defined は任意の $x \in \mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j'\})$ について，$j \leqslant j' = \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x) \leqslant \lambda_{\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x)}$ なので $(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), j) \in \mathrm{Pos}_\lambda$ であることから従う．単射も以下で示す．任意に $x, x' \in \mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j'\})$ をとる．$\mathtt{T}(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), j) = \mathtt{T}(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x'), j)$ と仮定すると，$\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x) = \mathsf{hor}_\mathtt{T}(x')$ となる．よって，$(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), j') = (\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x'), j')$ なので $(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x)) = (\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x'), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x'))$ だから $\mathtt{T}^{-1}(x) = \mathtt{T}^{-1}(x)$．従って，$x = x'$ である．よってこの写像の単射性より $\#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j'\}) \leqslant \#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j\})$ が従う．

(ii) まず ${}^t\mathrm{Pos}_\lambda, \mathrm{Pos}_\mu$ は共に n 元集合であることがすぐにわかる，よって同じ元の個数をもつので ${}^t\mathrm{Pos}_\lambda \subset \mathrm{Pos}_\mu$ のみを示せば十分である．任意に $(j,i) \in {}^t\mathrm{Pos}_\lambda$ をとる．ここで

$$ [i] \to \mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j\}); k \mapsto \mathtt{T}(k, j) $$

は well-defined で単射である．実際，well-defined は任意の $\forall k \in [i]$ について，$k \leqslant i$ より，$\lambda_k \geqslant \lambda_i \overset{((i,j) \in \mathrm{Pos}_\lambda)}{\geqslant} j$ なので $(k,j) \in \mathrm{Pos}_\lambda$ であることから従う．単射は $\mathtt{T}$ の全単射性より自明．よって $i = \#[i] \leqslant \#\mathsf{ver}_\mathtt{T}^{-1}(\{j\}) = \mu_j$ なので $(j,i) \in \mathrm{Pos}_\mu$ である．

(iii) $\mathtt{T}$ の全単射性より $\mathtt{T}^\star$ は明らかに全単射であることと，(i),(ii) より従う． ■

ここで K-線形写像を以下のように定めると，これは環準同型 (K-代数準同型) にもなる．

$$ \mathfrak{s} \colon K\mathfrak{S}_n \to K\mathfrak{S}_n; \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma $$

命題 2.4

以下が成立する．

(i) $\mathscr{H}_{\mathtt{T}^\star} = \mathscr{V}_\mathtt{T}, \mathscr{V}_{\mathtt{T}^\star} = \mathscr{H}_\mathtt{T}$

(ii) $h_{\mathtt{T}^\star} = \mathfrak{s}(v_\mathtt{T}), v_{\mathtt{T}^\star} = \mathfrak{s}(h_\mathtt{T})$

(iii) $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall x \in K\mathfrak{S}_n(\mathfrak{s}(\sigma x) = \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\mathfrak{s}(x))$.

Proof: (i) 任意の $x \in [n]$ について，$\mathsf{hor}_{\mathtt{T}^\star}(x), \mathsf{ver}_{\mathtt{T}^\star}(x)) = {\mathtt{T}^\star}^{-1}(x) = {\mathtt{T}^\star}^{-1}(\mathtt{T}(\mathsf{hor}_\mathtt{T}(x), \mathsf{ver}_\mathtt{T}(x))) = (\mathsf{ver}_\mathtt{T}(x), \mathsf{hor}_\mathtt{T}(x))$ なので $\mathsf{hor}_{\mathtt{T}^\star} = \mathsf{ver}_\mathtt{T}, \mathsf{ver}_{\mathtt{T}^\star} = \mathsf{hor}_\mathtt{T}$ となることから従う．

(ii) $\mathfrak{s}(v_T) = \sum_{\sigma \in \mathscr{V}_\mathtt{T}} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathfrak{s}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathscr{V}_\mathtt{T}} \sigma \overset{\text{(i)}}{=} h_{\mathtt{T}^\star}$．もう一つも同様．

(iii) 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} r_\tau\tau \in K\mathfrak{S}_n$ に対して，

$$\mathfrak{s}(\sigma \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} r_\tau\tau) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} r_\tau \mathrm{sgn}(\sigma\tau)\sigma\tau = \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} r_\tau \mathrm{sgn}(\tau)\tau = \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\mathfrak{s}(\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} r_\tau\tau).$$

■

命題 2.5

$\mathfrak{S}_n$ の表現として，$L_{\mathtt{T}^\star} \cong K_{\mathrm{sgn}} \otimes L_{\mathtt{T}}$.

Proof： 以下のような対応を定めると，

$$\varphi\colon L_{\mathtt{T}^\star} \to K_{\mathrm{sgn}} \otimes L_{\mathtt{T}}; x \to 1_K \otimes \mathfrak{s}(x)v_{\mathtt{T}}$$

$\mathfrak{s}(\varepsilon_{\mathtt{T}^\star})v_{\mathtt{T}} = v_{\mathtt{T}}\varepsilon_{\mathtt{T}} \in L_{\mathtt{T}}$ であることよりこれは well-defined である．ここで $\mathfrak{s}((r_{\mathtt{T}}^{-1})^2 v_{\mathtt{T}^\star}\varepsilon_{\mathtt{T}^\star})v_{\mathtt{T}} = e_{\mathtt{T}}^2 \overset{(\text{命題 }1.19(\mathrm{ii}))}{=} e_{\mathtt{T}} \neq 0$ であり零写像でもない．さらに自明に K-線形であり，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_n, x \in L_{\mathtt{T}}$ について，

$$\varphi(\sigma x) = 1_K \otimes \mathfrak{s}(\sigma x)v_{\mathtt{T}} \overset{(\text{命題 }2.4(\mathrm{iii}))}{=} 1_K \otimes \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma\mathfrak{s}(x)v_{\mathtt{T}} = \mathrm{sgn}(\sigma)1_K \otimes \sigma\mathfrak{s}(x)v_{\mathtt{T}} = \sigma.(1_K \otimes \mathfrak{s}(x)v_{\mathtt{T}}) = \sigma\varphi(x)$$

であるので $\mathfrak{S}_n$ の表現としての準同型でもある．従って，Schur's lemma より φ は同型である． ■

2.3 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標と Frobenius formula

我々は $\mathfrak{S}_n$ の全ての既約表現の構成法を知っており "理論上" は指標の全てを計算可能である．しかし，愚直にそれを求めようとすれば $\lambda \in \mathscr{P}_n$ ごとに $\varepsilon_{\mathtt{T}_\lambda}$ 及びそれから生成される単項左イデアルの K-basis を求める作業が必要であり，手計算では非常に時間がかかる．実は，対称群においては Frobenius formula と呼ばれる公式が知られており機械的に指標を計算することができるので紹介する．

まず $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathscr{P}_n, \mathtt{T} \in \mathrm{Tab}_\lambda, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ をとり固定する．任意の $j \in [\ell]$ について，

$$p_j := \lambda_j + \ell - j$$

とおく．定理 1.5 により σ の共役類が対応する partiton を $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$ とかく．

$$\forall i, j \in [k](i \sim j :\Leftrightarrow \mu_i = \mu_j)$$

と $[k]$ 上に同値関係を入れ，その完全代表系を $(i_r)_{r=1}^m$ とする．各 $r \in [m]$ について以下のようにおく．

$$m_i := \#\overline{i_r}$$

事実 2.6 (*Frobenius formula*)

$\chi_{L_{\mathtt{T}}}(\sigma)$ は x_i たちを不定元とする K 上の多項式

$$(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} x_i - x_j)(\prod_{r=1}^{m}(x_1^{\mu_{i_r}} + \ldots + x_\ell^{\mu_{i_r}})^{m_i})$$

の $x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_\ell^{p_\ell}$ の係数である．

例えば $\lambda = (5,1) \in \mathscr{P}_6, \sigma = (1\,2\,3) \in \mathfrak{S}_6$ のときは，$\ell = 2, p_1 = 5+2-1 = 6, p_2 = 1+2-1 = 2, \mu = (3,1,1,1), k = 4, [k] = \overline{1} \sqcup \overline{2}, m = 2, i_1 = 1, i_2 = 2, m_1 = \#\bar{i_1} = \#\{1\} = 1, m_2 = \#\bar{i_2} = \#\{2,3,4\} = 3$ となるので，$\chi_{L_{\mathtt{T}}}(\sigma)$ は $(x_1-x_2)(x_1^3+x_2^3)(x_1+x_2)^3$ の $x_1^6x_2$ の係数である．

以下の命題は対称群の指標の内積を求める時に便利である．

事実 2.7

σ の共役類の元の個数 $\#\overline{\sigma}$ は次で与えられる．

$$\frac{n!}{\prod_{r=1}^{m} m_i! \mu_{i_r}^{m_i}}.$$

3 $\mathfrak{S}_n$ の表現環

3.1 積と compatible な可換モノイドの環への持ち上げ

この節では表現環を導入するための記号の準備を行う．$(M, +)$ が可換なモノイドであるとき，$M \times M$ 上に

$$(x, y) \sim (a, b) :\Leftrightarrow \exists k \in M(x + b + k = y + a + k)$$

と関係を入れるとこれは同値関係となり $(M \times M)/\sim$ は自然な和でアーベル群となるのであった．さらに $(M, *)$ がモノイドであり，$*$ が先の $+$ と分配律を満たすとき，$(M \times M)/\sim$ 上に

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{((a * c) + (b * d), (a * d) + (b * c))}$$

と積を定めれば $(M \times M)/\sim$ は環をなす．この $(M \times M)/\sim$ のことを $Gr(M)$ とかくこととする．

$$Gr(M) \hookrightarrow M; a \mapsto \overline{(a, 0)}$$

による同一視のもと，任意の $\overline{(a, 0)} \in Gr(M)$ を a とかくこととする．

3.2 表現環とは

この節では群の表現環の導入をする．有限群 G と標数が G の位数を割り切らない代数的閉体 K をとり固定する．$\mathscr{C} := \{V \mid V$ は群 G の K 上の有限次元表現 $\}/\cong$ とおく．ここで $\cong$ は表現としての同型のことである．まず $\mathscr{C}$ には直和により自然に和構造が入り $(\mathscr{C}, \oplus)$ は可換モノイドとなる．表現 V, W の K 上のテンソル積 $V \otimes W$ は,

$$KG \times (V \otimes W) \to V \otimes W; (g, v \otimes w) \mapsto g.v \otimes g.w$$

という KG-作用により表現となる．加えて表現 V, W, X に対し，以下のような表現の同型が成立する．

(i) $(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$.

(ii) $K_{\mathrm{triv}} \otimes V \cong V \cong V \otimes K_{\mathrm{triv}}$.

(iii) $V \otimes (W \oplus X) \cong (V \otimes W) \oplus (V \otimes X)$，$(V \oplus W) \otimes X \cong (V \otimes X) \oplus (W \otimes X)$.

つまり $\mathscr{C}$ には自然にテンソル積により積構造も入るのである．このときに考えられる環 $Gr(\mathscr{C})$ のことを群 G の**表現環**といい $\mathscr{R}_K(G)$ とかく．Maschke's theorem により $\mathrm{Irr}_K(G)$ は $\mathscr{R}_K(G)$ の $\mathbb{Z}$-basis をなすので，この環の積構造は既約表現同士の積に現れる係数により決定されるわけである．その構造定数と呼ばれる係数を決定するのが以下の命題である．

命題 3.1

$\mathrm{Irr}_K(G)$ の完全代表系 $(L_i)_{i \in I}$ について,

$$L_k \cdot L_\ell = \sum_{i \in I} (\chi_{L_k} \chi_{L_\ell} | \chi_{L_i}) L_i \quad in \quad \mathscr{R}_K(G).$$

Proof: 一般に有限次元表現 V,W について，表現として $V\otimes W\cong\bigoplus_{i\in I}L_i^{\oplus(\chi_{V\otimes W}|\chi_{L_i})}$ であり，$\chi_{V\otimes W}=\chi_V\chi_W$ であることより． ■

3.3 $\mathfrak{S}_n$ の表現環の構造の決定

以降，$\lambda\in\mathscr{P}_n$ に対し，$L_{\mathtt{T}_\lambda}$ を L_λ と略記する．以下では実際に $\mathrm{Irr}_K(\mathfrak{S}_n)=\{\overline{L_\lambda}\mid\lambda\in\mathscr{P}_n\}$ に関する乗積表をかくことにより $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_n)$ の環構造を決定する．

まず $\mathfrak{S}_n$ においては，次の命題により指標の内積を少しだけ楽に計算できる．

命題 3.2

類関数たち φ,ψ と $\mathfrak{S}_n/\underset{conj}{\sim}$ の完全代表系 C について，

$$(\varphi|\psi)=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in C}\#\overline{\sigma}\varphi(\sigma)\psi(\sigma).$$

Proof: C の仮定から $\mathfrak{S}_n=\bigsqcup_{\sigma\in C}\overline{\sigma}\ldots(\star)$．よって，

$$\begin{aligned}(\varphi|\psi)&\overset{(\mathrm{def})}{=}\frac{1}{\#\mathfrak{S}_n}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})\overset{(\star)}{=}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in C}\sum_{\tau\in\overline{\sigma}}\varphi(\tau)\psi(\tau^{-1})\overset{(\varphi,\psi\text{は類関数})}{=}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in C}\sum_{\tau\in\overline{\sigma}}\varphi(\sigma)\psi(\sigma^{-1})\\&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in C}\#\overline{\sigma}\varphi(\sigma)\psi(\sigma^{-1})\overset{(\text{定理 }1.5)}{=}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in C}\#\overline{\sigma}\varphi(\sigma)\psi(\sigma).\end{aligned}$$

■

従って，命題 3.2 及び命題 3.1 により

(i) 共役類の元の個数;

(ii) 共役類たちの完全代表系における指標の値

さえ分かれば既約表現の積が計算できる．以下で実際に計算してみる．

3.3.1 $\mathfrak{S}_3$ の場合

$\mathfrak{S}_3/\underset{\mathrm{conj}}{\sim}$ の完全代表系は $C=\{[\![1\ 2\ 3]\!],[\![1\ 2]\!],[\![1]\!]\}$ で与えられ，共役類の元の個数は，$\#\overline{[\![1\ 2\ 3]\!]}=2,\#\overline{[\![1\ 2]\!]}=3,\#\overline{[\![1]\!]}=1$ となっている．指標表は以下の通りである．

$\mathfrak{S}_3$	$[\![1\ 2\ 3]\!]$	$[\![1\ 2]\!]$	$[\![1]\!]$
$\chi_{L_{(3)}}$	1	1	1
$\chi_{L_{(2,1)}}$	-1	0	2
$\chi_{L_{(1,1,1)}}$	1	-1	1

よって，命題 3.2 により $(\chi_{L_{(2,1)}}\chi_{L_{(2,1)}}|\chi_{L_{(3)}})=\frac{1}{6}(2\cdot1+3\cdot0+1\cdot4)=1$ と計算できるので，命題 3.1 により $L_{(2,1)}\cdot L_{(2,1)}$ の $L_{(3)}$ の係数は 1 とわかる．他の係数も計算することで，$L_{(2,1)}\cdot L_{(2,1)}=L_{(3)}+L_{(2,1)}+L_{(1,1,1)}$ とわかる．

このようにしてできた $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_3)$ の乗積表が以下である．

	$L_{(3)}$	$L_{(2,1)}$	$L_{(1,1,1)}$
$L_{(3)}$	$L_{(3)}$	$L_{(2,1)}$	$L_{(1,1,1)}$
$L_{(2,1)}$	$L_{(2,1)}$	$L_{(3)}+L_{(2,1)}+L_{(1,1,1)}$	$L_{(2,1)}$
$L_{(1,1,1)}$	$L_{(1,1,1)}$	$L_{(2,1)}$	$L_{(3)}$

ここで $Y = L_{(2,1)}(= \mathrm{Std}_3), Z = L_{(1,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}})$ とみれば，乗積表により $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_3)$ は環として $\mathbb{Z}[Y,Z]/(Y^2-1-Y-Z, YZ-Y, Z^2-1)$ と同型であることがわかる．単位元は $L_{(3)}$ であることに注意する．以上により $\mathfrak{S}_3$ の表現環の構造を決定できた.

3.3.2 $\mathfrak{S}_4$ の場合

同様に $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_4)$ の乗積表は以下のように計算できた．ここで $X := L_{(4)}(= K_{\mathrm{triv}}), Y := L_{(3,1)}(= \mathrm{Std}_4), Z := L_{(2,2)}, V := L_{(2,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}} \otimes \mathrm{Std}_4), W := L_{(1,1,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}})$ とおいている.

	X	Y	Z	V	W
X	X	Y	Z	V	W
Y	Y	$X+Y+Z+V$	$Y+V$	$Y+Z+V+W$	V
Z	Z	$Y+V$	$X+Z+W$	$Y+V$	Z
V	V	$Y+Z+V+W$	$Y+V$	$X+Y+Z+V$	Y
W	W	V	Z	Y	X

3.3.3 $\mathfrak{S}_5$ の場合

同様に $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_5)$ の乗積表は以下のように計算できた．ここで $A := L_{(5)}(= K_{\mathrm{triv}}), B := L_{(4,1)}(= \mathrm{Std}_5), C := L_{(3,2)}, D := L_{(3,1,1)}(= \bigwedge^2(\mathrm{Std}_5)), E := L_{(2,2,1)}(= K_{\mathrm{sgn}} \otimes L_{(3,2)}), F := L_{(2,1,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}} \otimes \mathrm{Std}_5), G := L_{(1,1,1,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}})$ とおいている.

	A	B	C	D	E	F	G
A	A	B	C	D	E	F	G
B	B	$A+B+C+D$	$B+C+D+E$	$B+C+D+E+F$	$C+D+E+F$	$D+E+F+G$	F
C	C	$B+C+D+E$	$A+B+C+D+E+F$	$B+C+2D+E+F$	$B+C+D+E+F+G$	$C+D+E+F$	E
D	D	$B+C+D+E+F$	$B+C+2D+E+F$	$A+B+2C+D+2E+F+G$	$B+C+2D+E+F$	$B+C+D+E+F$	D
E	E	$C+D+E+F$	$B+C+D+E+F+G$	$B+C+2D+E+F$	$A+B+C+D+E+F$	$B+C+D+E$	C
F	F	$D+E+F+G$	$C+D+E+F$	$B+C+D+E+F$	$B+C+D+E$	$A+B+C+D$	B
G	G	F	E	D	C	B	A

3.3.4 $\mathfrak{S}_6$ の場合

同様に $\mathscr{R}_K(\mathfrak{S}_6)$ の乗積表は以下のように計算できた．ここで $A := L_{(6)}(= K_{\mathrm{triv}}), B := L_{(5,1)}(= \mathrm{Std}_6), C := L_{(4,2)}, D := L_{(4,1,1)}(= \bigwedge^2(\mathrm{Std}_6)), E := L_{(3,3)}, F := L_{(3,2,1)}, G := L_{(3,1,1,1)}(= \bigwedge^3(\mathrm{Std}_6)), H := L_{(2,2,2)}(= K_{\mathrm{sgn}} \otimes L_{(3,3)}), I := L_{(2,2,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}} \otimes L_{(4,2)}), I := L_{(2,1,1,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}} \otimes \mathrm{Std}_6).K := L_{(1,1,1,1,1,1)}(= K_{\mathrm{sgn}})$ とおいている.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
B	B	$A+B+C+D$	$B+C+D+E+F$	$B+C+D+F+G$	$C+F$	$C+D+E+2F+G+H+I$	$D+F+G+I+J$	$F+I$	$F+G+H+I+J$	$G+I+J+K$	J
C	C	$B+C+D+E+F$	$A+B+2C+D+2F+G+H$	$B+C+2D+E+2F+G+I$	$B+D+E+F+I$	$B+2C+2D+E+3F+2G+H+2I+J$	$C+D+2F+2G+H+I+J$	$C+F+G+H+J$	$D+E+2F+G+2I+J+K$	$F+G+H+I+J$	I
D	D	$B+C+D+F+G$	$B+C+2D+E+2F+G+I$	$A+B+2C+D+E+2F+G+H+I+J$	$C+D+F+G+H$	$B+2C+2D+E+4F+2G+H+2I+J$	$B+C+D+E+2F+G+H+2I+J+K$	$D+E+F+G+I$	$C+D+2F+2G+H+I+J$	$D+F+G+I+J$	G
E	E	$C+F$	$B+D+E+F+I$	$C+D+F+G+H$	$A+C+G+H$	$B+C+D+2F+G+I+J$	$D+E+F+G+I$	$D+E+I+K$	$C+F+G+H+J$	$F+I$	H
F	F	$C+D+E+2F+G+H+I$	$B+2C+2D+E+3F+2G+H+2I+J$	$B+2C+2D+E+4F+2G+H+2I+J$	$B+C+D+2F+G+I+J$	$A+2B+3C+4D+2E+5F+4G+2H+3I+2J+K$	$B+2C+2D+E+4F+2G+H+2I+J$	$B+C+D+2F+G+I+J$	$B+2C+2D+E+3F+2G+H+2I+J$	$C+D+E+2F+G+H+I$	F
G	G	$D+F+G+I+J$	$C+D+2F+2G+H+I+J$	$B+C+D+E+2F+G+H+2I+J+K$	$D+E+F+G+I$	$B+2C+2D+E+4F+2G+H+2I+J$	$A+B+2C+D+E+2F+G+H+I+J$	$C+D+F+G+H$	$B+C+2D+E+2F+G+I$	$B+C+D+F+G$	D
H	H	$F+I$	$C+F+G+H+J$	$D+E+F+G+I$	$D+E+I+K$	$B+C+D+2F+G+I+J$	$C+D+F+G+H$	$A+C+G+H$	$B+D+E+F+I$	$C+F$	E
I	I	$F+G+H+I+J$	$D+E+2F+G+2I+J+K$	$C+D+2F+2G+H+I+J$	$C+F+G+H+J$	$B+2C+2D+E+3F+2G+H+2I+J$	$B+C+2D+E+2F+G+I$	$B+D+E+F+I$	$A+B+2C+D+2F+G+H$	$B+C+D+E+F$	C
J	J	$G+I+J+K$	$F+G+H+I+J$	$D+F+G+I+J$	$F+I$	$C+D+E+2F+G+H+I$	$B+C+D+F+G$	$C+F$	$B+C+D+E+F$	$A+B+C+D$	B
K	K	J	I	G	H	F	D	E	C	B	A

参考文献

[1] 池田 岳（著),「テンソル代数と表現論 線形代数続論」, 東京大学出版会 (2022).

[2] W. Fulton and T. Harris, *“Representation Theory. A First Course”*, GTM **129**, Springer (1991).